Michael Buhlmann

Mathematik > Algebra > Potenzen

Eine Zahl a^n heißt Potenz mit Basis a und Exponenten n und erklärt sich aus:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal}.$$

Für das Rechnen mit Potenzen gelten folgende Regeln (für positive, reelle Basen *a*, *b* und reelle Exponenten *m*, *n* sowie reelle Zahlen r, s):

Potenzgesetze		
gleiche Basis	$a^0 = 1$	Potenzen mit Hochzahl 0 ergeben 1.
	$a^1 = a$	Potenzen mit Hochzahl 1 ergeben die Basis.
	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ (Potenzgesetz 1)	Potenzen werden multipliziert, indem die Exponenten addiert werden.
	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (Potenzgesetz 2)	Potenzen werden dividiert, indem die Exponenten subtrahiert werden.
	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	Bei der Kehrwertbildung einer Potenz ändert sich das Vorzeichen des Exponenten.
	$\left(a^n\right)^m = a^{nm}$ (Potenzgesetz 3)	Potenzen werden potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden.
gleiche Hochzahl	$a^n b^n = (ab)^n$ (Potenzgesetz 4)	Potenzen werden multipliziert, indem die Basen multipliziert werden.
	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ (Potenzgesetz 5)	Potenzen werden dividiert, indem die Basen dividiert werden.
	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	Bei der Kehrwertbildung einer Potenz ändert sich das Vorzeichen des Exponenten.
1 und -1	$1^n = 1$, $1^{-n} = 1$	Beim Potenzieren von 1 ändert sich nichts.
	$(-1)^n = -1$, $(-1)^{-n} = -1$ (n ungerade)	Bei ungerader ganzer Hochzahl bleibt das Minuszeichen erhalten.
	$(-1)^n = 1$, $(-1)^{-n} = 1$ (n gerade)	Bei gerader ganzer Hochzahl verschwindet das Minuszeichen.
Addition	$ra^n \pm sa^n = (r \pm s)a^n$	Gleiche Potenzen können addiert und subtrahiert werden.

Potenzgesetze greifen also nur bei Potenzen mit gleicher Basis oder mit gleichem Exponenten.

Beispiele:

a) $7^0 = 1$, $5x^0 = 5$, $(4xy^2)^0 = 1$, $\left(\frac{9x^5}{2y^2}\right)^0 = 1$

b) $8^1 = 8$, $(7\cdot 4)^1 = 28$, $(abc)^1 = abc$, $\left(\frac{5}{9}\right)^1 = \frac{5}{9}$, $\left(-\frac{71}{2}\right)^1 = -\frac{71}{2}$

c) $4^3 \cdot 4 = 4^{3+1} = 4^4 = 256$, $x^4y^2z^3x^2yz^3 = x^4x^2y^2yz^3z^3 = x^{4+2}y^{2+1}z^{3+3} = x^6y^3z^6$

d) $\frac{6^3}{6^2} = 6^{3-2} = 6^1 = 6$, $\frac{5^5}{5^6} = 5^{5-6} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$, $\frac{(2a)^5}{(2a)^2} = (2a)^{5-2} = (2a)^3 = 8a^3$, $\frac{x^3}{5x^2} = \frac{1}{5}x^{3-2} = \frac{1}{5}x$

e) $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$, $5\cdot 7^{-2} = 5\cdot\frac{1}{7^2} = \frac{5}{49}$, $2x^{-3} = 2\cdot\frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3}$

f) $(5^2)^2 = 5^{2\cdot 2} = 5^4 = 625$, $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1^6}{2^6} = \frac{1}{64}$

g) $(ab)^5 = a^5b^5$, $(-abc)^3 = (-1)^3\cdot a^3b^3c^3 = -a^3b^3c^3$

h) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$, $\left(\frac{a}{4}\right)^3 = \frac{a^3}{4^3} = \frac{a^3}{64}$, $\left(\frac{x^2}{9}\right)^3 = \frac{(x^2)^3}{9^3} = \frac{x^6}{729}$

i) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$

j) $1^7 = 1$, $1^{-13} = 1$, $(-1)^3 = -1$, $(-1)^{10} = 1$, $(-1)^{-5} = -1$, $(-1)^{-12} = 1$

Aufgabe 1: (Gleiche Basen:) Vereinfache.

a) $5^0 =$
b) $4\cdot 5^2\cdot 5^4 =$
c) $a\cdot a^5 =$
d) $a^3\cdot a^5\cdot a^{10} =$
e) $4a^3\cdot 5a^6\cdot 7a =$
f) $-12a^2\cdot(-10)b^6\cdot 4a^4\cdot(-3)b =$
g) $\frac{c^8}{c^4} =$
h) $\frac{-8c^5}{2c^2} =$
i) $\frac{16a^3\cdot 5b^3}{25a\cdot 2b^2} =$
j) $\frac{a^5}{a^5} =$
k) $5x^3\cdot\frac{2x^4}{6x} =$

l) $x^2 y \cdot \frac{x^6 y^2}{x^4 y} =$
m) $\frac{4a^3}{5b^2} \cdot \frac{8b^3}{3a^2} =$
n) $\frac{8x^5}{15y^4} \cdot \frac{5y^7}{2x^2} \cdot \frac{3}{4x^3} \cdot \frac{7}{y^3} =$
o) $p^3 \cdot q \cdot p \cdot q^{10} =$
p) $\frac{p^3}{q^2} : \frac{q^{10}}{p^2} =$
q) $\frac{5a^3}{2b^2} : \frac{6a}{4b} =$
r) $\frac{-4x^5 y}{3xy^4} : \left(-\frac{x^2 y}{2x^3 y^5}\right) =$
s) $4 \cdot 4^n \cdot 5^{2m} \cdot 5^n =$
t) $\frac{3 \cdot 6^n}{5 \cdot 6^2} =$
u) $4 \cdot a^{2n+1} \cdot 7^m \cdot 5 \cdot a^{4n-7} \cdot 7 =$
v) $-13^{n+5} : 13^{2n-5} =$
w) $\frac{3^{m+2} \cdot 8^{3n} \cdot 11^{k+10}}{3^4 \cdot 8^{2n} \cdot 11^{2k}} =$
x) $\frac{4a^{3m+2}}{3b^{4n}} : \frac{2a^{2m-7}}{3b^{2n-6}} =$
y) $\frac{-12a^{4m}}{5b^{4n}} : \frac{5b^{2n}}{-6a^{2m}} =$
z) $(8^3)^4 =$
a’) $(12^4)^{-6} =$
b’) $(x^5)^{-2} =$
c’) $(x^4)^3 \cdot (x^3)^4 =$

d')	$a \cdot \left(b^3\right)^6 \cdot b^7 \cdot (a^6)^2 =$
e')	$\dfrac{\left(z^5\right)^{-2}}{(z^3)^5} =$
f')	$\left(x^{2n}\right)^{4n} =$
g')	$(-6) \cdot \left(c^{-n}\right)^5 \cdot (-2) \cdot c^{4n} \cdot (-5) \cdot c =$
h')	$\left(p^{2n+4}\right)^4 \cdot (q^3)^{2n-3} \cdot p^n \cdot (q^{n-4})^5 =$
i')	$\dfrac{\left(p^{2n-1}\right)^n}{q^{10}} \cdot \dfrac{(q^{m+1})^m}{p^{4n}} \cdot \dfrac{q^{16m}}{\left(p^{n+8}\right)^4} =$
j')	$\left(-b^{3n+4}\right)^0 =$
k')	$\dfrac{-8\left(a^{3m}\right)^3}{5b^{3n+2}} : \dfrac{6a^{2m-7}}{25\left(b^2\right)^{n+1}} =$
l')	$\left(-y^{6n-5}\right)^6 \cdot (y^{5n-1})^3 =$
m')	$\dfrac{\left(a^{2m-1}\right)^3 \cdot 2c^2}{5b^{n+2} \cdot d^{n+m}} \cdot \dfrac{10bd^{2m-7}}{4a^2\left(c^3\right)^{n-m}} =$

<u>Aufgabe 2</u>: (Gleiche Exponenten, gleiche Basen:) Forme um.

a)	$(3 \cdot 4)^n \cdot (3 \cdot 4)^{2m} =$
b)	$(-5a^2b^nc^{2m})^0 =$
c)	$7^n \cdot 3^n =$
d)	$(2a)^{2n+1} \cdot 3^{2n+1} =$
e)	$\dfrac{\left(a^5\right)^2}{b^{10}} =$
f)	$\left(a^5b^2cd^5\right)^2 =$
g)	$\left(4x^5y^2\right)^2 \cdot \left(2x^2y\right)^4 =$
h)	$(-1)^{n+1} \cdot \left(-x^2\right)^{n+1} =$

i)	$\dfrac{(-ab)^{n-m}}{(b^2)^{n-m}} =$
j)	$\dfrac{(a^5b^2cd^5)^2}{(ab^{10}c^3d)^3} =$
k)	$\dfrac{4^{-3}}{3^{-3}} =$
l)	$\left(\dfrac{4a}{3b}\right)^{-4} =$
m)	$\left(\dfrac{-x}{2y}\right)^{-5} \cdot \left(\dfrac{-y}{3x^2}\right)^3 =$
n)	$\left(\dfrac{3p^3}{2q^2}\right)^2 : \left(\dfrac{-q^2}{2p^2}\right)^{-3} =$
o)	$\left(-\dfrac{a}{b}\right)^{2n} \cdot \left(\dfrac{a^2}{2b}\right)^{-2n} =$
p)	$\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2n}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{b}{a}\right)^{8n} =$
q)	$(-x^{2m}y^{3n+1})^3 \cdot (-2x^{2m-3}y)^4 =$
r)	$(3a^2b^3)^{n+5} \cdot (-2a^{n-3}b^3)^3 \cdot (-a^{n+3}b^{n-1})^2 =$
s)	$\dfrac{(a^2b)^{n+5}}{(a^3b^3)^{n+5}} =$
t)	$\dfrac{(a^4b^3)^{n-1}}{(a^2b)^{n+2}} : \dfrac{(ab^2)^{n-1}}{(a^3b^4)^{n+2}} =$
u)	$\dfrac{(2x^4)^5}{(4x)^3} \cdot \dfrac{(x^3)^8}{(2x^2)^8} =$
v)	$\left(-\dfrac{y}{2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{2}{y}\right)^{-3} \cdot (2y)^3 =$

w)	$\left(\frac{xy}{z^2}\right)^5 : \left(\frac{yz}{x^2}\right)^{-5} =$
x)	$\left(\frac{pq^2}{4}\right)^{2n-3} : \left(\frac{2}{p^2q}\right)^{2n-3} =$
y)	$\frac{\left(a^4b^2\right)^n \cdot \left(a^{n-1}b^{2n+3}\right)^3}{(ab^5)^{n-6}} =$
z)	$\frac{\left(p^{3n+1}q^{n-2}\right)^4 \cdot \left(p^4q^{n-3}\right)^3}{(p^3q^5)^{n-6} \cdot (p^{2n}q)^5} =$

Aufgabe 3: Forme um.

a)	$4^3 + 7 \cdot 4^3 =$
b)	$2 \cdot 5^4 + 3 \cdot 4^4 - 3 \cdot 5^4 + 8 \cdot 4^4 =$
c)	$(-6)^3 + 2 \cdot 3^4 =$
d)	$(5^2)^{-3} =$
e)	$\left(\left(10^4\right)^{-5}\right)^{-3} =$
f)	$\left(a^{-4}\right)^4 =$
g)	$\left(\frac{1}{a^6}\right)^5 =$
h)	$\left(\frac{3x^3}{2y^4}\right)^3 =$
i)	$\left(\frac{3p^2q^5}{5p^4q}\right)^{-4} =$
j)	$2p \cdot 4q^2 \cdot (2p)^3 \cdot (4q)^2 =$
k)	$-5p^4 \cdot q^3 \cdot (-2p^3)^4 \cdot (10q^4)^3 =$
l)	$\frac{(-3p^3)^4 \cdot (5pq^2)^4}{(2pq)^4 \cdot (3p^2q)^4} =$
m)	$\left(\frac{-3a^2b^4c}{4abc}\right)^0 =$

n)	$\left(\dfrac{5a^2b^{-4}c}{2ab^{-2}c^3}\right)^2 =$
o)	$\dfrac{ab\cdot(ab)^{-2}}{(ab)^3} =$
p)	$\dfrac{r^2s^3\cdot rs^{-2}}{r^{-2}s^{-4}} : \dfrac{(rs)^2}{(r^2s)^3} =$
q)	$\dfrac{2x\cdot(-4y)^3}{16x^{-2}y^3} : \dfrac{(-2xy)^4}{8xy^3} =$
r)	$\left(\dfrac{5x}{6y}\right)^3 \cdot \dfrac{2x^4}{3y^8}\cdot\left(\dfrac{x^3}{2y}\right)^4 =$
s)	$\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^{n+3}\cdot\left(\dfrac{y^3}{x^2}\right)^{-n+1} =$
t)	$\left(p^3\right)^{2n-1}\cdot\left(p^2\right)^{-3n+5} =$
u)	$\left(2a^{3n}bc^n\right)^3\cdot\left(-4a^2b^{2n}c\right)^5 =$
v)	$\dfrac{\left(2a^{2n+1}b^2cd^n\right)^3}{(4abc^{n+3}d^{n-2})^2} =$
w)	$\dfrac{\left(-3x^{n+6}y^{2n}z^{n-3}\right)^5}{(-2x^{n-5}y^{n+2}z)^2} =$
x)	$\left(\dfrac{xyz}{y^2z^4}\right)^{2n-3} : \left(\dfrac{xy^2}{x^2z}\right)^{-2n+3} =$
y)	$\dfrac{2a^2b\cdot(-4a^3b^2)^3\cdot 5a^{-2}\cdot(-b^2)^{-3}}{(8a^4b^3)^3\cdot(-2a)^2\cdot(3b)^4\cdot a^{-2}} =$
z)	$\left(\dfrac{2p}{3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{p^2}{4}\right)^{-4}\cdot\left(\dfrac{8}{p^3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{p}{2}\right)^{-5} =$

Michael Buhlmann, 10.2012