

Von der mittleren zur momentanen Änderungsrate

Für zwei verschiedene Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ auf der Zahlenebene ergibt sich die Steigung m als:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{Differenzenquotient}).$$

Der Steigung entspricht ein Steigungswinkel $\varphi = \tan^{-1}(m)$.

Liegen die Punkte P und Q auf einer Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$, gilt also: $P(x_1|f(x_1))$ und $Q(x_2|f(x_2))$, so wird der Differenzenquotient zur mittleren (durchschnittlichen) Änderungsrate der Funktion auf dem Intervall $[x_1; x_2] \subset D_f$:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (\text{mittlere Änderungsrate}).$$

Nach der Zweipunkteform für Geraden ergibt sich als Gleichung der Sekante durch die Punkte $P(x_1|f(x_1))$ und $Q(x_2|f(x_2))$:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + y_1 \quad (\text{Sekante}).$$

Die mittlere Änderungsrate der Funktion $f(x)$ auf einem vorgegebenen Intervall $[a; b] \subset D_f$ ist:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{mittlere Änderungsrate})$$

Haben für eine Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ und ein $x_0 \in D_f$ die Punkte P und Q die Form $P(x_0|f(x_0))$ und $Q(x_0+h|f(x_0+h))$, so wird die mittlere Änderungsrate

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

beim Grenzübergang (Limes) $h \rightarrow 0$ im Falle der Existenz des Grenzwerts zur momentanen Änderungsrate oder Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 :

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} m_t = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{momentane Änderungsrate})$$

mit m_t als Steigung der Tangente t im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ an die Funktion $f(x)$:

$$t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (\text{Tangente})$$

Beispiele

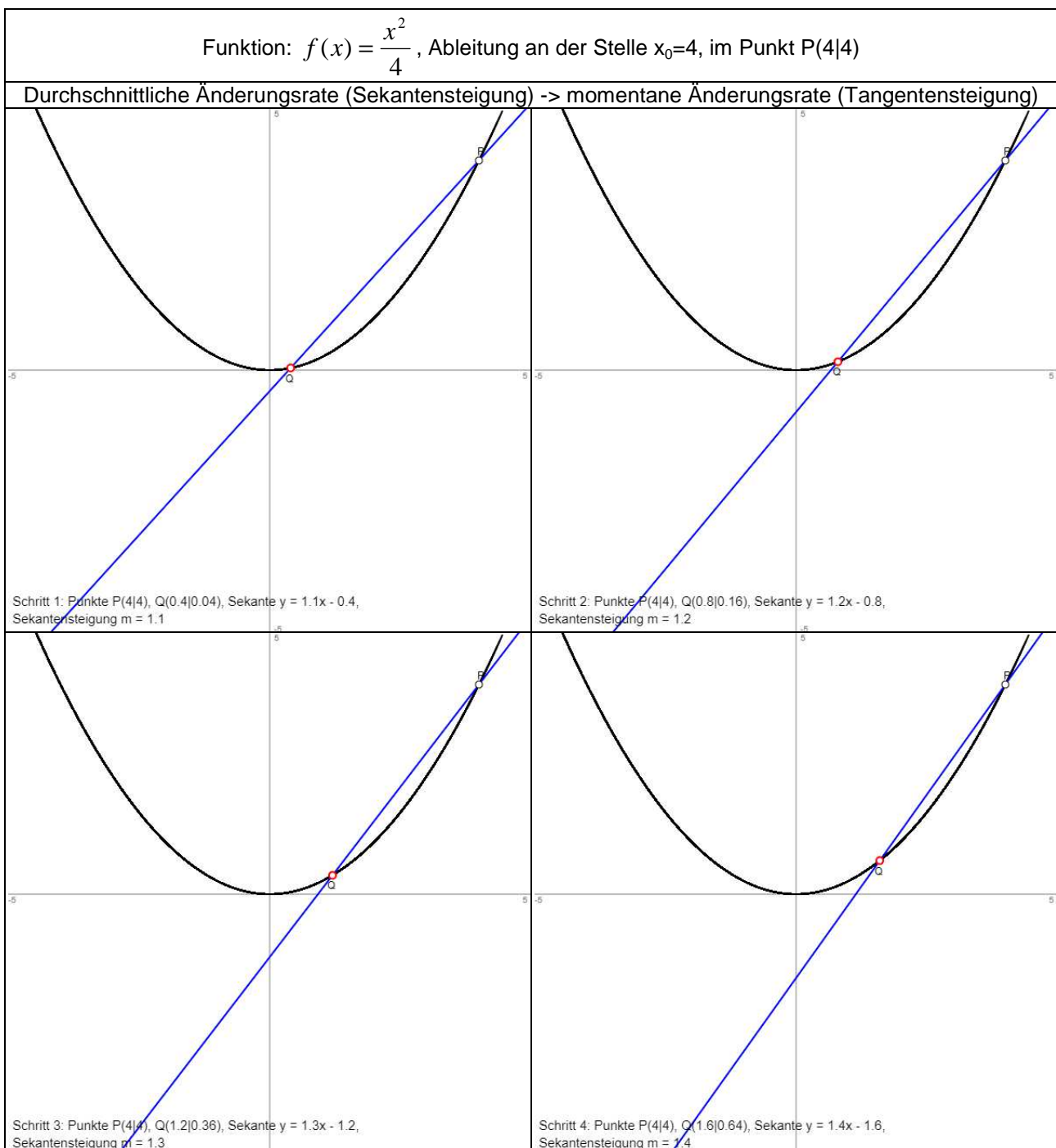
a) Gegeben sei die ganz rationale Funktion $f(x) = \frac{x^2}{4}$ als Parabel 2. Grades. An der Stelle $x_0 = 4$, also im Punkt $P(4|4)$ (wegen $f(4) = 4 \cdot 4/4 = 4$) soll die Ableitung $f'(4)$ bestimmt werden. Dies ge-

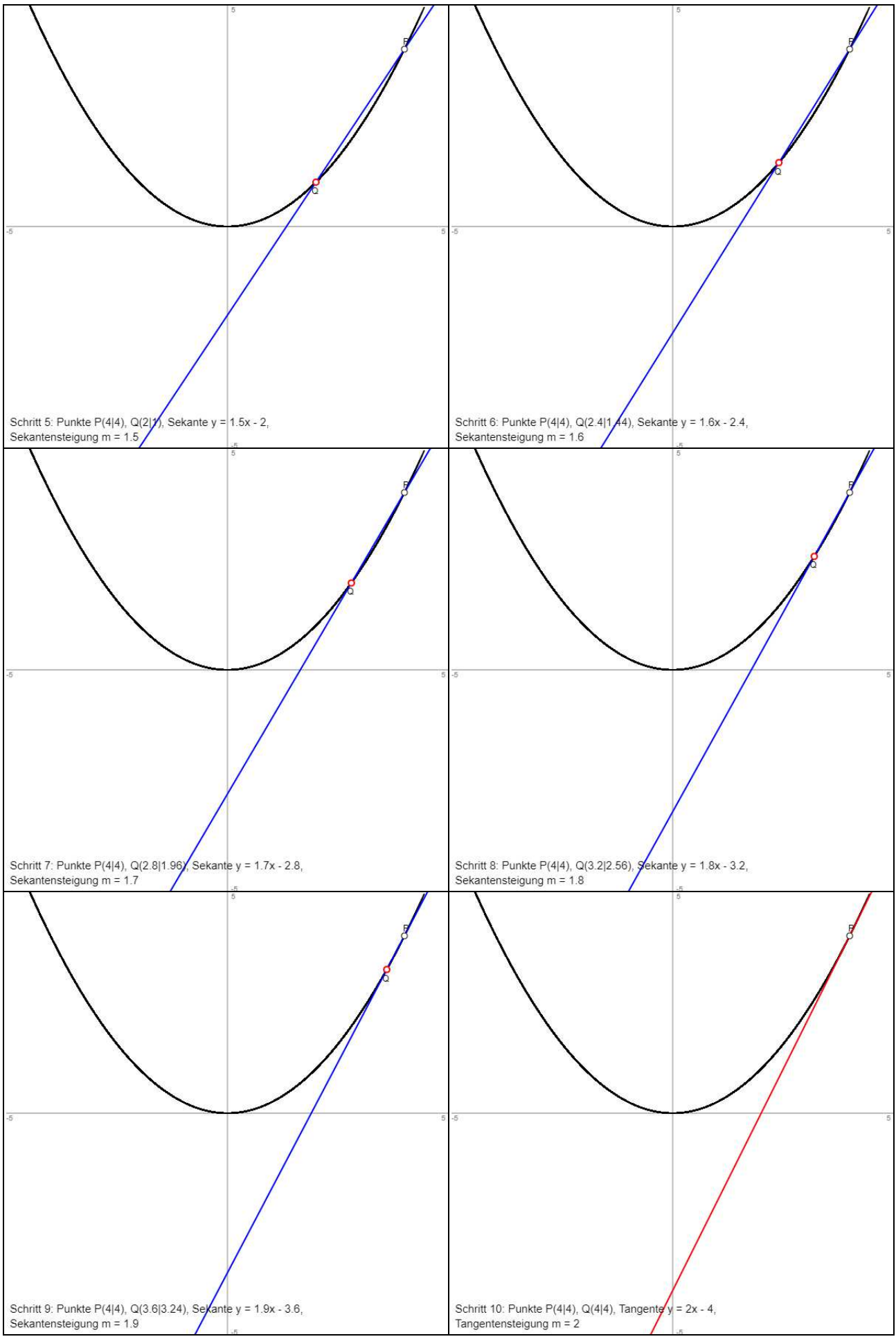
schiebt rechnerisch, indem der folgende Grenzübergang vollzogen wird:

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{4+h-4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16+8h+h^2-4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+2h+\frac{h^2}{4}-4}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h+\frac{h^2}{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+\frac{h}{4}}{1} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(2 + \frac{h}{4}\right) = 2 + \frac{0}{4} = 2.$$

Dem entspricht geometrisch, dass mit $x_1 = x_0+h$ ($h>0$) ein Punkt $Q(x_1|f(x_1))$ sich dem Punkt $P(4|4)$ auf der Funktion $f(x)$ nähert ($h \rightarrow 0$), wobei die durch Q und P gehenden Sekanten zur Tangenten an der Funktion im Punkt P werden, d.h.: die Sekantensteigungen m_s haben die Tangentensteigung m_t als Grenzwert ($m_s \rightarrow m_t$), mithin die Ableitung an der Stelle $x_0 = 4$: $f'(4)$.

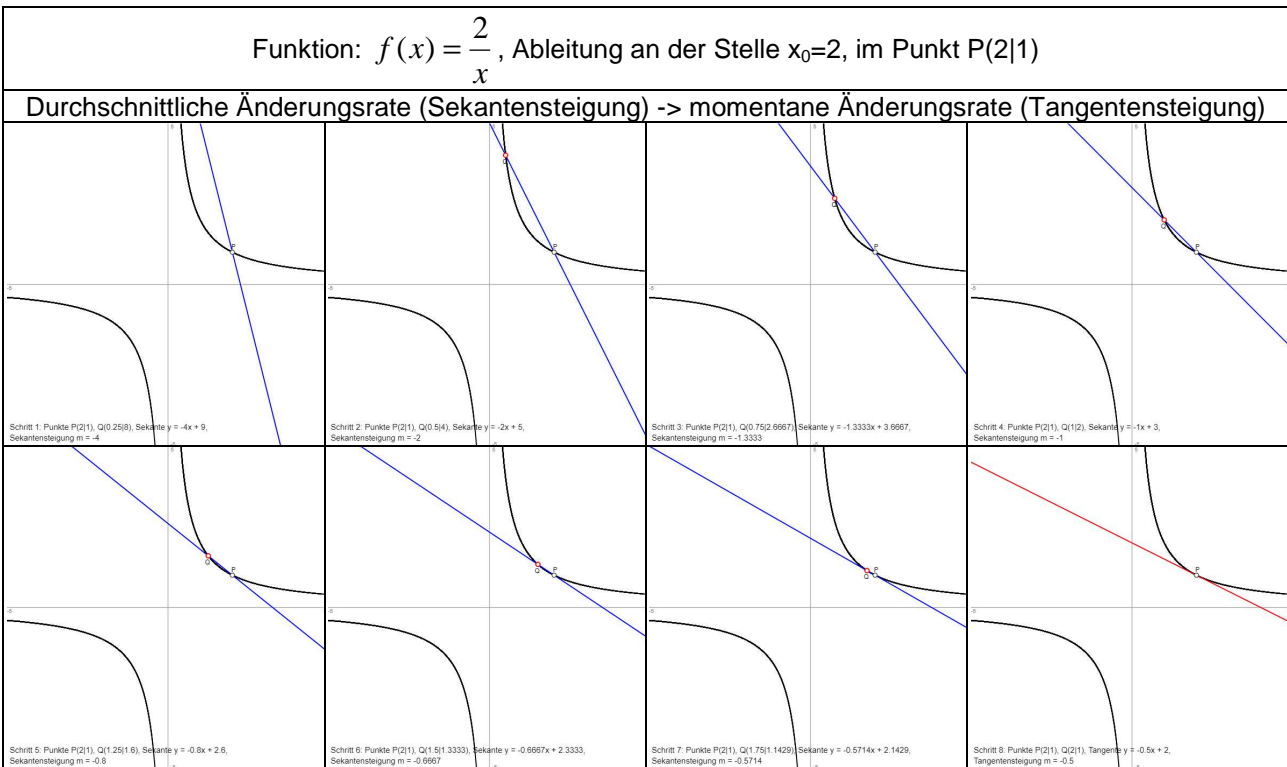




Es ist: $f(4) = 4$, $f'(4) = 2$. Somit ergibt sich für $x_0 = 4$ die Tangentengleichung:

$$t: y = f'(4)(x-4) + f(4) = 2(x-4) + 4 = 2x - 8 + 4 = 2x - 4.$$

b) Die Ableitung der Hyperbelfunktion $f(x) = \frac{2}{x}$ an der Stelle $x_0 = 2$ ist: $f'(2) = -0,5$. Geometrisch ergibt sich dies aus dem nachstehenden Grenzprozess:



Rechnerisch gilt:

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{2+h} - \frac{2}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{2+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{2+h} - \frac{2+h}{2+h}}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 - (2+h)}{2+h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2-2-h}{2+h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{2+h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2+h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2+0} = \frac{-1}{2} = -0,5.$$

Die Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle $P(2|1)$ lautet wegen $f(2) = 1$ und $f'(2) = -0,5$:

$$t: y = f'(2)(x-2) + f(2) = -0,5(x-2) + 1 = -0,5x + 1 + 1 = -0,5x + 2.$$

c) Eine andere Sichtweise auf Sekanten, die sich einer Tangente an einem bestimmten Punkt einer Funktion annähern, gibt die folgende Situation der Bestimmung der Ableitung bzw. Tangentensteigung $f'(-2)$ an der Stelle $x_0 = -2$ der Funktion $f(x) = x^2/5 - x$. Gemäß den Ableitungsregeln (Potenz-, Faktor-, Summenregel), die hier Anwendung finden sollen, gilt: $f'(x) = 2x/5 - 1$ und damit: $f'(-2) = -4/5 - 1 = -1,8$ als Tangentensteigung. Die Gleichung der Tangente lautet auf Grund von $f(-2) = 4/5 + 2 = 2,8$:

$$t: y = f'(-2)(x+2) + f(-2) = -1,8(x+2) + 2,8 = -1,8x - 3,6 + 2,8 = -1,8x - 0,8.$$

Die Sekanten durch die Punkte P und Q lauten:

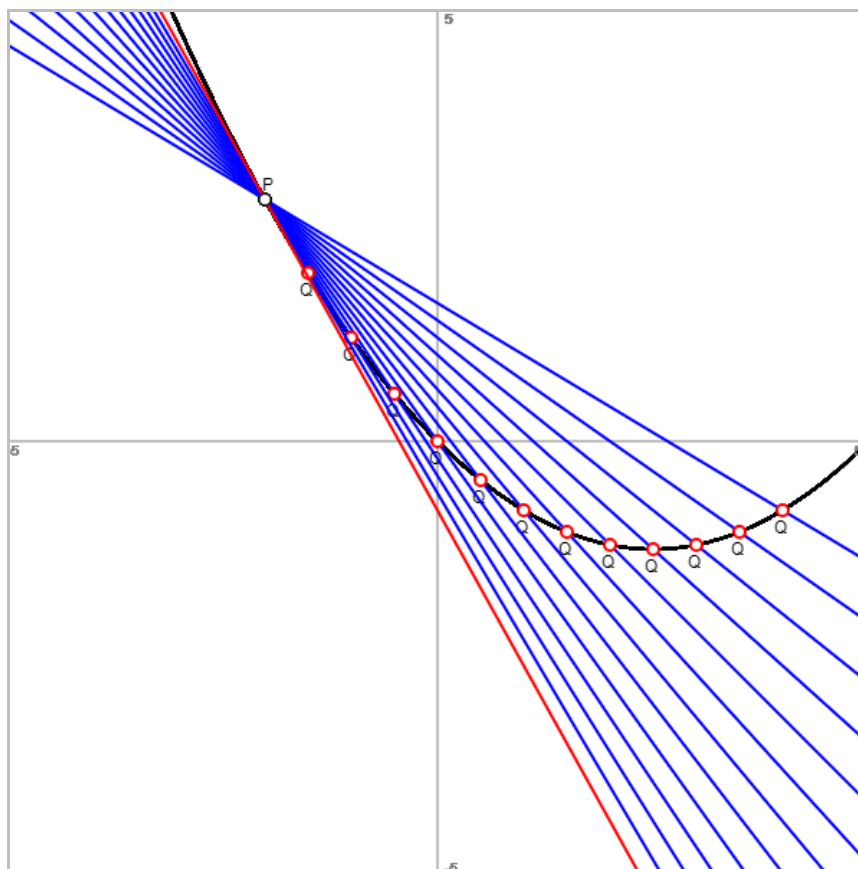
$$P(-2|2,8), Q(4|-0,8) \rightarrow y = -0,6x + 1,6$$

$P(-2|2,8), Q(3,5|-1,05) \rightarrow y = -0,7x + 1,4$
 $P(-2|2,8), Q(3|-1,2) \rightarrow y = -0,8x + 1,2$
 $P(-2|2,8), Q(2,5|-1,25) \rightarrow y = -0,9x + 1$
 $P(-2|2,8), Q(2|-1,2) \rightarrow y = -x + 0,8$
 $P(-2|2,8), Q(1,5|-1,05) \rightarrow y = -1,1x + 0,6$
 $P(-2|2,8), Q(1|-0,8) \rightarrow y = -1,2x + 0,4$
 $P(-2|2,8), Q(0,5|-0,45) \rightarrow y = -1,3x + 0,6$
 $P(-2|2,8), Q(0|0) \rightarrow y = -1,4x$
 $P(-2|2,8), Q(-0,5|0,55) \rightarrow y = -1,5x - 0,2$
 $P(-2|2,8), Q(-1|1,2) \rightarrow y = -1,6x - 0,4$
 $P(-2|2,8), Q(-1,5|1,95) \rightarrow y = -1,7x - 0,6.$

Für die Sekantensteigungen $m_s = -0,6, -0,7, \dots$ gilt:

$Q \rightarrow P: m_s \rightarrow m_t$

mit m_t als Tangentensteigung und Ableitung $f'(-2) = -1,8$.



Zusammenfassung

Differenzialrechnung ist die mathematische Lehre von den Ableitungen, Ableitungen wiederum übertragen das Konzept von Gerade ($y = mx+c$) und Geradensteigung (m) auf beliebige (somit) differenzierbare Funktionen $f(x)$ und der Tangente (Tangentensteigung $f'(x_0)$) in einem (beliebigen) Kurvenpunkt $P(x_0|f(x_0))$. Differenzierbarkeit ist damit eine lokale (auf eine Stelle/einen Punkt bezogene) Eigenschaft von Kurven und Funktionen.

Literaturhinweise: PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd.1, Wiesbaden ¹¹2007, S.308-311 (Ableitung); REINHARDT, F., dtv-Atlas zur Schulmathematik. Definitionen, Beweise, Sätze, München ³2003, S.120f (Ableitung).