**Michael Buhlmann**

# Mathematik > Analysis > Ableitungen > Änderungsrate

## Von der mittleren zur momentanen Änderungsrate

Für zwei verschiedene Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ auf der Zahlenebene ergibt sich die Steigung m als:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ (Differenzenquotient).}$$

Der Steigung entspricht ein Steigungswinkel $\varphi = \tan^{-1}(m)$.

Liegen die Punkte P und Q auf einer Funktion $f: D_f \to \mathbf{R}$, gilt also: $P(x_1|f(x_1))$ und $Q(x_2|f(x_2))$, so wird der Differenzenquotient zur mittleren (durchschnittlichen) Änderungsrate der Funktion auf dem Intervall $[x_1; x_2] \subset D_f$:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ (mittlere Änderungsrate).}$$

Nach der Zweipunkteform für Geraden ergibt sich als Gleichung der Sekante durch die Punkte $P(x_1|f(x_1))$ und $Q(x_2|f(x_2))$:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + y_1 \text{ (Sekante).}$$

Die mittlere Änderungsrate der Funktion f(x) auf einem vorgegebenen Intervall $[a; b] \subset D_f$ ist:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ (mittlere Änderungsrate)}$$

Haben für eine Funktion $f: D_f \to \mathbf{R}$ und ein $x_0 \in D_f$ die Punkte P und Q die Form $P(x_0|f(x_0))$ und $Q(x_0+h|f(x_0+h))$, so wird die mittlere Änderungsrate

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

beim Grenzübergang (Limes) $h \to 0$ im Falle der Existenz des Grenzwerts zur momentanen Änderungsrate oder Ableitung der Funktion f im Punkt $x_0$:

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} m_t = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(momentane Änderungsrate)

mit $m_t$ als Steigung der Tangente t im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ an die Funktion f(x):

$$t:\ y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ (Tangente)}$$

## Beispiele

a) Gegeben sei die ganz rationale Funktion $f(x) = \frac{x^2}{4}$ als Parabel 2. Grades. An der Stelle $x_0 = 4$, also im Punkt P(4|4) (wegen $f(4) = 4\cdot 4/4 = 4$) soll die Ableitung f'(4) bestimmt werden. Dies geschieht rechnerisch, indem der folgende Grenzübergang vollzogen wird:

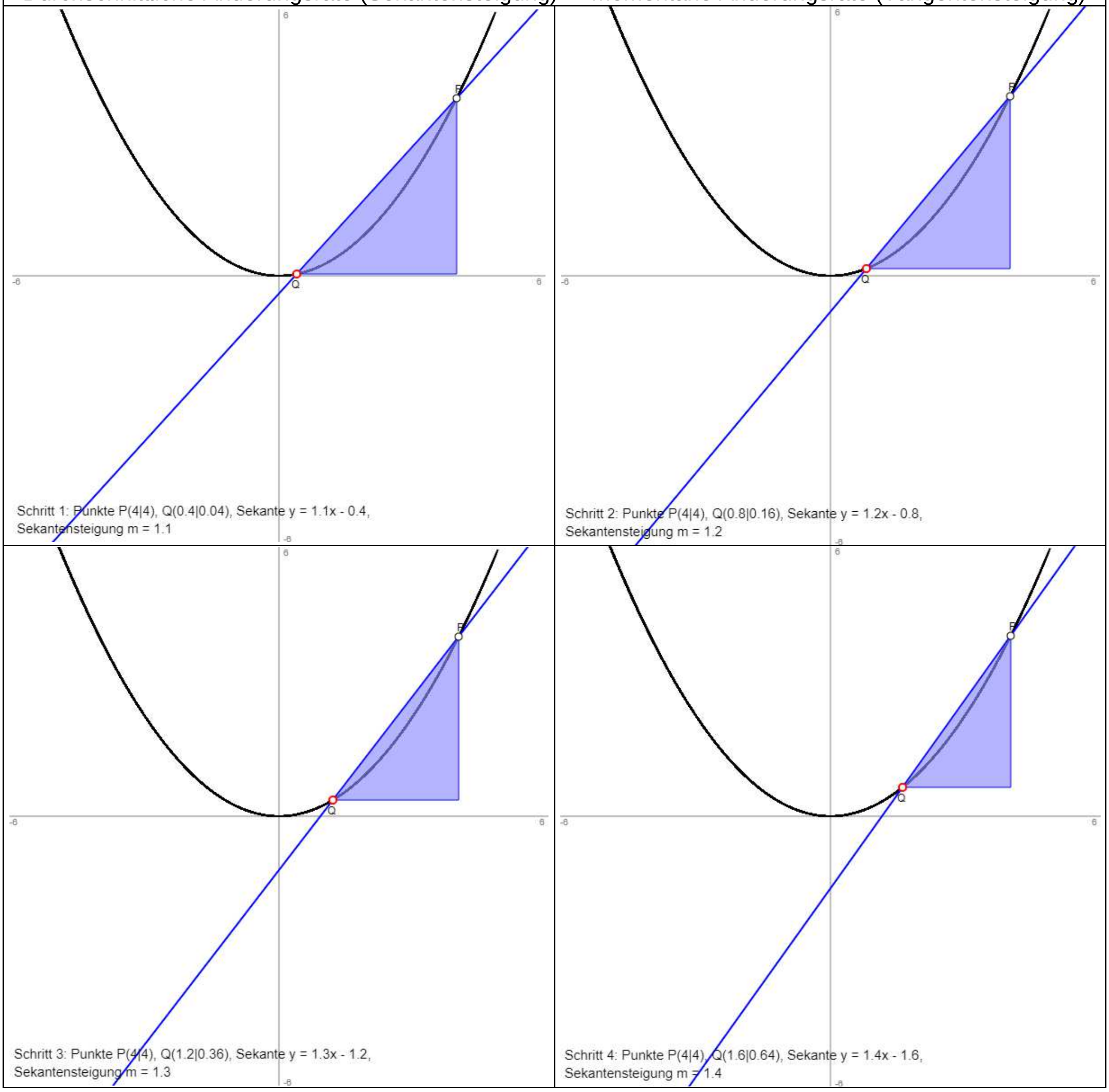
$$f'(4) = \lim_{h->0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h->0} \frac{\frac{(4+h)^2}{4} - \frac{4^2}{4}}{h} = \lim_{h->0} \frac{\frac{16+8h+h^2}{4} - 4}{h} = \lim_{h->0} \frac{4+2h+\frac{h^2}{4} - 4}{h} =$$

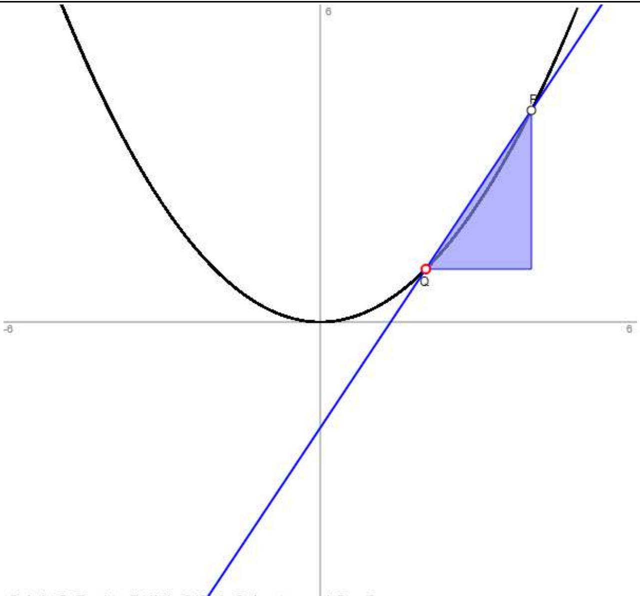
$$\lim_{h->0} \frac{2h+\frac{h^2}{4}}{h} = \lim_{h->0} \frac{2+\frac{h}{4}}{1} = \lim_{h->0}\left(2+\frac{h}{4}\right) = 2+\frac{0}{4} = 2.$$

Dem entspricht geometrisch, dass mit $x_1 = x_0+h$ ($h>0$) ein Punkt $Q(x_1|f(x_1))$ sich dem Punkt P(4|4) auf der Funktion f(x) nähert (h -> 0), wobei die durch Q und P gehenden Sekanten zur Tangenten an der Funktion im Punkt P werden, d.h.: die Sekantensteigungen $m_s$ haben die Tangentensteigung $m_t$ als Grenzwert ($m_s$ -> $m_t$), mithin die Ableitung an der Stelle $x_0 = 4$: f'(4).

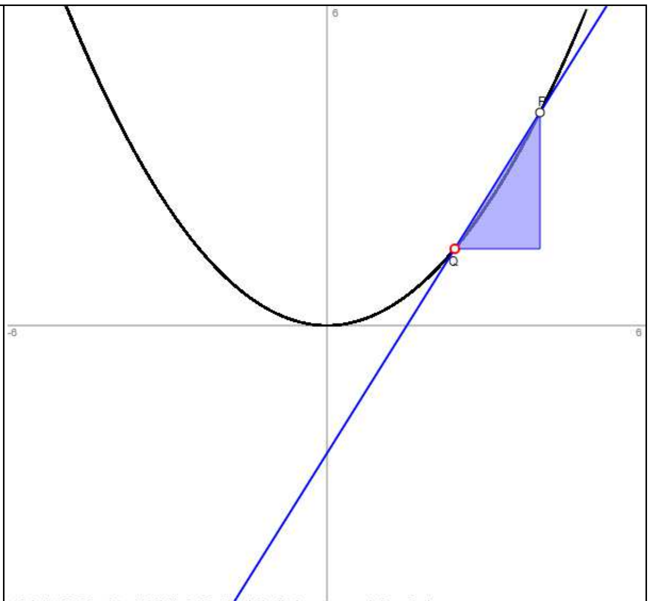
Funktion: $f(x) = \frac{x^2}{4}$, Ableitung an der Stelle $x_0$=4, im Punkt P(4|4)

Durchschnittliche Änderungsrate (Sekantensteigung) -> momentane Änderungsrate (Tangentensteigung)

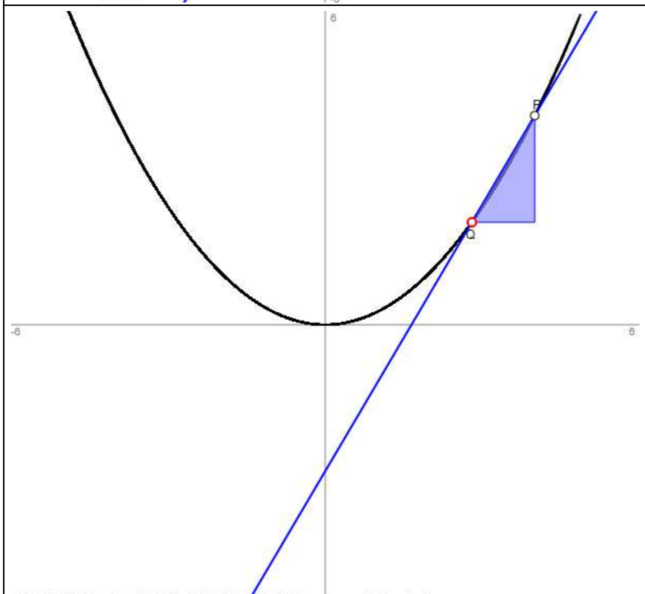




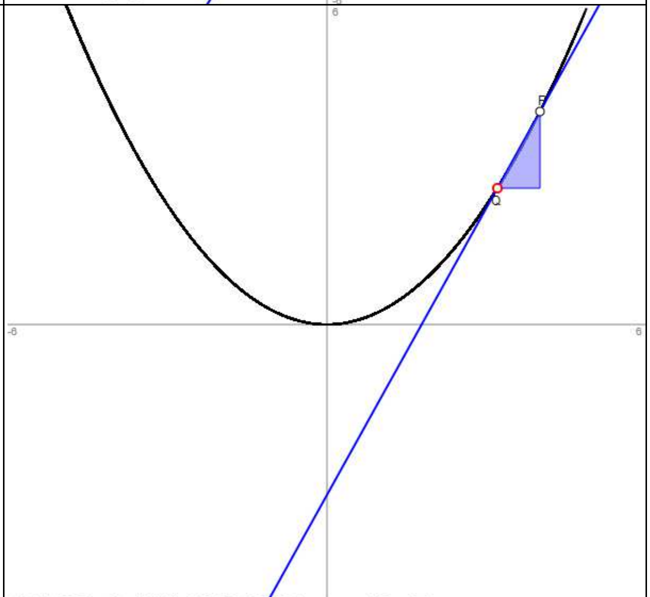

Schritt 5: Punkte P(4|4), Q(2|1), Sekante y = 1.5x - 2,
Sekantensteigung m = 1.5



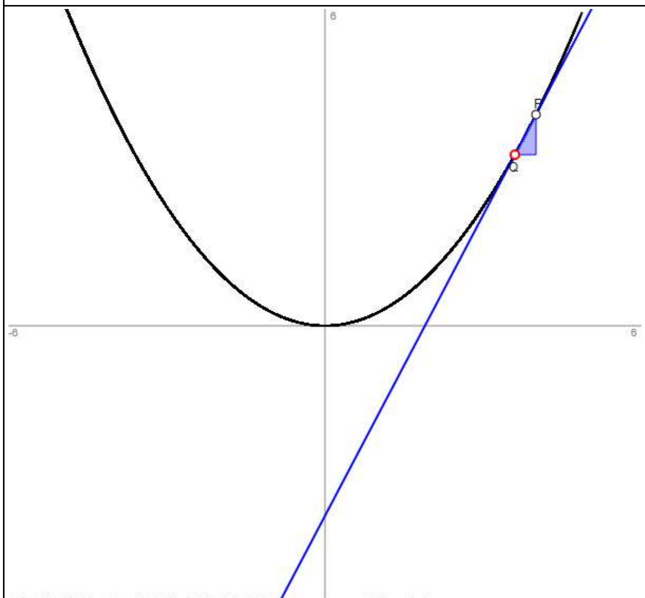

Schritt 6: Punkte P(4|4), Q(2.4|1.44), Sekante y = 1.6x - 2.4,
Sekantensteigung m = 1.6



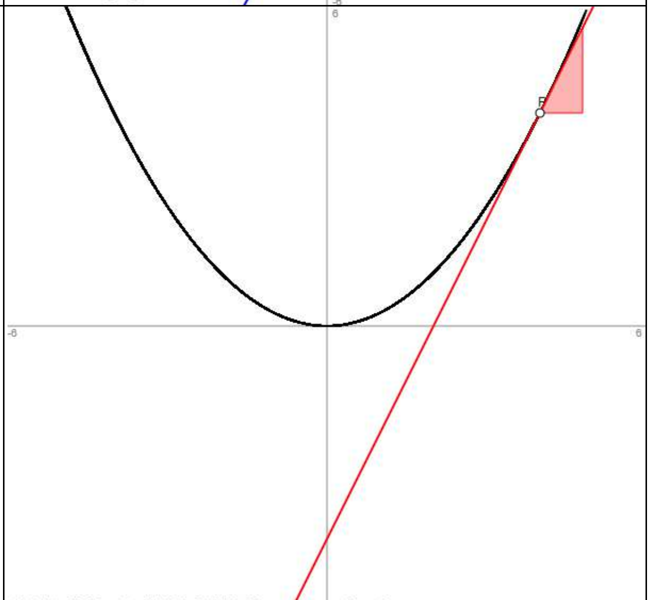

Schritt 7: Punkte P(4|4), Q(2.8|1.96), Sekante y = 1.7x - 2.8,
Sekantensteigung m = 1.7




Schritt 8: Punkte P(4|4), Q(3.2|2.56), Sekante y = 1.8x - 3.2,
Sekantensteigung m = 1.8




Schritt 9: Punkte P(4|4), Q(3.6|3.24), Sekante y = 1.9x - 3.6,
Sekantensteigung m = 1.9



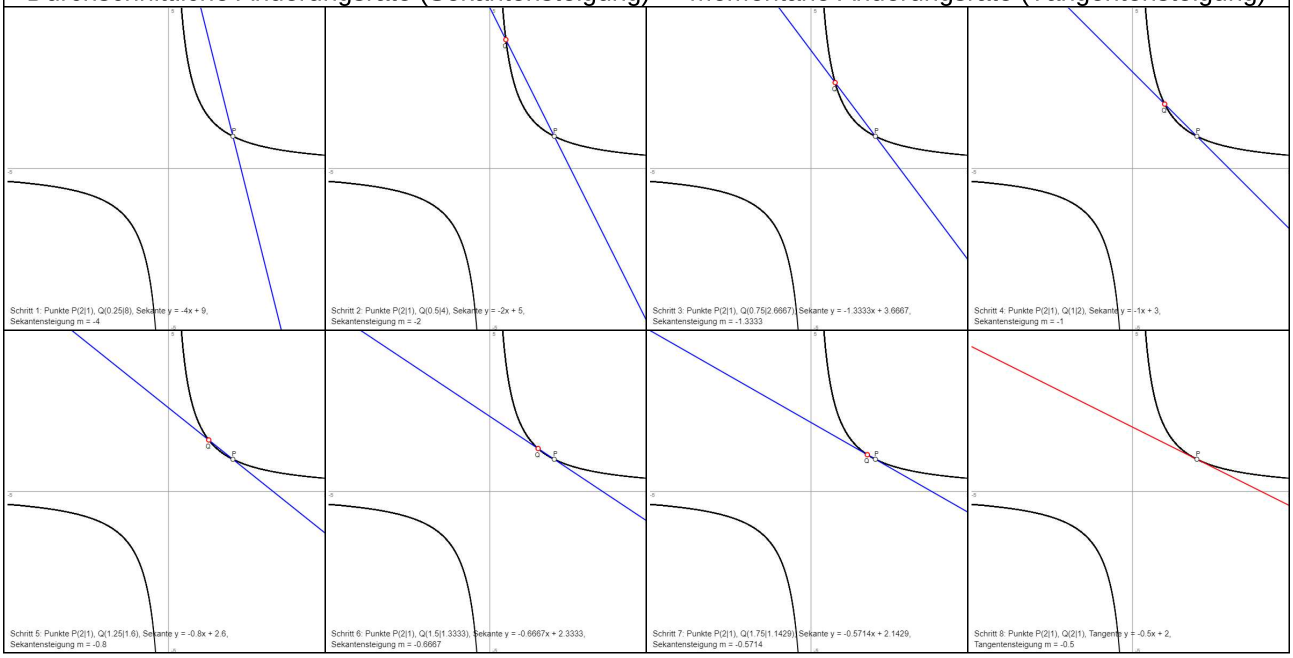

Schritt 10: Punkte P(4|4), Q(4|4), Tangente y = 2x - 4,
Tangentensteigung m = 2

Es ist: f(4) = 4, f‘(4) = 2. Somit ergibt sich für $x_0$ = 4 die Tangentengleichung:

t: y = f‘(4)(x–4) + f(4) = 2(x–4) + 4 = 2x – 8 + 4 = 2x – 4.

b) Die Ableitung der Hyperbelfunktion $f(x) = \frac{2}{x}$ an der Stelle $x_0$ = 2 ist: f‘(2) = -0,5. Geometrisch ergibt sich dies aus dem nachstehenden Grenzprozess:

| Funktion: $f(x) = \frac{2}{x}$, Ableitung an der Stelle $x_0$=2, im Punkt P(2\|1) |
|---|
| Durchschnittliche Änderungsrate (Sekantensteigung) -> momentane Änderungsrate (Tangentensteigung) |




Rechnerisch gilt:

$$f'(2) = \lim_{h->0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h->0} \frac{\frac{2}{2+h} - \frac{2}{2}}{h} = \lim_{h->0} \frac{\frac{2}{2+h} - 1}{h} = \lim_{h->0} \frac{\frac{2}{2+h} - \frac{2+h}{2+h}}{h} =$$

$$\lim_{h->0} \frac{\frac{2-(2+h)}{2+h}}{h} = \lim_{h->0} \frac{\frac{2-2-h}{2+h}}{h} = \lim_{h->0} \frac{\frac{-h}{2+h}}{h} = \lim_{h->0} \frac{\frac{-1}{2+h}}{1} = \lim_{h->0} \frac{-1}{2+h} = \frac{-1}{2+0} = \frac{-1}{2} = -0{,}5.$$

Die Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle P(2|1) lautet wegen f(2) = 1 und f‘(2) = -0,5:

t: y= f‘(2)(x–2) + f(2) = -0,5(x–2) + 1 = -0,5x + 1 + 1 = -0,5x + 2.

c) Eine andere Sichtweise auf Sekanten, die sich einer Tangente an einem bestimmten Punkt einer Funktion annähern, gibt die folgende Situation der Bestimmung der Ableitung bzw. Tangentensteigung f‘(-2) an der Stelle $x_0$ = -2 der Funktion f(x) = $x^2$/5 – x. Gemäß den Ableitungsregeln (Potenz-, Faktor-, Summenregel), die hier Anwendung finden sollen, gilt: f‘(x) = 2x/5 – 1 und damit: f‘(-2) = -4/5 – 1 = -1,8 als Tangentensteigung. Die Gleichung der Tangente lautet auf Grund von f(-2) = 4/5 + 2 = 2,8:

t: y = f‘(-2)(x+2) + f(-2) = -1,8(x+2) + 2,8 = -1,8x – 3,6 + 2,8 = -1,8x – 0,8.

Die Sekanten durch die Punkte P und Q lauten:

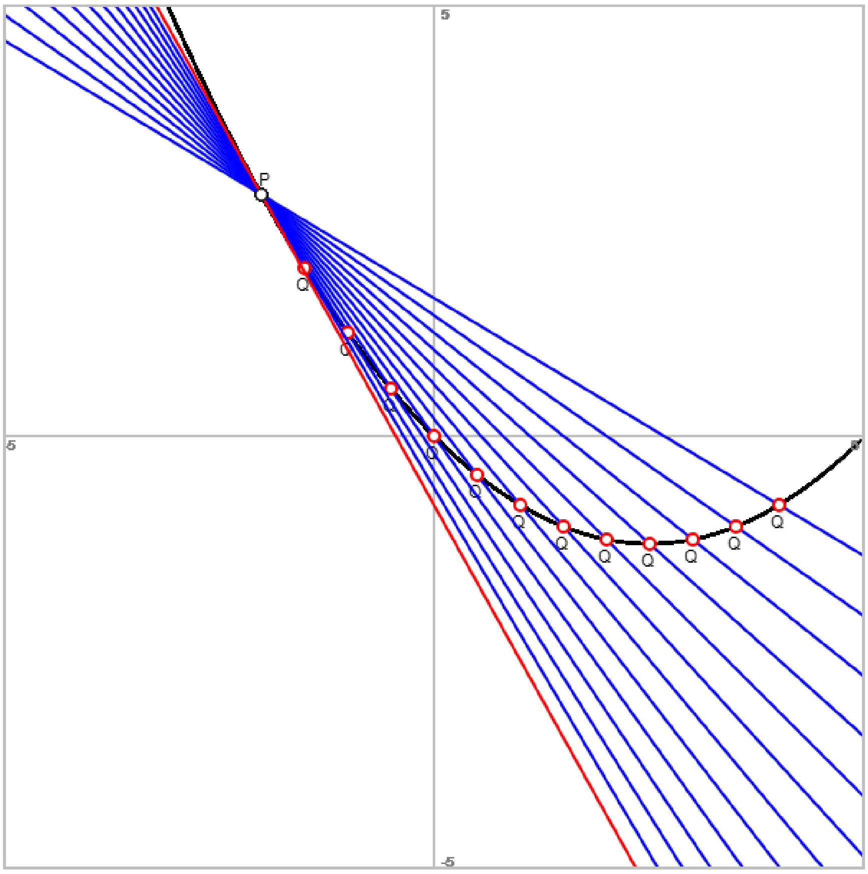
P(-2|2,8), Q(4|-0,8) -> y = -0,6x + 1,6

P(-2|2,8), Q(3,5|-1,05) -> y = -0,7x + 1,4
P(-2|2,8), Q(3|-1,2) -> y = -0,8x + 1,2
P(-2|2,8), Q(2,5|-1,25) -> y = -0,9x + 1
P(-2|2,8), Q(2|-1,2) -> y = -x + 0,8
P(-2|2,8), Q(1,5|-1,05) -> y = -1,1x + 0,6
P(-2|2,8), Q(1|-0,8) -> y = -1,2x + 0,4
P(-2|2,8), Q(0,5|-0,45) -> y = -1,3x + 0,6
P(-2|2,8), Q(0|0) -> y = -1,4x
P(-2|2,8), Q(-0,5|0,55) -> y = -1,5x – 0,2
P(-2|2,8), Q(-1|1,2) -> y = -1,6x – 0,4
P(-2|2,8), Q(-1,5|1,95) -> y = -1,7x – 0,6.

Für die Sekantensteigungen $m_s$ = -0,6, -0,7, … gilt:

Q -> P: $m_s$ -> $m_t$

mit $m_t$ als Tangentensteigung und Ableitung f'(-2) = -1,8.




## Zusammenfassung

Differenzialrechnung ist die mathematische Lehre von den Ableitungen, Ableitungen wiederum übertragen das Konzept von Gerade (y = mx+c) und Geradensteigung (m) auf beliebige (somit) differenzierbare Funktionen f(x) und der Tangente (Tangentensteigung $f'(x_0)$) in einem (beliebigen) Kurvenpunkt $P(x_0|f(x_0))$. Differenzierbarkeit ist damit eine lokale (auf eine Stelle/einen Punkt bezogene) Eigenschaft von Kurven und Funktionen.

Literaturhinweise: PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd.1, Wiesbaden [11]2007, S.308-311 (Ableitung); REINHARDT, F., dtv-Atlas zur Schulmathematik. Definitionen, Beweise, Sätze, München [3]2003, S.120f (Ableitung).