Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Differenziation, Integration

Die Differenzial- und Integralrechnung kreist um den Grenzwertbegriff der Ableitung einer differenzierbaren reellwertigen Funktion f: D_f -> **R** der Form y = f(x) (D_f als Definitionsbereich), d.h. es gilt: Die Ableitung an einer beliebigen Stelle $x\varepsilon D_f$ stellt sich als Grenzwert eines Differenzenquotienten von Sekantensteigungen durch den Punkt P(x|f(x)) gehender Geraden dar:

$$\lim_{x^* -> x} \frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x} = f'(x)$$

und ergibt die Steigung der im Punkt P(x|f(x)) die Funktion f(x) berührenden (eindeutig bestimmten) Tangente (Ableitung als Tangentensteigung). Mit anderen Worten: Aus dem Differenzenquotienten wird die Ableitung als Differenzialquotient, so wie ihn Gottfried Wilhelm Leibniz (*1646-†1716) gegen Isaac Newton (*1643-†1727) entwickelt hat. Für die Ableitung gilt somit:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x -> 0} \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Behandelt man den Differenzialquotienten dy/dx = f'(x) wie einen Bruch, so ergibt sich z.B. der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung aus der Identität:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

durch Multiplikation mit dx:

$$dy = f'(x)dx$$

und Integration mit unbestimmtem Integral (unter Vernachlässigung der Integrationskonstanten) als:

$$\int dy = \int f'(x)dx \ (*).$$

Nun ist das Integral $\int dy$ ein Integral mit der Variablen y, so dass gilt:

$$\int dy = \int 1dy = y = f(x).$$

Die Beziehung (*) wird also zu:

$$f(x) = \int f'(x)dx,$$

womit gezeigt ist, dass das Integrieren die Umkehrung des Differenzierens ist, eben der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt. Differenziation (Ableiten) und Integration (Aufleiten) sind daher mathematisch-analytische Methoden, die in unterschiedlicher und doch sehr ähnlicher Weise auf eine differenzierbare Funktion f(x) angewendet werden können.

Dem entspricht auch die Spiegelbildlichkeit der Ableitungs- und Integrationsregeln:

Ableitungsregeln (Funktionen u(x), v(x)):

$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$ (Summenregel)

$(u(x)+r)' = u'(x)$ (additive Konstante)

$(ku(x))' = ku'(x)$ (multiplikative Konstante)

$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ (Produktregel)

$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$ (Quotientenregel)

$(u(v(x)))' = u'(v(x))\cdot v'(x)$ (Kettenregel)

$(x^n)' = nx^{n-1}$ (Potenzregel)

$((ax+b)^n)' = na(ax+b)^{n-1}$ (Potenzregel)

$(\sin x)' = \cos x$ (Sinusfunktion)

$(\cos x)' = -\sin x$ (Kosinusfunktion)

$(e^x)' = e^x$ (Exponentialfunktion)

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (Natürlicher Logarithmus)

$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$ (Sinusfunktion)

$(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$ (Kosinusfunktion)

$(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$ (Exponentialfunktion)

(reelle Konstanten a, b, k, n, r)

Aufleitungsregeln (Funktionen u(x), v(x)):

$\int(u(x)+v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$ (Summenregel)

$\int(ku(x))dx = k\int u(x)dx$ (multiplikative Konstante)

$\int(u'(x)\cdot v(x))dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx$ (Produktregel)

$\int u(v(x))v'(x)dx = \int u(v(x))dv(x)$ (Substitutionsregel)

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ (Potenzregel, n≠-1)

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$ (Potenzregel)

$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{a}(ax+b)^{n+1}$ (Potenzregel)

$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$ (Potenzregel)

$\int \sin x dx = -\cos x$ (Sinusfunktion)

$\int \cos x dx = \sin x$ (Kosinusfunktion)

$\int e^x dx = e^x$ (Exponentialfunktion)

$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ (Sinusfunktion)

$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin ax+b)$ (Kosinusfunktion)

$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}$ (Exponentialfunktion)

Nicht zuletzt ermöglicht das Differenzieren einer Funktion die Betrachtung des unendlich Kleinen der Ableitung als Tangentensteigung und der Steigung der Funktion in einem Punkt, während Integration die Funktion „global“ in den Blick nimmt. Es gilt daher, zum einen die Tangentengleichung in einem Funktionspunkt $P(x_0|f(x_0))$:

t: $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$,

zum anderen das bestimmte Integral (Fläche, Flächensaldo):

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

mit den Integrationsgrenzen a, b (Intervall [a; b]) und der Stammfunktion F(x) mit F‘(x) = f(x) bzw. $F(x) = \int f(x)dx + C$ (C als Integrationskonstante) betrachten zu können.

Literaturhinweise: dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München [3]2003, S.118-125, 136-147 (Differenziation, Integration); PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd.1, Wiesbaden [11]2007, S.308-311, 398-401, 414ff (Differenziation, Integration)