**Michael Buhlmann**

# Mathematik > Analysis > Ableitungen > Produktregel

Die Differenzialrechnung innerhalb der Analysis reeller Zahlen kreist um den Grenzwertbegriff der Ableitung einer differenzierbaren reellwertigen Funktion f: $D_f$ -> **R** der Form y = f(x) ($D_f$ als Definitionsbereich), d.h. es gilt: Die Ableitung an einer beliebigen Stelle $x\varepsilon D_f$ stellt sich als Grenzwert eines Differenzenquotienten von Sekantensteigungen durch den Punkt P(x|f(x)) gehender Geraden dar:

$$\lim_{x^* -> x} \frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x} = f'(x)$$

und ergibt die Steigung der im Punkt P(x|f(x)) die Funktion f(x) berührenden (eindeutig bestimmten) Tangente (Ableitung als Tangentensteigung). Zu den allgemeinen Ableitungsregeln gehört auch die Produktregel, wonach für zwei differenzierbare Funktionen u(x), v(x) folgt:

$$\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) .$$

Die Produktregel ergibt sich dabei aus den folgenden Überlegungen (Beweis): Die Differenzierbarkeit der Funktionen u(x) und v(x) bedeutet zunächst:

$$\lim_{x^* -> x} \frac{u(x^*) - u(x)}{x^* - x} = u'(x) , \quad \lim_{x^* -> x} \frac{v(x^*) - v(x)}{x^* - x} = v'(x)$$

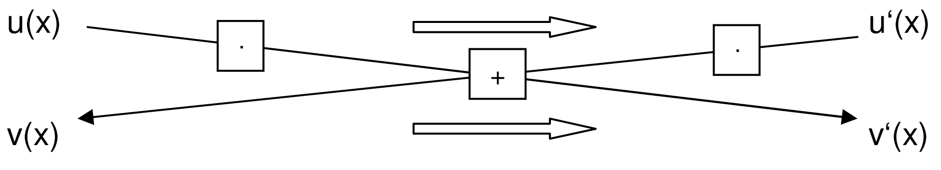
für beliebige Stellen $x\varepsilon D_u \cap D_v$ mit $v(x) \neq 0$. Dann gilt für den Differenzenquotienten der Funktion $\frac{u(x)}{v(x)}$ und den Grenzübergang x*->x:

$$\frac{u(x^*)v(x^*) - u(x)v(x)}{x^* - x} = \frac{u(x^*)v(x^*) - u(x)v(x^*) + u(x)v(x^*) - u(x)v(x)}{x^* - x} =$$

$$\frac{u(x^*)v(x^*) - u(x)v(x^*)}{x^* - x} + \frac{u(x)v(x^*) - u(x)v(x)}{x^* - x} =$$

$$\frac{u(x^*) - u(x)}{x^* - x} v(x^*) + u(x) \frac{v(x^*) - v(x)}{x^* - x} \xrightarrow{x^* -> x} u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

womit die Produktregel für Ableitungen nachgewiesen wurde.
Die Ableitung einer Funktion f(x) = u(x)v(x) kann dann nach folgenden Schema bestimmt werden:




Die Anwendung der Produktregel soll nachstehend beispielhaft erfolgen.

a) Für die Funktion $f(x) = (2x+5) \cdot \sin(x)$ ergibt sich mit u(x) = 2x+5, u‘(x) = 2, v(x) = sin(x), v‘(x) = cos(x) die 1. Ableitung: $f'(x) = 2 \cdot \sin(x) + (2x+5) \cdot \cos(x)$ .

b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 \cos(2x)$. Die 1. Ableitung folgt nach der Produkt- und Kettenregel mit u(x) = $x^3$, u'(x) = $3x^2$, v(x) = cos(2x), v'(x) = -2·sin(2x) (äußere mal innere Ableitung) als: $f'(x) = 3x^2 \cos(2x) - 2x^3 \sin(2x)$.

c) Zur Funktion $f(x) = (x^2 - 4x + 8)e^{0,5x}$ heißt die 1. Ableitung mit u(x) = $x^2$-4x+8, u'(x) = 2x-4, v(x) = $e^{0,5x}$, v'(x) = $0,5e^{0,5x}$ auf Grund von Produkt- und Kettenregel bei Ausklammern des Exponentialterms: $f'(x) = (2x-4)e^{0,5x} + (x^2 - 4x + 8) \cdot 0,5e^{0,5x} = \left((2x-4) + 0,5(x^2 - 4x + 8)\right)e^{0,5x} = 0,5x^2 e^{0,5x}$. Auf die gleiche Weise lassen sich die weiteren Ableitungen bestimmen: f''(x) = $(0,25x^2+x)\cdot e^{0.5x}$, f'''(x) = $(0,125x^2+x+1)\cdot e^{0.5x}$, $f^{(4)}(x) = (0,0625x^2+0,75x+1,5)\cdot e^{0.5x}$, $f^{(5)}(x) = (0,03125x^2+0,5x+1,5)\cdot e^{0.5x}$ usw.

d) Für die Funktion $f(x) = \sin(3x) \cdot e^{-2x}$ ergibt sich wegen: u(x) = sin(3x), u'(x) = 3cos(3x), v(x) = $e^{-2x}$, v'(x) = $-2e^{-2x}$ als 1. Ableitung: $f'(x) = 3\cos(3x) \cdot e^{-2x} + \sin(3x) \cdot (-2e^{-2x}) = \left(3\cos(3x) - 2\sin(3x)\right)e^{-2x}$.

Zum <u>Gebrauch</u> (oder Nicht-Gebrauch) <u>der Produktregel</u> sei noch angemerkt:

a) Sind im Funktionsterm einer Funktion f(x) = u(x)v(x) die Faktoren u(x) und v(x) Summen von Potenzen, so dass eine Ausmultiplikation möglich ist, so ergibt sich mit f(x) wiederum eine Summe von Potenzen, die nach Summen-, Faktor- und Potenzregel ableitbar ist. Die entstehende Ableitung ist von einfacherer Form als die Ableitung über die Produktregel.

b) Statt der Quotientenregel $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$ kann auch die Produktregel für Ableitungen benutzt werden auf Grund von:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(u(x)(v(x))^{-1}\right)' = u'(x)(v(x))^{-1} - u(x)v'(x)(v(x))^{-2} = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x)v'(x)}{((v(x))^2}$$

für zwei differenzierbare Funktionen u(x), v(x). Bei Anwendung der Produktregel wird zusätzlich noch die Kettenregel verwendet, zudem besteht der Ableitungsterm aus zwei Brüchen, was das Rechnen mit diesem schwieriger macht.

Als <u>Beispiele</u> zu dem eben Angemerkten seien genannt:

a) Gegeben ist: $f(x) = x^3(x^2 + 5x - 6)$. Auflösen der Klammer führt auf die ganz rationale Funktion: $f(x) = x^5 + 5x^4 - 6x^3$, deren Ableitung ohne Produktregel leicht zu bestimmen ist: $f'(x) = 5x^4 + 20x^3 - 18x^2$.

b) Eine ähnliche Vorgehensweise ergibt sich bei der Funktion: $f(x) = (3x-4)\sqrt{x}$. Es ist: $f(x) = (3x-4)\sqrt{x} = 3x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} = 3x^{1,5} - 4x^{0,5}$, woraus für die 1. Ableitung folgt: $f'(x) = 3 \cdot 1,5x^{0,5} - 4 \cdot 0,5x^{-0,5} = 4,5x^{0,5} - 2x^{-0,5} = 4,5\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$. Hingegen ist die Produktregel anzuwenden bei: $g(x) = x\sqrt{3x-4}$. Unter Verwendung auch der Kettenregel gilt: u(x) = x, u'(x) = 1, v(x) = $\sqrt{3x-4}$, v'(x) = $\frac{3}{2\sqrt{3x-4}}$; damit folgt für die 1. Ableitung:

$$g'(x) = 1 \cdot \sqrt{3x-4} + x \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x-4}} = \sqrt{3x-4} + \frac{3x}{2\sqrt{3x-4}} = \frac{2(3x-4)+3x}{2\sqrt{3x-4}} = \frac{9x-8}{2\sqrt{3x-4}}.$$

c) Es ist: $f(x) = -\frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{2}x^4 + 4x^3\right) = -x^2 - 8x$ und damit die 1. Ableitung: $f'(x) = -2x - 8$.

d) Zur Funktion $f(x) = x^2(2x-5)^2$ sollen die Punkte mit waagerechter Tangente bestimmt werden. Hierbei ist es günstiger, die Produktregel (und Kettenregel) anzuwenden. Mit $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = (2x-5)^2$, $v'(x) = 4(2x-5)$ gilt für die 1. Ableitung:

$f'(x) = 2x(2x-5)^2 + x^2 \cdot 4(2x-5) = 2x(2x-5)^2 + 4x^2(2x-5) = 2x(2x-5)[(2x-5)+2x] = 2x(2x-5)(4x-5)$.

Die Ableitung ist damit in Produktdarstellung vorhanden, was ihr Nullsetzen und das Auflösen der entstehenden Gleichung nach x erleichtert; denn Stellen x mit waagerechter Tangente bedeuten, dass die Ableitung hier gleich Null sein muss. Es ist:

| | |
|---|---|
| $f'(x) = 2x(2x-5)(4x-5) = 0$ | (Satz vom Nullprodukt) |
| $2x = 0$, $2x-5 = 0$, $4x-5 = 0$ | \| :2 bzw. +5 bzw. +5 |
| $x = 0$, $2x = 5$, $4x = 5$ | \| :2 bzw. :4 |
| $x = 0$, $x = 2{,}5$, $x = 1{,}25$, | |

so dass die P(0|0), Q(1,25|625/64), R(2,5|0) Kurvenpunkte des Funktionsgraphen mit waagerechter Tangente sind.

e) Gemäß der Produktregel $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ gilt für die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3} = x^2(x-4)^{-3}$ die 1. Ableitung:

$$f'(x) = 2x(x-4)^{-3} + x^2 \cdot (-3)(x-4)^{-4} = \frac{2x}{(x-4)^3} - \frac{3x^2}{(x-4)^4}.$$

f) Die Produktregel wird angewendet bei: $f(x) = \frac{x^2+3}{e^{0,5x}} = (x^2+3)e^{-0,5x}$ und führt auf:

$$f'(x) = 2xe^{-0,5x} + (x^2+3)e^{-0,5x} \cdot (-0{,}5) = 2xe^{-0,5x} - 0{,}5(x^2+3)e^{-0,5x} = (-0{,}5x^2 + 2x - 1{,}5)e^{-0,5x}.$$

Literaturhinweise: PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd.1, Wiesbaden [11]2007, S.308-311, 318f (Differenziation, Produktregel); REINHARDT, F., dtv-Atlas Schulmathematik (= dtv 3099), München [3]2003, S.118-125 (Differenziation, Produktregel); REINHARDT, F., SOEDER, H., dtv-Atlas zur Mathematik. Tafeln und Texte, Bd.2: Analysis und angewandte Mathematik (= dtv 3008), München 1977, S.290-293 (Differenziation, Produktregel).

---

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 10.2024