

Produktregel

Eine aus zwei Faktoren  $u(x)$ ,  $v(x)$  gebildete (Produkt-) Funktion  $f(x) = u(x)v(x)$  lässt sich gemäß der Produktregel ableiten vermöge:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Wir setzen nun eine Funktion  $f(x)$  vom Typ

$$f(x) = (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx}$$

mit vorgegebenen reellen Zahlen  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, r \neq 0$  voraus, die Ableitungsfunktion  $f'(x)$  ist vom selben Typ mit:

$$f'(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \cdot e^{rx}$$

mit zu bestimmenden  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Funktion und Ableitungsfunktion enthalten als Faktoren Polynome vom selben Grad  $n$ , so dass  $n+1$   $a_i, i=0, \dots, n$ , zu ermitteln sind. Dazu leiten wir die Funktion  $f(x)$  gemäß der Produktregel ab und erhalten nach obiger Produktregel:

$$f'(x) = (n\alpha_n x^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} + \dots + \alpha_1) \cdot e^{rx} + r(\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx} = \\ (r\alpha_n x^n + (n\alpha_n + r\alpha_{n-1})x^{n-1} + ((n-1)\alpha_{n-1} + r\alpha_{n-2})x^{n-2} + \dots + (\alpha_1 + r\alpha_0)) \cdot e^{rx}$$

und damit eine weitere Darstellung der Funktion  $f'(x)$ .

Beziehungen

Die Polynome in den beiden Funktionstermen von  $f'(x)$  mit:

$$f'(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \cdot e^{rx}$$

$$f'(x) = (r\alpha_n x^n + (n\alpha_n + r\alpha_{n-1})x^{n-1} + ((n-1)\alpha_{n-1} + r\alpha_{n-2})x^{n-2} + \dots + (\alpha_1 + r\alpha_0)) \cdot e^{rx}$$

lassen sich vergleichen, der Koeffizientenvergleich führt auf die folgenden Beziehungen:

$$a_n = r\alpha_n$$

$$a_{n-1} = n\alpha_n + r\alpha_{n-1}$$

$$a_{n-2} = (n-1)\alpha_{n-1} + r\alpha_{n-2}$$

...

$$a_k = (k+1)\alpha_{k+1} + r\alpha_k$$

...

$$a_0 = \alpha_1 + r\alpha_0,$$

also:

$$a_n = r\alpha_n$$

$$a_k = (k+1)\alpha_{k+1} + r\alpha_k, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (*).$$

### Ableitung von Funktionen vom Typ $f(x) = x^n e^{rx}$

Die Funktion  $f(x) = x^n e^{rx}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , soll nun abgeleitet werden. Wegen  $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ ,  $\alpha_n = 1$  ergibt sich gemäß (\*):

$$a_n = r$$

$$a_{n-1} = n$$

$$a_k = 0, \quad k=0, \dots, n-2 \quad (*).$$

D.h., es ist:

$$f'(x) = (rx^n + nx^{n-1})e^{rx}.$$

### Beispiele

a) Zur Funktion  $f(x) = (x^3 + 5x^2 - 6)e^{-x}$  mit  $\alpha_0 = -6$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 5$ ,  $\alpha_3 = 1$ ,  $r = -1$  ergeben sich die gesuchten Koeffizienten im Polynomteil der Ableitungsfunktion:

$$a_3 = -1 \cdot 1 = -1$$

$$a_2 = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 = 3 - 5 = -2$$

$$a_1 = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 = 10$$

$$a_0 = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-6) = 6,$$

so dass  $f'(x) = (-x^3 - 2x^2 + 10x + 6)e^{-x}$  als Ableitung gilt. Die Probe mit Hilfe der Produktregel liefert dasselbe Ergebnis:

$$f(x) = (x^3 + 5x^2 - 6)e^{-x} \rightarrow f'(x) = -(x^3 + 5x^2 - 6)e^{-x} + (3x^2 + 10x)e^{-x} = [-(x^3 + 5x^2 - 6) + (3x^2 + 10x)]e^{-x} = (-x^3 - 2x^2 + 10x + 6)e^{-x}.$$

b) Die Funktion  $f(x) = (x^2 - 2)^2 e^{0,5x}$  soll zweimal abgeleitet werden. Zunächst gilt:  $f(x) = (x^4 - 4x^2 + 4)e^{0,5x}$  mit:  $\alpha_0 = 4$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = -4$ ,  $\alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_4 = 1$ ,  $r = 0,5$  und für die 1. Ableitung  $f'(x)$  gemäß dem nachstehenden Schema zur Koeffizientenbestimmung von  $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ :

Koeffizienten	$r =$	0	$\alpha_4 = 1$	$\alpha_3 = 0$	$\alpha_2 = -4$	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_0 = 4$
$a_4$	0,5		$0 + 0,5 \cdot 1 = 0,5$				
$a_3$	0,5			$4 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0 = 4$			
$a_2$	0,5				$3 \cdot 0 + 0,5 \cdot (-4) = -2$		
$a_1$	0,5					$2 \cdot (-4) + 0,5 \cdot 0 = -8$	
$a_0$	0,5						$1 \cdot 0 + 0,5 \cdot 4 = 2$

und damit:  $f'(x) = (0,5x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x + 2)e^{0,5x}$  (vgl. mit der Probe nach der Produktregel:  $f(x) = (x^4 - 4x^2 + 4)e^{0,5x} \rightarrow f'(x) = 0,5(x^4 - 4x^2 + 4)e^{0,5x} + (4x^3 - 8x)e^{0,5x} = [0,5(x^4 - 4x^2 + 4) + (4x^3 - 8x)]e^{0,5x} = (0,5x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x + 2)e^{0,5x}$ ). Zur Bestimmung der 2. Ableitung und der Koeffizienten  $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$  wird das obige Schema nochmals mit:  $\alpha_0 = 2$ ,  $\alpha_1 = -8$ ,  $\alpha_2 = -2$ ,  $\alpha_3 = 4$ ,  $\alpha_4 = 0,5$ ,  $r = 0,5$  angewendet:

Koeffizienten	r =	0	$\alpha_4 = 0,5$	$\alpha_3 = 4$	$\alpha_2 = -2$	$\alpha_1 = -8$	$\alpha_0 = 2$
$a_4$	0,5		$0 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$				
$a_3$	0,5			$4 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 4 = 4$			
$a_2$	0,5				$3 \cdot 4 + 0,5 \cdot (-2) = 11$		
$a_1$	0,5					$2 \cdot (-2) + 0,5 \cdot (-8) = -8$	
$a_0$	0,5						$1 \cdot (-8) + 0,5 \cdot 2 = -7$

Es ergibt sich damit:  $f''(x) = (0,25x^4 + 4x^3 + 11x^2 - 8x - 7)e^{0,5x}$  (vgl. mit der Probe nach der Produktregel:  $f'(x) = (0,5x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x + 2)e^{0,5x} \rightarrow f''(x) = 0,5(0,5x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x + 2)e^{0,5x} + (2x^3 + 12x^2 - 4x)e^{0,5x} = [0,5(0,5x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x + 2) + (2x^3 + 12x^2 - 4x)]e^{0,5x} = (0,25x^4 + 4x^3 + 11x^2 - 8x - 7)e^{0,5x}$ ).

### Höhere Ableitungen

Beispiel b) führt noch auf die Rekursion für höhere Ableitungen. Sei dazu wieder die Funktion vom Typ

$$f(x) = (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx}$$

mit vorgegebenen reellen Zahlen  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, r \neq 0$  gegeben. Dann ergibt sich ein rekursives Verfahren zur Bestimmung der ersten m Ableitungen wie folgt:

Rekursionsanfang:

$$a_k^{(0)} = \alpha_k, k = 0, \dots, n$$

Rekursion:

$$a_n^{(j)} = r a_n^{(j-1)} = r^j a_n^{(0)}$$

$$a_k^{(j)} = (k+1) a_{k+1}^{(j-1)} + r a_k^{(j-1)}, k = 0, \dots, n-1 \rightarrow f^{(j)}(x) = (a_n^{(j)} x^n + a_{n-1}^{(j)} x^{n-1} + \dots + a_1^{(j)} x + a_0^{(j)}) \cdot e^{rx}, j = 1, \dots, m.$$

### Beispiel

c) Mit der eben dargelegten Rekursion lassen sich nach dem Schema in Beispiel b) die ersten fünf Ableitungen zu  $f(x) = (x^2 + x + 8)e^{2x}$  wie folgt bestimmen:

j = 1:							
Koeffizienten	r =	0	$a_2^{(j-1)} = 1$	$a_1^{(j-1)} = 1$	$a_0^{(j-1)} = 8$		
$a_2^{(j)}$	2		$0 + 2 \cdot 1 = 2$				
$a_1^{(j)}$	2			$2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4$			
$a_0^{(j)}$	2				$1 \cdot 1 + 2 \cdot 8 = 17$		
$f'(x) = (2x^2 + 4x + 17)e^{2x}$							
j = 2:							
Koeffizienten	r =	0	$a_2^{(j-1)} = 2$	$a_1^{(j-1)} = 4$	$a_0^{(j-1)} = 17$		
$a_2^{(j)}$	2		$0 + 2 \cdot 2 = 4$				
$a_1^{(j)}$	2			$2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 12$			
$a_0^{(j)}$	2				$1 \cdot 4 + 2 \cdot 17 = 38$		
$f''(x) = (4x^2 + 12x + 38)e^{2x}$							

j = 3:					
Koeffizienten	r =	0	$a_2^{(j-1)} = 4$	$a_1^{(j-1)} = 12$	$a_0^{(j-1)} = 38$
$a_2^{(j)}$	2		$0 + 2 \cdot 4 = 8$		
$a_1^{(j)}$	2			$2 \cdot 4 + 2 \cdot 12 = 32$	
$a_0^{(j)}$	2				$1 \cdot 12 + 2 \cdot 38 = 88$
$f^{(3)}(x) = (8x^2 + 32x + 88)e^{2x}$					
j = 4:					
Koeffizienten	r =	0	$a_2^{(j-1)} = 8$	$a_1^{(j-1)} = 32$	$a_0^{(j-1)} = 88$
$a_2^{(j)}$	2		$0 + 2 \cdot 8 = 16$		
$a_1^{(j)}$	2			$2 \cdot 8 + 2 \cdot 32 = 80$	
$a_0^{(j)}$	2				$1 \cdot 32 + 2 \cdot 88 = 208$
$f^{(4)}(x) = (16x^2 + 80x + 208)e^{2x}$					
j = 5:					
Koeffizienten	r =	0	$a_2^{(j-1)} = 16$	$a_1^{(j-1)} = 80$	$a_0^{(j-1)} = 208$
$a_2^{(j)}$	2		$0 + 2 \cdot 16 = 32$		
$a_1^{(j)}$	2			$2 \cdot 16 + 2 \cdot 80 = 192$	
$a_0^{(j)}$	2				$1 \cdot 80 + 2 \cdot 208 = 496$
$f^{(5)}(x) = (32x^2 + 192x + 496)e^{2x}$					

### Berechnungsschema

Auf der Grundlage der Funktion vom Typ  $f(x) = (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx}$  mit vorgegebenen reellen Zahlen  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, r \neq 0$  und der Ableitung  $f'(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \cdot e^{rx}$  ergibt sich gemäß den oben durchgerechneten Beispielen als Berechnungsschema:

										$f(x) = (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx}$
Koeffizienten	r =	0	$\alpha_n$	$\alpha_{n-1}$	...	$\alpha_k$	$\alpha_{k-1}$	...	$\alpha_1$	$\alpha_0$
$a_n$	r		$(n+1) \cdot 0 + r\alpha_n = r\alpha_n = a_n$							
$a_{n-1}$	r		$n\alpha_n + r\alpha_{n-1} = a_{n-1}$							
...					...					
$a_k$	r					$(k+1)\alpha_{k+1} + r\alpha_k = a_k$				
$a_{k-1}$	r					$k\alpha_k + r\alpha_{k-1} = a_{k-1}$				
...								...		
$a_1$	r								$2\alpha_2 + r\alpha_1 = a_1$	
$a_0$	r									$1\alpha_1 + r\alpha_0 = a_0$
										$f'(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \cdot e^{rx}$