

Die Differentialrechnung innerhalb der Analysis reeller Zahlen kreist um den Grenzwertbegriff der Ableitung einer differenzierbaren reellwertigen Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ der Form $y = f(x)$ (D_f als Definitionsbereich), d.h. es gilt: Die Ableitung an einer beliebigen Stelle $x \in D_f$ stellt sich als Grenzwert eines Differenzenquotienten von Sekantensteigungen durch den Punkt $P(x|f(x))$ gehender Geraden dar:

$$\lim_{x^* \rightarrow x} \frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x} = f'(x)$$

und ergibt die Steigung der im Punkt $P(x|f(x))$ die Funktion $f(x)$ berührenden (eindeutig bestimmten) Tangente (Ableitung als Tangentensteigung). Zu den allgemeinen Ableitungsregeln gehört auch die Quotientenregel, wonach für zwei differenzierbare Funktionen $u(x)$, $v(x)$ folgt:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

Die Quotientenregel ergibt sich dabei aus den folgenden Überlegungen (Beweis): Die Differenzierbarkeit der Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ bedeutet zunächst:

$$\lim_{x^* \rightarrow x} \frac{u(x^*) - u(x)}{x^* - x} = u'(x), \quad \lim_{x^* \rightarrow x} \frac{v(x^*) - v(x)}{x^* - x} = v'(x)$$

für beliebige Stellen $x \in D_u \cap D_v$ mit $v(x) \neq 0$. Dann gilt für den Differenzenquotienten der Funktion $\frac{u(x)}{v(x)}$ und den Grenzübergang $x^* \rightarrow x$:

$$\begin{aligned} \frac{u(x^*)}{v(x^*)} - \frac{u(x)}{v(x)} &= \frac{u(x^*)v(x) - u(x)v(x^*)}{v(x^*)v(x)} = \frac{u(x^*)v(x) - u(x)v(x^*)}{v(x^*)v(x)(x^* - x)} \\ &= \frac{(u(x^*) - u(x))v(x) + u(x)v(x) - u(x)(v(x^*) - v(x)) - u(x)v(x)}{v(x^*)v(x)(x^* - x)} = \\ &= \frac{(u(x^*) - u(x))v(x) - u(x)(v(x^*) - v(x))}{v(x^*)v(x)(x^* - x)} = \frac{(u(x^*) - u(x))v(x) - u(x)(v(x^*) - v(x))}{x^* - x} \cdot \frac{1}{v(x^*)v(x)} \\ &\xrightarrow{x^* \rightarrow x} \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \end{aligned}$$

womit die Quotientenregel für Ableitungen nachgewiesen wurde.

Die Anwendung der Quotientenregel soll nachstehend beispielhaft erfolgen. Dabei ist zu beachten, dass beim aus der Quotientenregel resultierenden Bruch der Zähler vereinfacht werden sollte, während das Quadrat im Nenner bestehen bleibt.

a) Für die gebrochene rationale Funktion $f(x) = \frac{2x+5}{3x-4}$ ergibt sich mit $u(x)=2x+5$, $u'(x)=2$,

$$v(x)=3x-4, v'(x)=3 \text{ die 1. Ableitung: } f'(x) = \frac{2 \cdot (3x-4) - (2x+5) \cdot 3}{(3x-4)^2} = \frac{-23}{(3x-4)^2}, x \neq 4/3.$$

b) Ebenfalls gebrochen rational ist die Funktion $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3}$ mit $D_f = \mathbb{R}$. Die 1. Ableitung folgt nach der Quotientenregel mit $u(x)=x^3$, $u'(x)=3x^2$, $v(x)=x^2+3$, $v'(x)=2x$ als:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2+3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{3x^4 + 9x^2 - 2x^4}{(x^2+3)^2} = \frac{x^4 + 9x^2}{(x^2+3)^2}. \text{ Die Ableitung hat an der}$$

$$\text{Stelle } x_0=2 \text{ den Wert: } f'(2) = \frac{2^4 + 9 \cdot 2^2}{(2^2+3)^2} = \frac{52}{49}.$$

c) Die Ableitung der Tangensfunktion $f(x) = \tan x$ erhält man auf Grund der Definition des

Tangens als $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ nach der Quotientenregel mit $u(x)=\sin(x)$, $u'(x)=\cos(x)$,

$$v(x)=\cos(x), v'(x)=-\sin(x): f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2}, \text{ woraus}$$

$$\text{folgt: } f'(x) = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2} + \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2 \text{ oder:}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} \text{ auf Grund der trigonometrischen Beziehung:}$$

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1.$$

d) Für $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ergibt sich mit $u(x)=x$, $u'(x)=1$, $v(x)=x^2+1$, $v'(x)=2x$ nach der

$$\text{Quotientenregel die 1. Ableitung: } f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \text{ woraus auf Grund}$$

von:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

die Stellen $x_1=-1$ und $x_2=1$ als Stellen mit waagerechter Tangente folgen.

e) Zur Exponentialfunktion $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+2}$ heißt die 1. Ableitung mit $u(x)=e^{2x}$, $u'(x)=2e^{2x}$,

$$v(x)=e^x+2, v'(x)=e^x: f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x+2) - e^{2x} \cdot e^x}{(e^x+2)^2} = \frac{2e^{3x} + 4e^{2x} - e^{3x}}{(e^x+2)^2} = \frac{e^{3x} + 4e^{2x}}{(e^x+2)^2}. \text{ Auf}$$

Grund der allgemeinen Tangentenformel $t: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ für einen Funktionenpunkt $P(x_0|f(x_0))$ ergibt sich mit $x_0=0$, $f(0)=0,5$, $f'(0)=5/9$:

$$t: y = f'(0)(x-0)+f(0) = \frac{5}{9}x + \frac{1}{2}.$$

f) I. Zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten der gebrochen rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{4x^3 - x}{x^2 - 4} \text{ sind die ersten drei Ableitungen zu berechnen:}$$

$$f'(x) = 4 + \frac{15(x^2-4) - 15x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 4 + \frac{-15x^2 - 60}{(x^2-4)^2} = 4 - \frac{15x^2 + 60}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{30x(x^2-4)^2 - (15x^2+60) \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = -\frac{30x(x^2-4) - (15x^2+60) \cdot 4x}{(x^2-4)^3} =$$

$$-\frac{30x^3 - 120x - 60x^3 - 240x}{(x^2-4)^3} = -\frac{-30x^3 - 360x}{(x^2-4)^3} = \frac{30x^3 + 360x}{(x^2-4)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{(90x^2 + 360)(x^2-4)^3 - (30x^3 + 360x) \cdot 3(x^2-4)^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^6} =$$

$$\frac{(90x^2 + 360)(x^2-4) - (30x^3 + 360x) \cdot 6x}{(x^2-4)^4} = \frac{90x^2 + 360}{(x^2-4)^3} - \frac{(30x^3 + 360x) \cdot 6x}{(x^2-4)^4}$$

II. Die Hoch- und Tiefpunkte ermitteln sich wie folgt: Notwendige Bedingung:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{15x^2 + 60}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{15x^2 + 60}{(x^2 - 4)^2} \Leftrightarrow 4(x^2 - 4)^2 = 15x^2 + 60 \Leftrightarrow$$

$$4(x^4 - 8x^2 + 16) = 15x^2 + 60 \Leftrightarrow 4x^4 - 32x^2 + 64 = 15x^2 + 60 \Leftrightarrow 4x^4 - 47x^2 + 4 = 0$$

Die biquadratische Gleichung ist mit der Substitution $z = x^2$ zu lösen:

$$4z^2 - 47z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{47 \pm \sqrt{47^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{47 \pm 46,3}{8} \Leftrightarrow z = 11,66, z = 0,09.$$

Rücksubstitution ergibt:

$$x^2 = 11,66, x^2 = 0,09 \Leftrightarrow x = \pm 3,41, x = \pm 0,3.$$

Die vier Werte stellen mögliche Hoch- und Tiefpunkt von $f(x)$ dar. Also hinreichende Bedingung:

$f''(-3,41) < 0 \Rightarrow H_1(-3,41|20,35)$ als Hochpunkt

$f''(-0,3) > 0 \Rightarrow T_1(-0,3|-0,007)$ als Tiefpunkt

$f''(0,3) < 0 \Rightarrow H_2(0,3|0,007)$ als Hochpunkt

$f''(3,41) < 0 \Rightarrow T_2(3,41|20,35)$ als Tiefpunkt.

III. Für die Wendepunkte gilt: Notwendige Bedingung:

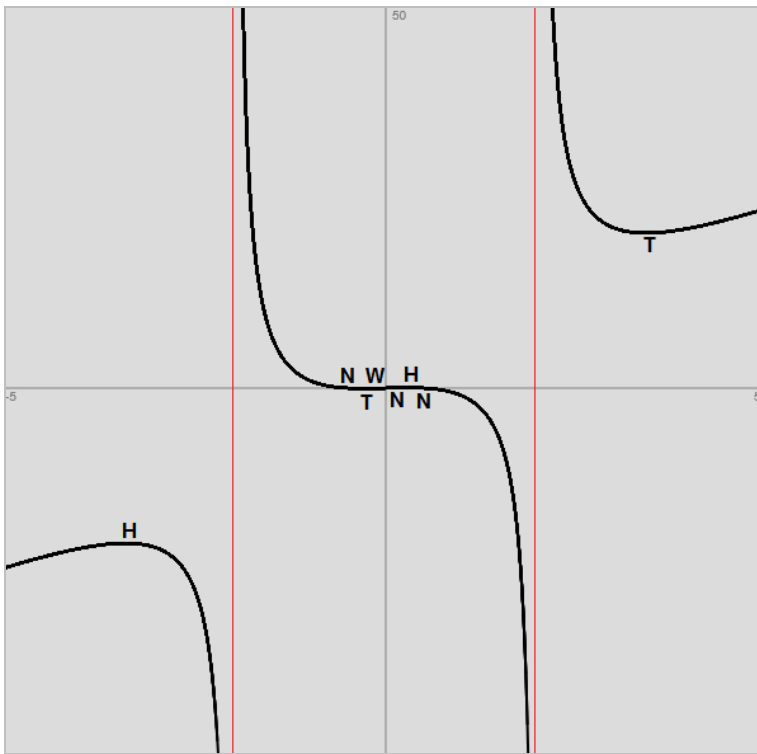
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{30x^3 + 360x}{(x^2 - 4)^3} = 0 \Leftrightarrow 30x^3 + 360x = 0 \Leftrightarrow 30x(x^2 + 120) = 0 \Leftrightarrow$$

$$30x = 0, [x^2 + 120 = 0] \Leftrightarrow x=0$$

Hinreichende Bedingung: $f'''(0) = \frac{0 + 360}{(0 - 4)^3} - 0 = -\frac{360}{64} \neq 0 \Rightarrow W(0|0)$ als Wendepunkt.

IV. Wertetabelle, Graph:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3.42	-20.3455	0.03	-5.33	Hochpunkt H(-3.42 -20.35)
-2	-Infinity	75003.53	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -2
-0.5	0	-0.53	3.48	Nullstelle N(-0.5 0)
-0.3	-0.0491	-0.01	1.82	Tiefpunkt T(-0.3 -0.05)
0	0	0.25	0	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt S _y (0 0) = Wendepunkt W(0 0)
0.29	0.0491	0	-1.75	Hochpunkt H(0.29 0.05)
0.5	0	-0.53	-3.48	Nullstelle N(0.5 0)
2	Infinity	75003.53	-Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = 2
3.41	20.3455	-0.03	5.45	Tiefpunkt T(3.41 20.35)



Zum Gebrauch (oder Nicht-Gebrauch) der Quotientenregel sei noch angemerkt:

a) Statt der Quotientenregel kann auch die Produktregel für Ableitungen benutzt werden auf Grund von:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(u(x)(v(x))^{-1}\right)' = u'(x)(v(x))^{-1} - u(x)v'(x)(v(x))^{-2} = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

für zwei differenzierbare Funktionen $u(x)$, $v(x)$. Bei Anwendung der Produktregel wird zusätzlich noch die Kettenregel verwendet, zudem besteht der Ableitungsterm aus zwei Brüchen, was das Rechnen mit diesem schwieriger macht.

b) Der Gebrauch der Quotientenregel kann bei konstantem Zähler $u(x) = a$ und unter Anwendung der Kettenregel vermieden werden:

$$f(x) = \frac{a}{v(x)} = a(v(x))^{-1} \text{ mit: } f'(x) = -\frac{av'(x)}{(v(x))^2},$$

$$f(x) = \frac{a}{(v(x))^n} = a(v(x))^{-n} \text{ mit: } f'(x) = -\frac{anv'(x)}{(v(x))^{n+1}}.$$

c) Ebenfalls kann die Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n durch Anwendung von Summen- und Potenzregel ersetzt werden:

$$f(x) = \frac{a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0}{x^n} = a_m x^{m-n} + \dots + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}.$$

d) Bei Nennern vom Typ e^{ax} u.ä. und Anwendung der Produktregel (mit Ausklammern von e^{-ax} u.ä.) statt der Quotientenregel gilt:

$$f(x) = \frac{u(x)}{e^{ax}} = u(x) \cdot e^{-ax} \text{ mit: } f'(x) = u'(x) \cdot e^{-ax} - au(x) \cdot e^{-ax} = (u'(x) - au(x)) \cdot e^{-ax}.$$

f) Nach Anwendung der Quotientenregel ist unter Umständen ein Kürzen der Ableitung erforderlich:

$$f(x) = \frac{u(x)}{(v(x))^n} \text{ mit: } f'(x) = \frac{u'(x)(v(x))^n - u(x)n(v(x))^{n-1}v'(x)}{(v(x))^{2n}} = \frac{u'(x)v(x) - nu(x)v'(x)}{(v(x))^{n+1}}.$$

Als Beispiele zu dem eben Angemerkten seien genannt:

a) Gemäß der Produktregel $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ gilt für die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{x^2}{(x-4)^3} = x^2(x-4)^{-3}$ die 1. Ableitung:

$$f'(x) = 2x(x-4)^{-3} + x^2 \cdot (-3)(x-4)^{-4} = \frac{2x}{(x-4)^3} - \frac{3x^2}{(x-4)^4}.$$

b) Als 1. Ableitung zur Funktion $f(x) = \frac{10}{x^4 + 5} = 10(x^4 + 5)^{-1}$ ergibt sich nach der Kettenregel $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ (äußere Ableitung mal innere Ableitung):

$$f'(x) = 10 \cdot (-1)(x^4 + 5)^{-2} \cdot 4x^3 = -40x^3(x^4 + 5)^{-2} = \frac{-40x^3}{(x^4 + 5)^2}.$$

c) Die Funktion $f(x)$ wird zunächst zu einer Summe von Potenzen umgeformt:

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 8}{x^3} = \frac{2x^4}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{8}{x^3} = 2x - \frac{1}{x} + \frac{8}{x^3} = 2x - x^{-1} + 8x^{-3},$$

so dass nach der Potenzregel für das Ableiten gilt:

$$f'(x) = 2 + x^{-2} - 24x^{-4} = 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{24}{x^4}.$$

d) Die Produktregel wird angewendet bei: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{e^{0,5x}} = (x^2 + 3)e^{-0,5x}$ und führt auf:

$$f'(x) = 2xe^{-0,5x} + (x^2 + 3)e^{-0,5x} \cdot (-0,5) = 2xe^{-0,5x} - 0,5(x^2 + 3)e^{-0,5x} = (-0,5x^2 + 2x - 1,5)e^{-0,5x}.$$

e) Die Anwendung der Quotientenregel ergibt für $f(x) = \frac{5x+1}{(2x-1)^2}$ die 1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{5(2x-1)^2 - (5x+1) \cdot 2(2x-1) \cdot 2}{(2x-1)^4} = \frac{5(2x-1) - 4(5x+1)}{(2x-1)^3} = \frac{-10x-9}{(2x-1)^3}, \text{ wenn man Zähler und Nenner durch den Faktor } (2x-1) \text{ kürzt.}$$

Literaturhinweise: PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd.1, Wiesbaden ¹¹2007, S.308-311, 320f (Differenziation, Quotientenregel); REINHARDT, F., dtv-Atlas Schulmathematik (= dtv 3099), München ³2003, S.118-125 (Differenziation, Quotientenregel); REINHARDT, F., SOEDER, H., dtv-Atlas zur Mathematik. Tafeln und Texte, Bd.2: Analysis und angewandte Mathematik (= dtv 3008), München 1977, S.290-293 (Differenziation, Quotientenregel).