Mathematik > Analysis > Fourierreihen

Problemstellung

Eine 2π-periodische, auf dem Intervall [0, 2π] stückweise definierte, stetige und monotone Funktion f(x) mit endlich vielen Sprungstellen soll in eine Fourierreihe, also in eine unendliche trigonometrische Reihe der Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

entwickelt werden. Die Fourier-Koeffizienten der Reihe berechnen sich dann als:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \,,\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx \,,\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx$$

Dabei gilt für eine gerade Funktion f(x) (also mit f(-x) = f(x)) die Darstellung:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \,,\; b_n = 0 \,,$$

für eine ungerade Funktion f(x) (also mit f(-x) = -f(x)):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \,,\; a_n = 0 \,.$$

Für eine T-periodische Funktion f(x) ergibt sich aus dem Intervall: 0 ≤ x ≤ T durch Multiplikation der Ungleichungen mit $\frac{2\pi}{T}$: 0 ≤ $\frac{2\pi}{T}$x ≤ 2π. Setzen wir ω = $\frac{2\pi}{T}$ und z(x) = z = ωx, so lässt sich für f(z) = f(z(x)) die oben vorgestellte Entwicklung in eine Fourierreihe durchführen. Transformation der Integrale wegen x(z) = $\frac{1}{\omega}$z und x'(z) = $\frac{dx}{dz}$ = $\frac{T}{2\pi}$ mit: dx = $\frac{T}{2\pi}$dz ergibt dann gemäß der Substitutionsregel:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)dz = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{T}\int_0^{2\pi} f(z)\cdot\frac{T}{2\pi}dz = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)dx$$

usw. Somit gilt im Falle der T-Periodizität:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] \,,\; \omega = \frac{2\pi}{T}$$

mit:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)dx \,,\; a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\cdot\cos(n\omega x)dx \,,\; b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\cdot\sin(n\omega x)dx$$

Für gerade bzw. ungerade T-periodische Funktionen gibt es dann noch Symmetrien innerhalb der a_n und b_n bestimmenden Integrale. Ist f(x) gerade, so verschwinden, wie oben gesehen, alle b_n = 0, und es gilt für a_n-Integrale wegen der Achsensymmetrie des Integranden $f(x)\cdot\cos(n\omega x)$ um y = $\frac{T}{2}$:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos(n\omega x)dx = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cdot\cos(n\omega x)dx \ .$$

Analog gilt für ungerade T-periodische Funktionen mit $a_n = 0$:

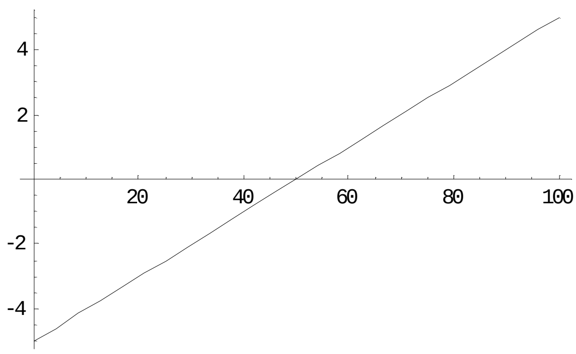
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\sin(n\omega x)dx = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cdot\sin(n\omega x)dx \ .$$

Beispiele

Beispiel 1: Die Sägezahnfunktion f(t) mit Periode T = 100 verlaufe zwischen -5 und +5. Es gilt also wegen den das Geradenteilstück begrenzenden Punkten P(0|-5) und Q(100|5) und auf Grund der Zweipunkteform für Geradengleichungen:

$$\frac{f(t)-(-5)}{t-0} = \frac{5-(-5)}{100-0} \Leftrightarrow \frac{f(t)+5}{t} = \frac{10}{100} \Leftrightarrow \frac{f(t)+5}{t} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow f(t)+5 = \frac{1}{10}t \Leftrightarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{10}t-5 = 0{,}1t-5, \ 0 \le t \le 100$$



Basisfunktion: $f(t) = 0{,}1t-5$**, 0 < t < 100**

Die stückweise auf Intervalle der Länge 100 definierte Funktion f(t) ist dann ungerade, so dass bzgl. der Fourierreihe die Koeffizienten nach dem folgenden Muster zu berechnen sind:

$$a_0 = 0, \ a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin(n\omega t)dt$$

Wir bilden zunächst die Stammfunktion S(t) des Integrals:

$$S(t) = \int f(t)\sin(nwt)dt = \int(0{,}1t-5)\sin(n\omega t)dt = 0{,}1\int t\sin(nwt)dt - 5\int\sin(n\omega t)dt =$$

$$0{,}1\cdot\frac{\sin(n\omega t)}{n^2\omega^2} - 0{,}1\cdot\frac{t\cos(n\omega t)}{n\omega} + 5\cdot\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}$$

Dann ergeben sich mit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{100} = \frac{\pi}{50}$ die b_n als:

$$b_n = \frac{4}{100}\int_0^{50} f(t)\cdot\sin(n\omega t)dt = \frac{1}{25}\left[0{,}1\cdot\frac{\sin(n\omega t)}{n^2\omega^2} - 0{,}1\cdot\frac{t\cos(n\omega t)}{n\omega} + 5\cdot\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{50} =$$

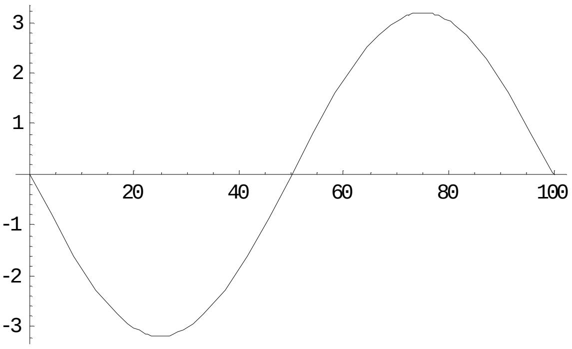
$$\frac{1}{25}\left[\left(0{,}1\cdot\frac{\sin(n\pi)}{n^2\omega^2} - 0{,}1\cdot\frac{50\cdot\cos(n\pi)}{n\omega} + 5\cdot\frac{\cos(n\pi)}{n\omega}\right) - \left(0{,}1\cdot\frac{\sin(0)}{n^2\omega^2} - 0{,}1\cdot\frac{0\cdot\cos(0)}{n\omega} + 5\cdot\frac{\cos(0)}{n\omega}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{25}\left[0+0-0+0-\frac{5}{n\omega}\right] = -\frac{1}{5n\omega} = -\frac{50}{5n\pi} = -\frac{10}{\pi n}$$

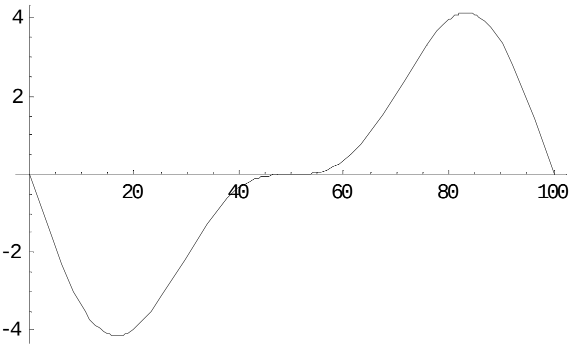
Die Fourierreihe zu f(t) lautet also:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{10}{\pi n} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{50} t \right) = -\frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{50} t \right).$$

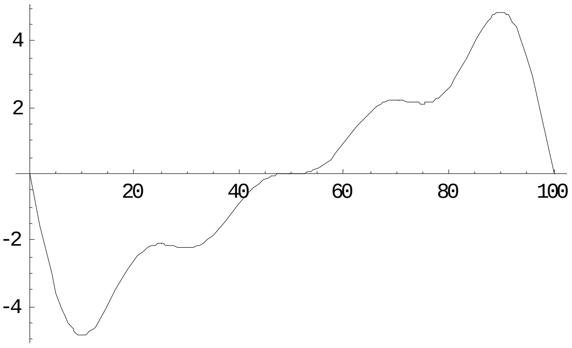
r=1:



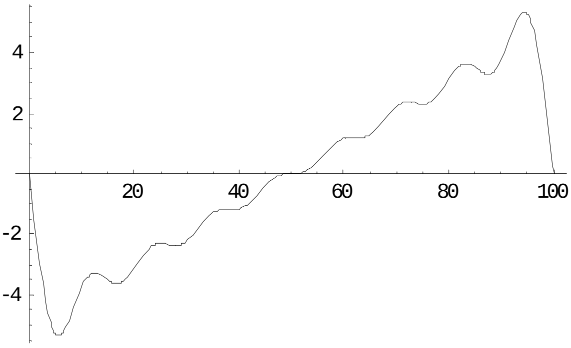
r=2:



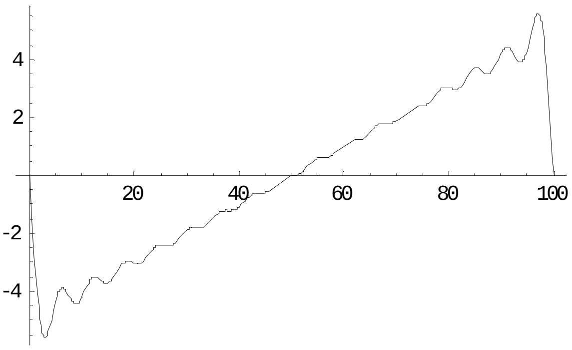
r=4:



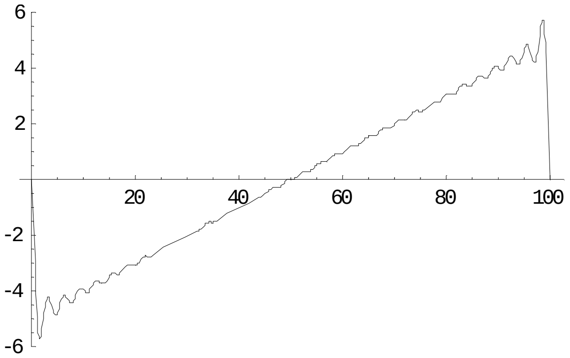
r=8:



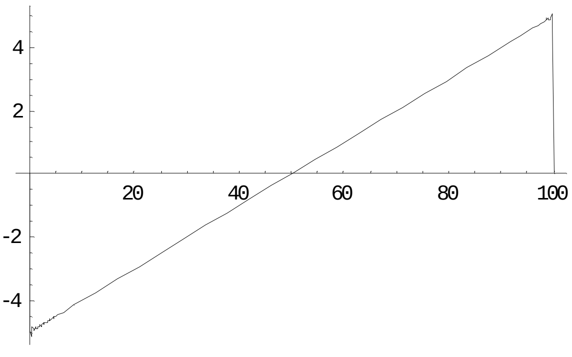
r=16:



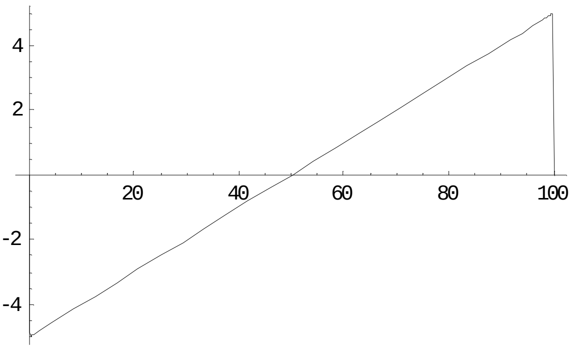
r=32:



r=1024:



r=4096:

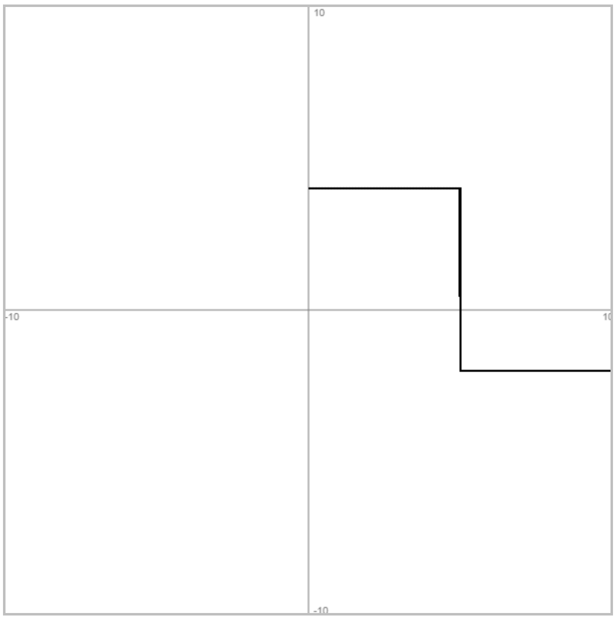


Fouriersummen: $f_r(t) = -\frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{r} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{50} t \right)$

Beispiel 2: Gegeben ist die T-periodische Rechteckfunktion

$$f(t) = \begin{cases} 4 & 0 < t < 5 \\ -2 & 5 < t < 10 \end{cases}$$

mit Periode T = 10.



Basisfunktion: f(t) = 4, **0<t<5**, = -2, **5<t<10**

Die Funktion f(t) ist weder gerade noch ungerade. Wir berechnen also a_0 mit:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{10}\left[\int_0^5 4dt + \int_5^{10}(-2)dt\right] = \frac{4}{5}\int_0^5 dt - \frac{2}{5}\int_5^{10} dt = \frac{4}{5}\cdot[t]_0^5 - \frac{2}{5}[t]_5^{10} = \frac{4}{5}\cdot 5 - \frac{2}{5}\cdot 5 = 2$$

Wir berechnen a_n als:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{2}{10}\cdot\left[4\cdot\int_0^5 \cos\left(n\frac{2\pi}{10}t\right)dt - 2\cdot\int_5^{10}\cos\left(n\frac{2\pi}{10}t\right)dt\right] =$$

$$\frac{4}{5}\cdot\left[\frac{5}{\pi n}\sin\left(n\frac{\pi}{5}t\right)\right]_0^5 - \frac{2}{5}\cdot\left[\frac{5}{\pi n}\sin\left(n\frac{\pi}{5}t\right)\right]_5^{10} = 0 - 0 = 0$$

Wir berechnen b_n als:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{2}{10}\cdot\left[4\cdot\int_0^5 \sin\left(n\frac{2\pi}{10}t\right)dt - 2\cdot\int_5^{10}\sin\left(n\frac{2\pi}{10}t\right)dt\right] =$$

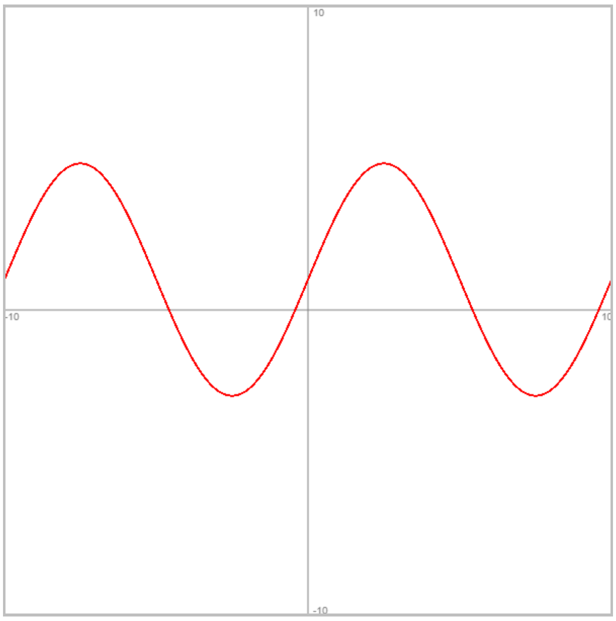
$$\frac{4}{5}\cdot\left[-\frac{5}{\pi n}\cos\left(n\frac{\pi}{5}t\right)\right]_0^5 - \frac{2}{5}\cdot\left[-\frac{5}{\pi n}\cos\left(n\frac{\pi}{5}t\right)\right]_5^{10} = -\frac{4}{\pi n}((-1)^n - 1) + \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n) = \frac{6}{\pi n}(1-(-1)^n)$$

Wir folgern daraus: $b_n = 0$ für gerades n, $b_n = \frac{12}{\pi n}$ für ungerades n. Die Transformation n -> 2n-1 führt dann zur Reihendarstellung:

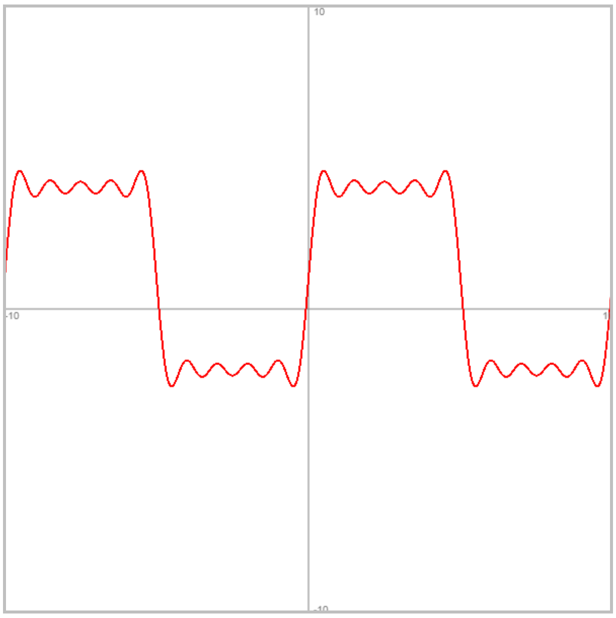
$$f(t) = \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{\pi(2n-1)}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{5}t\right) = 1 + \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{5}t\right).$$

Es ergeben sich die Fouriersummen: $f_r(t) = 1 + \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{(2n-1)}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{5}t\right)$ der nachstehenden Graphen.

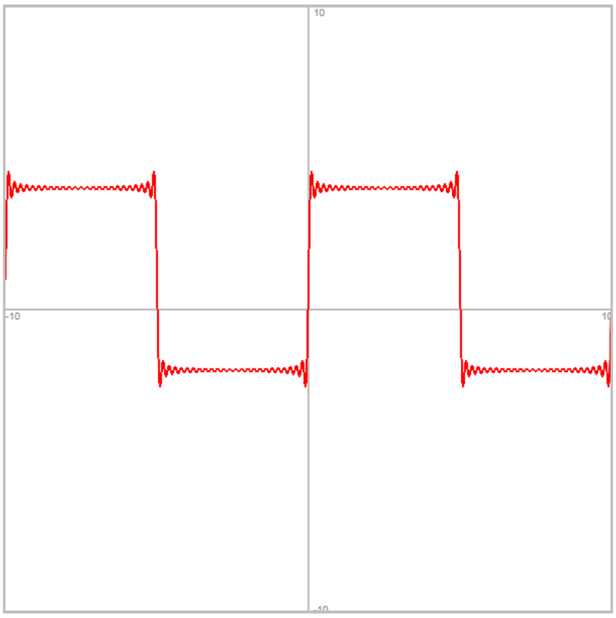
r=1:



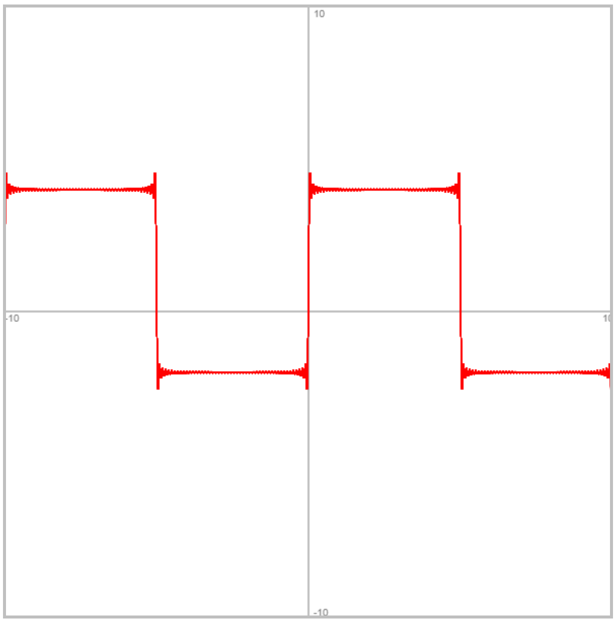
r=10:



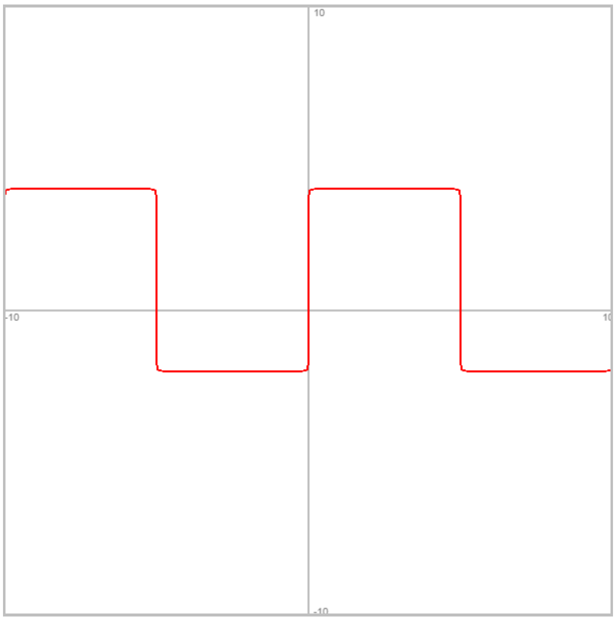
r=50:



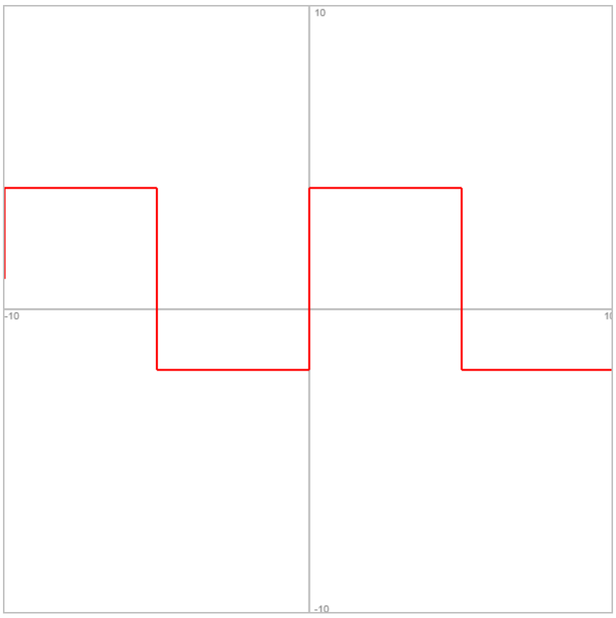
r=100:



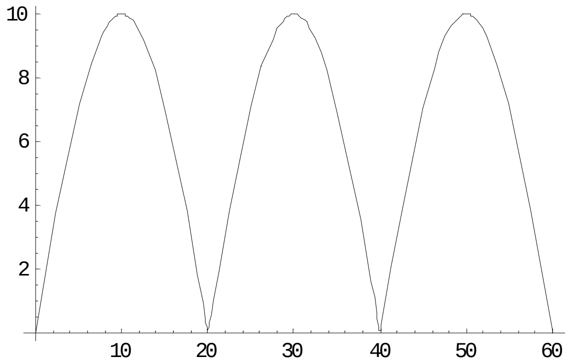
r=1000:



r=10000:



Beispiel 3: Gegeben ist die gerade, 20-periodische Funktion $f(t) = 10\sin\left(\frac{\pi}{20}t\right)$ auf dem Intervall (0; 20).



Basisfunktion: $f(t) = 10\left|\sin\left(\frac{\pi}{20}t\right)\right|$ **, 0 < t < 20**

Wegen der Achsensymmetrie von f(t) sind die $b_n = 0$, so dass nur a_0 und a_n zu bestimmen sind. Für a_0 gilt mit T = 20:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{20}\int_0^{20} 10\sin\left(\frac{\pi}{20}t\right)dt = \left[-\frac{20}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{20}t\right)\right]_0^{20} = -\frac{20}{\pi}(-1-1) = \frac{40}{\pi}$$

Die a_n sind:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{2}{20}\cdot\int_0^{20} 10\sin\left(\frac{\pi}{20}t\right)\cos\left(n\frac{\pi}{20}t\right)dt = \int_0^{20}\sin\left(\frac{\pi}{20}t\right)\cos\left(n\frac{\pi}{20}t\right)dt = \text{(*)}$$

Wegen der trigonometrischen Formel:

$$\sin\left(\frac{\pi}{20}t\right)\cos\left(n\frac{\pi}{20}t\right) = \frac{1}{2}\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi}{20}t - n\frac{\pi}{20}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{20}t + n\frac{\pi}{20}t\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\sin\left((1-n)\frac{\pi}{20}t\right) + \sin\left((1+n)\frac{\pi}{20}t\right)\right]$$

folgt:

$$\text{(*)} = \frac{1}{2}\int_0^{20}\sin\left((1-n)\frac{\pi}{20}t\right)dt + \frac{1}{2}\int_0^{20}\sin\left((1+n)\frac{\pi}{20}t\right)dt = \text{(**)}$$

Für n=1 errechnet sich a_1 als:

$$\text{(**)} = \frac{1}{2}\int_0^{20}\sin(0)dt + \frac{1}{2}\int_0^{20}\sin\left(\frac{2\pi}{20}t\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{20}\sin\left(\frac{\pi}{10}t\right)dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{10}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)\right]_0^{20} = -\frac{1}{2}(1-1) = 0 = a_1$$

Für n>1 gilt:

$$\text{(**)} = -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{20}{(1-n)\pi}\cos\left((1-n)\frac{\pi}{20}t\right)\right]_0^{20} - \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{20}{(1+n)\pi}\cos\left((1+n)\frac{\pi}{20}t\right)\right]_0^{20} =$$

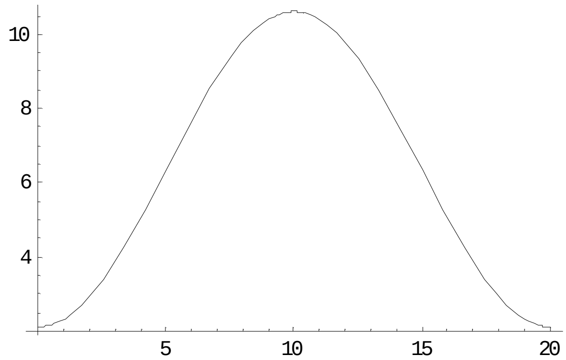
$$-\frac{10}{(1-n)\pi}((-1)^{n+1}-1) - \frac{10}{(1+n)\pi}((-1)^{n+1}-1) = \left[\frac{10}{(1-n)\pi} + \frac{10}{(1+n)\pi}\right]\cdot(1-(-1)^{n+1}) =$$

$$\frac{10}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{(1-n)} + \frac{1}{(1+n)}\right]\cdot(1-(-1)^{n+1}) = \frac{10}{\pi}\cdot\left[\frac{1+n+1-n}{1-n^2}\right]\cdot(1-(-1)^{n+1}) = \frac{20}{(1-n^2)\pi}\cdot(1-(-1)^{n+1}) = a_n$$

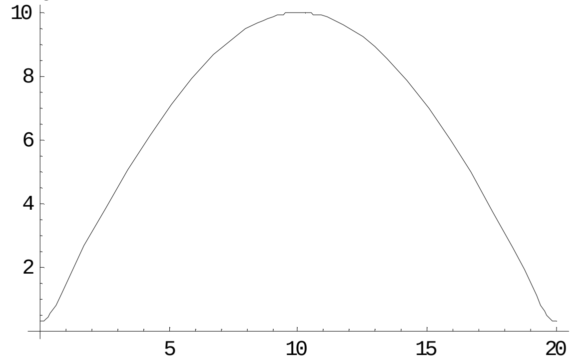
Für ungerade n ist: $a_n = 0$, für gerade n: $a_n = \frac{40}{(1-n^2)\pi}$. Die Transformation n -> 2n ergibt die Fourierreihe:

$$f(t)=\frac{40}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{40}{(1-(2n)^2)\pi}\cos\left(2n\frac{\pi}{20}t\right)=\frac{20}{\pi}+\frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)}\cos\left(n\frac{\pi}{10}t\right).$$

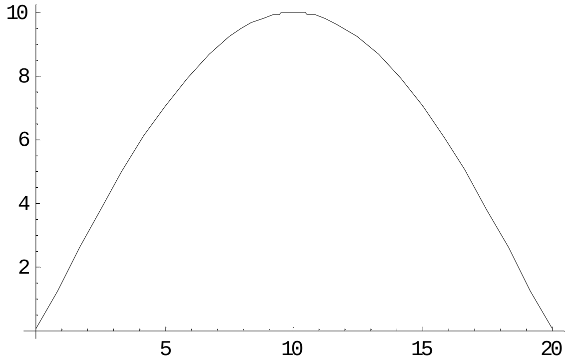
r=1:



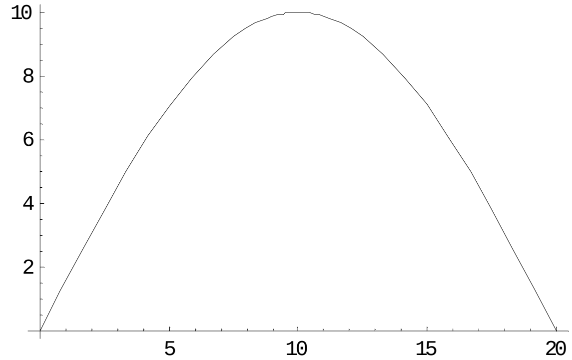
r=10:



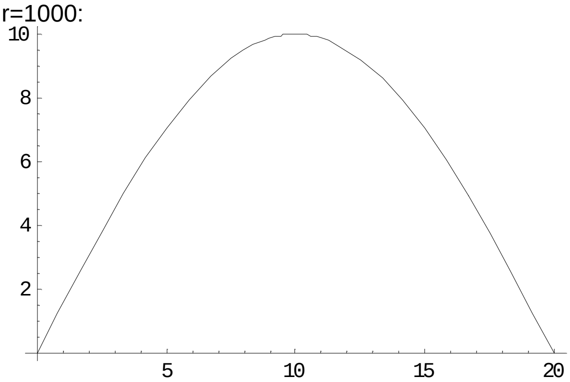
r=50:



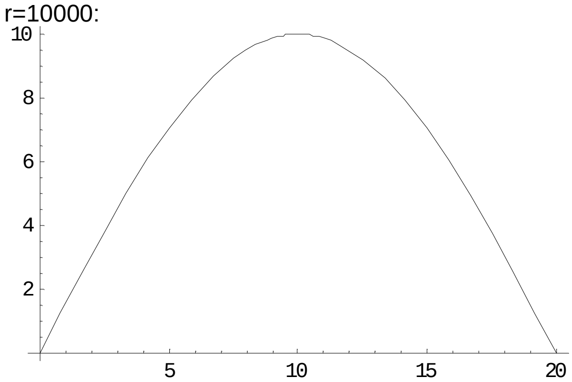
r=100:



r=1000:



r=10000:



Fouriersummen: $f_r(t)=\frac{20}{\pi}+\frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{(1-4n^2)}\cos\left(n\frac{\pi}{10}t\right)$

Literaturhinweise: PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd.1, Wiesbaden [11]2007, S.158-170 (Fourierreihen)

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 12.2020