Mathematik > Analysis > Probleme um die Funktion f(x) = x/(e^x–1)

Jakob Bernoulli

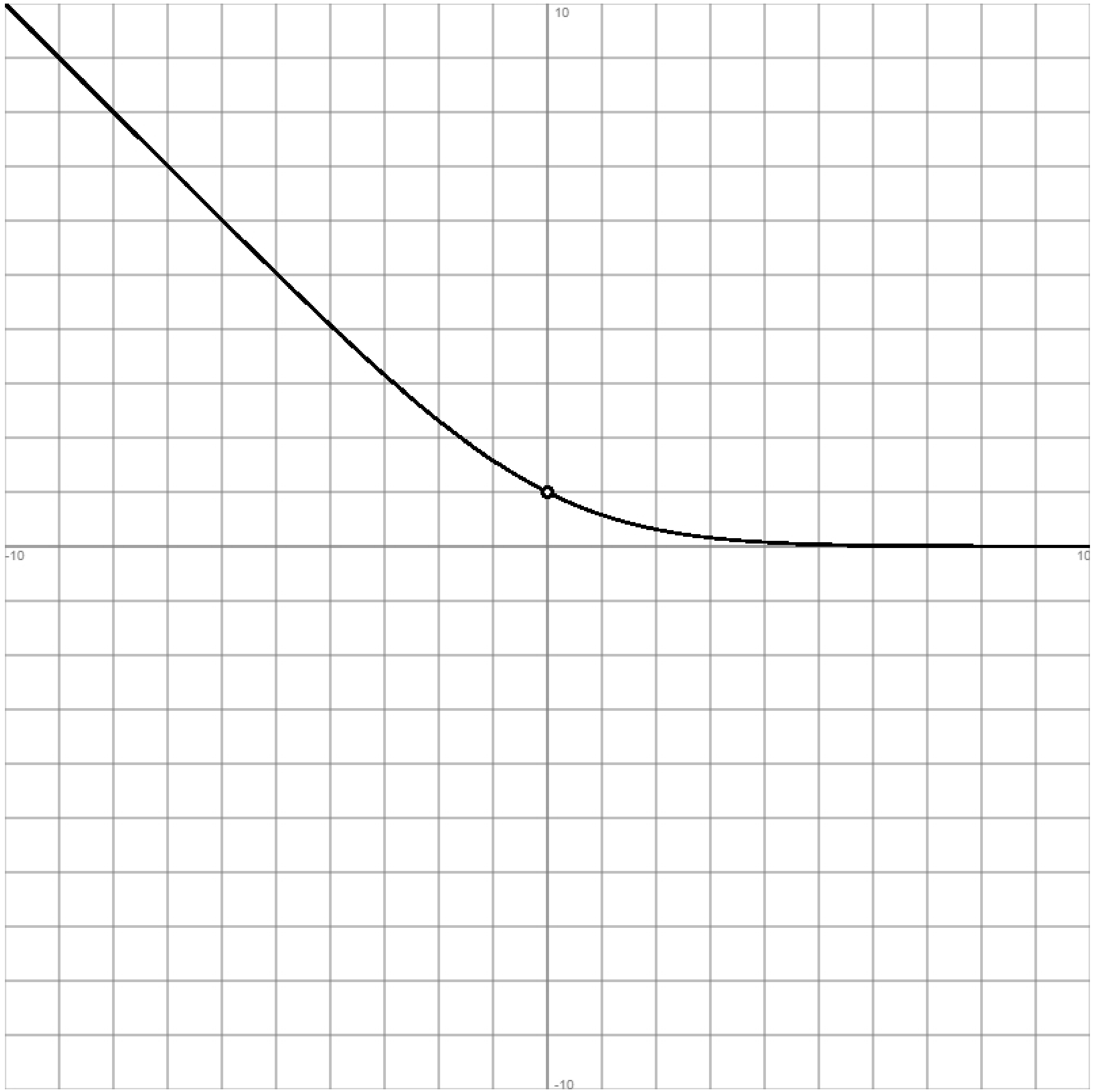
Der Schweizer Jakob Bernoulli (*1654/55-†1705) war ein Sohn des Basler Kaufmanns Niklaus Bernoulli (*1623-†1708) und der erste von acht meist bedeutenden Mathematikern der Familie (Nikolaus Bernoulli [Bruder Jakobs, *1662–†1716]; Nikolaus Bernoulli [Sohn Nikolaus', *1687–†1759; Petersburger Paradoxon]; Johann Bernoulli [Bruder Jakobs, *1667–†1748; Regeln von de l'Hospital]; Nikolaus Bernoulli [Sohn Johanns, *1695–†1726]; Daniel Bernoulli [Sohn Johanns, *1700-†1782; Bernoulli-Gleichung, Bernoulli-Prinzip]; Johann Bernoulli [Sohn Johanns, *1710-†1790]; Daniel Bernoulli [Sohn des letztgenannten Johann, *1751-†1834]). Die Bernoullis stammten ursprünglich wohl aus den protestantischen Niederlanden und ließen sich – über Frankfurt a.M. – um 1620 in Basel nieder. Auch im 19. und 20. Jahrhundert kamen aus der Familie Bernoulli Wissenschaftler und Architekten, die Fotografin Maria Bernoulli (*1868-†1963) war in erster Ehe mit dem deutschen Schriftsteller Hermann Hesse (*1877-1962) verheiratet.
Jakob Bernoulli studierte an der Basler Universität Philosophie und Theologie (Abschlüsse 1671 bzw. 1676), begann sich aber recht bald auch für Mathematik und Astronomie zu interessieren. Dem Studium folgten Anstellungen Jakobs als Hauslehrer (in Genf) und eine Bildungsreise durch die Niederlande, England und Deutschland (1681/82), die sein Wissen um die Mathematik und den Kontakt zu Mathematikern intensivierte. Nach Basel zurückgekehrt, hielt Jakob Bernoulli Physikvorlesungen an der dortigen Universität und arbeitete sich immer mehr in mathematische Themen ein (Isaac Barrow, René Descartes, Gottfried Wilhelm Leibniz, John Wallis). Zusammen mit seinem Bruder Johann Bernoulli brachte er die Infinitesimalrechnung Leibniz' weiter, er formulierte das Beweisverfahren der vollständigen Induktion (über die Menge der natürlichen Zahlen) und bewies damit seine Bernoulli-Ungleichung, er untersuchte Potenzreihen (Bernoulli-Zahlen) und gab die „Geometrie" Descartes' neu heraus. Auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung führte er die Arbeiten früherer Mathematiker fort (Bernoulli-Verteilung, schwaches Gesetz der großen Zahlen). Zwischen 1689 und 1704 veröffentlichte Bernoulli demgemäß eine Reihe von mathematischen Beiträgen u.a. in den *Acta Eruditorum*. 1713 – postum – kamen die *Ars Conjectandi* heraus, die u.a. Wahrscheinlichkeitstheorie und Aussagen zum Glücksspiel enthält. 1699 wurde Bernoulli Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Paris, 1702 der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin. Am 16. August 1705 starb Jakob Bernoulli in Basel. Als Lehrstuhlinhaber an der Basler Universität folgte ihm sein Bruder Johann Bernoulli nach.

Funktion f(x) = x/(e^x–1)

Die Funktion $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$, x ≠ 0 (wegen: $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$), besitzt zunächst die Asymptoten:

x -> +∞: f(x) -> 0 = y als waagerechte Asymptote (auf Grund von: y = e^x wächst stärker als y = x)
x -> -∞: f(x) -> -x = y als schiefe Asymptote (auf Grund von: y = e^x -> 0 => e^x –1 -> -1).

Der Graph der Funktion verläuft damit wie folgt:



Funktion $f(x) = x/(e^x – 1)$

An der Stelle x = 0 liegt eine stetig behebbare Lücke mit Lückenwert 1 vor, so dass sich daraus der y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|1)$ ergibt. Denn nach den Regeln von de l'Hospital folgt:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x - 1} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^0} = 1 .$$

Die Funktion f(x) verfügt wegen der Ableitungen $f'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$, … über keine Extrem- und Wendepunkte und ist überall links gekrümmt, x ≠ 0.

Taylorentwicklung und Potenzreihe

Jede unendlich oft differenzierbare Funktion kann in eine Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$ entwickelt werden, so auch $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ als:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} x^i \quad (1)$$

mit den Koeffizienten B_i, i = 0, 1, 2, …, als Bernoulli-Zahlen. Zunächst gilt mit der Reihenentwicklung $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j$ der natürlichen Exponentialfunktion:

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j \;\Rightarrow\; e^x - 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} x^{j-1}} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} x^j} \quad (2)$$

Dann folgt wegen der Gleichheit der Terme in (1) und (2):

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} x^i = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} x^j} \;\Rightarrow\; \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} x^j\right) = 1 .$$

Ausmultiplikation der unendlichen Reihen ergibt bei Einfügen von Binomialkoeffizienten:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+1)!}x^j\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}\frac{B_i}{i!(j+1)!}x^{i+j}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{B_i}{i!(n-i+1)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{B_i(n+1)!}{i!(n-i+1)!}\cdot\frac{x^n}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i\right)\cdot\frac{x^n}{(n+1)!}=1.$$

Koeffizientenvergleich ergibt, dass der 0. Summand der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i\right)\cdot\frac{x^n}{(n+1)!}$ den Wert 1 haben muss, alle anderen Summanden den Wert 0:

n = 0: $\left(\sum_{i=0}^{0}\binom{1}{i}B_i\right)\cdot\frac{x^0}{1!}=1$ => $1\cdot B_0 = 1$ => $B_0 = 1$

n > 0: $\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i\right)\cdot\frac{x^n}{(n+1)!}=0$ => $\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i=0$ (3).

Bernoulli-Zahlen

Vermöge der Beziehungen (3) lassen sich nun die Bernoulli-Zahlen nacheinander rekursiv bestimmen:

n = 0: $B_0 = 1$

n = 1: $\sum_{i=0}^{1}\binom{2}{i}B_i=\binom{2}{0}B_0+\binom{2}{1}B_1=B_0+2B_1=0$ => $1 + 2B_1 = 0$ => $2B_1 = -1$ => $B_1 = -0{,}5$

n = 2: $\sum_{i=0}^{2}\binom{3}{i}B_i=\binom{3}{0}B_0+\binom{3}{1}B_1+\binom{3}{2}B_2=B_0+3B_1+3B_2=0$ => $1 - 1{,}5 + 3B_2 = 0$ => $-0{,}5 + 3B_2 = 0$ => $3B_2 = 0{,}5$ => $B_2 = 1/6$

usw.

Sind also die Bernoulli-Zahlen B_0, B_1, … B_{n-1} schon errechnet, so folgt für die Zahl B_n:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i=0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}B_i+\binom{n+1}{n}B_n=0 \Rightarrow \binom{n+1}{n}B_n=-\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}B_i \Rightarrow (n+1)B_n=-\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}B_i \Rightarrow B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}B_i\,.$$

Es ergibt sich noch: $B_n = 0$ für alle ungeraden $n \geq 3$. Denn mit der geraden Hyperbelfunktion $y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ und der ungeraden $y=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ folgt für die gerade Hilfsfunktion h(x):

$$h(x)=\frac{x}{2}\cdot\frac{\cosh\frac{x}{2}}{\sinh\frac{x}{2}}=\frac{x}{2}\cdot\frac{\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{2}}{\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{2}}=\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}=\frac{x}{2}\cdot\frac{(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})e^{\frac{x}{2}}}{(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})e^{\frac{x}{2}}}=\frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{x}{2}\cdot\frac{2+e^x-1}{e^x-1}=\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{2}{e^x-1}+\frac{e^x-1}{e^x-1}\right)=\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{2}{e^x-1}+1\right)=$$

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{2}+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i=\frac{x}{2}+1-\frac{x}{2}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i=1+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i \quad (*),$$

woraus folgt, dass die Potenzreihe $\sum_{i=2}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i$ nur Potenzen mit gerader Hochzahl enthalten darf, womit wiederum alle ungeraden Bernoulli-Zahlen in der Potenzreihe verschwinden; denn h(x) ist eine gerade Funktion und damit auch $f(x)+\frac{x}{2}=\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}$. Bernoulli-Zahlen sind:

Bernoulli-Zahlen							
B_0 = 1	B_1 = -0.5	B_2 = 0.16666666666666666	B_3 = 0	B_4 = -0.033333333333333305	B_5 = 0	B_6 = 0.023809523809523662	B_7 = 0
B_8 = -0.03333333333333233	B_9 = 0	B_{10} = 0.07575757575756605	B_{11} = 0	B_{12} = -0.25311355311342115	B_{13} = 0	B_{14} = 1.1666666666642225	B_{15} = 0
B_{16} = -7.092156862685596	B_{17} = 0	B_{18} = 54.971177943016926	B_{19} = 0	B_{20} = -529.1242423531955	B_{21} = 0	B_{22} = 6192.123185080066	B_{23} = 0
B_{24} = -86580.25292754754	B_{25} = 0	B_{26} = 1425517.1544165744	B_{27} = 0	B_{28} = -27298230.129473686	B_{29} = 0	B_{30} = 601580791.186298	B_{31} = 0
B_{32} = -15116307453.422703	B_{33} = 0	B_{34} = 429613697943.54016	B_{35} = 0	B_{36} = -13711534546938.406	B_{37} = 0	B_{38} = 488315130305048.2	B_{39} = 0
B_{40} = -19293862483002544							

Bernoulli-Polynome

Bernoulli-Polynome sind ganz rationale Funktionen, die mit Bernoulli-Zahlen als Koeffizienten besetzt sind. Und zwar folgt ebenfalls rekursiv hinsichtlich der Polynome $B_n(x)$, n = 1, 2, …:

$$B_0(x) = 1,\ B_n'(x) = n\cdot B_{n-1}(x),\ \int_0^1 B_n(t)dt=0 \quad (n\geq 1).$$

Daraus ergibt sich:

a) Die Bernoulli-Zahlen B_n, n = 0, 1, 2, …, werden definiert als: $B_n = B_n(0)$. Dies sind die Bernoulli-Zahlen 1. Art. Die Bernoulli-Zahlen B_n^*, n = 0, 1, 2, …, werden definiert als: $B_n^* = B_n(1)$. Dies sind die Bernoulli-Zahlen 2. Art.

b) Es gilt gemäß dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $B_n(x) = n\int_0^x B_{n-1}(t)dt + B_n$.

c) Es gilt die Darstellung der Bernoulli-Polynome als: $B_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_i x^{n-i}$ (4).

Die Beziehung (4) wird über das Beweisverfahren der vollständigen Induktion bewiesen; und zwar gilt:

1) *Induktionsanfang*: n=0 mit $B_0(x) = \sum_{i=0}^{0}\binom{0}{i}B_i x^{n-i} = \binom{0}{0}B_0 x^0 = B_0 = 1$ ist wahr.

2) *Induktionsvoraussetzung* für n=k: $B_k(x) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i x^{k-i}$ sei wahr (*).

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $B_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}B_i x^{k+-i}$ ist als wahr zu beweisen.

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: $B_{k+1}(x) = k\int_0^x B_k(t)dt + B_k \underset{(*)}{=} k\int_0^x \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i t^{k-i}dt + B_k = k\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i\int_0^x t^{k-i}dt + B_k =$

$k\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i\cdot\frac{1}{k+1-i}(x^{k+1-i}-0) + B_k = \sum_{i=0}^{k}\frac{k}{k+1-i}\binom{k}{i}B_i x^{k+1-i} + B_k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i x^{k+1-i} + B_k x^{k+1-(k+1)} = \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}B_i x^{k+1-i}$.

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=0, sondern auch für n=1, weiter für n=2 usw., mithin für alle $n \varepsilon \mathbf{N_0}$.

d) Die Bernoulli-Polynome lauten:

$B_0(x) = 1$

$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$

$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$

$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

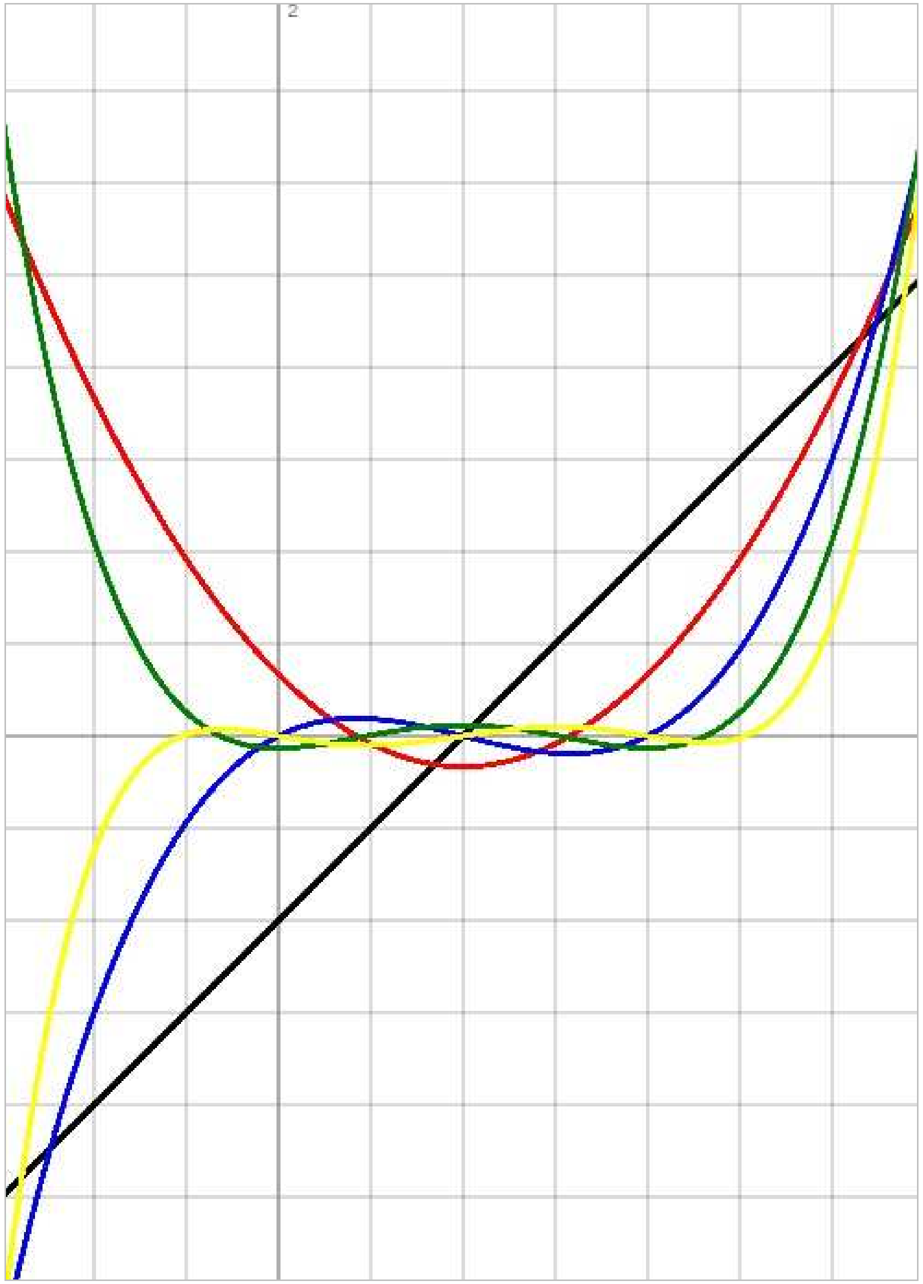
$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$

$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$

$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$

usw.

e) Für die Bernoulli-Polynome gilt: $B_n(0,5 + x) = (-1)^n \cdot B_n(0,5 - x)$ (Achsensymmetrie zu y = 0,5 bei geraden n, Punktsymmetrie zu Z(0,5|0) bei ungeraden n). Weiter errechnet sich: $B_n(0,5) = -(1-2^{1-n}) \cdot B_n$.



Funktionen $B_1(x)$, $B_2(x)$, $B_3(x)$, $B_4(x)$, $B_5(x)$

Summenformeln

Mit Hilfe von Bernoulli-Zahlen und -polynomen lassen sich zu den Summen von Potenzen natürlicher Zahlen $1^r + 2^r + 3^r + \dots n^r$ ($r\varepsilon\mathbf{N}$) die entsprechenden Summenformeln herleiten. Bzgl. der Bernoulli-Polynome gilt nämlich:

a) $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$ ($n\geq1$) (5).

Die Beziehung (5) wird über das Beweisverfahren der vollständigen Induktion bewiesen; und zwar gilt mit der Differenzfunktion: $D_n(x) = B_n(x+1) - B_n(x)$:

1) *Induktionsanfang*: n=1 mit $D_1(x) = B_1(x+1) - B_1(x) = ((x+1) - 0{,}5) - (x - 0{,}5) = 1 = 1x^0 = 1x^{1-1}$ ist wahr.
2) *Induktionsvoraussetzung* für n=k: $D_k(x) = B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$ sei wahr (*).
3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $D_{k+1}(x) = B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x) = (k+1)x^k$ ist als wahr zu beweisen.

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Aus $B_{k+1}(x) = (k+1)\int_0^x B_k(t)dt$ folgt zunächst: $D_{k+1}(x) = (k+1)\int_0^x D_k(t)dt$. Damit gilt: $B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x) = D_{k+1}(x) =$

$$(k+1)\int_0^x D_k(t)dt \underset{(*)}{=} (k+1)\int_0^x kt^{k-1}dt = (k+1)\left[k\cdot\frac{1}{k}t^k\right]_0^x = (k+1)(x^k - 0) = (k+1)x^k.$$

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=1, sondern auch für n=2, weiter für n=3 usw., mithin für alle $n\varepsilon\mathbf{N}$.

b) Jedes Polynom p(x) n. Grades mit $p(x+1) - p(x) = nx^{n-1}$ unterscheidet sich von dem Bernoulli-Polynom $B_n(x)$ nur durch eine Konstante.

Wir bilden die Differenzfunktion: $D(x) = p(x) - B_n(x)$ und haben dann:

$$D(x+1) - D(x) = (p(x+1) - B_n(x+1)) - (p(x) - B_n(x)) = (p(x+1) - p(x)) - (B_{n+1}(x) - B_n(x)) = nx^{n-1} - nx^{n-1} = 0 \Rightarrow D(x) = D(x+1).$$

D(x) muss aber eine Konstante c sein, da die Polynome p(x) und $B_n(x)$ denselben Grad haben. Damit gilt:

$$D(x) = p(x) - B_n(x) = c \Rightarrow p(x) = B_n(x) + c.$$

Die Beziehung $B_{r+1}(x+1) - B_{r+1}(x) = (r+1)x^r$ ($r\varepsilon\mathbf{N}$) (6) lässt sich nun verwenden, um Summenformeln herzuleiten. Setzen wir nacheinander in (6) für x die ersten n natürlichen Zahlen i = 1, 2, 3, … n ein, so folgt:

$x = 1$: $(r+1)\cdot1^r = B_{r+1}(1+1) - B_{r+1}(1) = B_{r+1}(2) - B_{r+1}(1)$
$x = 2$: $(r+1)\cdot2^r = B_{r+1}(2+1) - B_{r+1}(2) = B_{r+1}(3) - B_{r+1}(2)$
$x = 3$: $(r+1)\cdot3^r = B_{r+1}(3+1) - B_{r+1}(3) = B_{r+1}(4) - B_{r+1}(3)$
…
$x = i$: $(r+1)\cdot i^r = B_{r+1}(i+1) - B_{r+1}(i)$
…
$x = n$: $(r+1)\cdot n^r = B_{r+1}(n+1) - B_{r+1}(n)$.

Aufsummierung der Terme $(r+1)\cdot i^r = B_{r+1}(i+1) - B_{r+1}(i)$ über alle i = 1, 2, 3, … n führt dann auf:

$(r+1)\cdot1^r + (r+1)\cdot2^r + (r+1)\cdot3^r + \dots + (r+1)\cdot i^r + \dots + (r+1)\cdot n^r =$

$$B_{r+1}(2) - B_{r+1}(1) + B_{r+1}(3) - B_{r+1}(2) + B_{r+1}(4) - B_{r+1}(3) + \dots + B_{r+1}(i+1) - B_{r+1}(i) + \dots + B_{r+1}(n+1) - B_{r+1}(n) \Rightarrow$$

$$(r+1)\sum_{i=1}^{n} i^r = B_{r+1}(n+1) - B_{r+1}(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^r = \frac{B_{r+1}(n+1) - B_{r+1}(1)}{r+1} \quad (7)$$

mit (7) als Summenformel. Ist r =1, so wird über die ersten n natürlichen Zahlen summiert, und es ergibt sich die Summenformel vermöge des Bernoulli-Polynoms $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{B_2(n+1) - B_2(1)}{2} = \frac{\left((n+1)^2 - (n+1) + \frac{1}{6}\right) - \left(1^2 - 1 + \frac{1}{6}\right)}{2} = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{1}{2}n(n+1),$$

also die angeblich vom Schüler Carl Friedrich Gauß (*1777-†1855) gefundene Beziehung. Insgesamt erhalten wir als <u>Summenformeln</u>:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^3 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6 + 15n^5 + 5n^4 - 15n^3 - n^2 + 9n - 3)$$

usw.

Dabei ergeben sich die Summenformeln, die schon der deutsche Mathematiker Johannes Faulhaber (*1580-†1635) errechnet hatte, indem er – in heutiger Darstellung – als Faulhabersche Formel errechnete:

$$\sum_{i=1}^{n} i^r = \frac{1}{r+1}\sum_{j=1}^{r}(-1)^j \binom{r+1}{j} B_j n^{r+1-j} .$$

Summenformeln und lineare Gleichungssysteme

Nicht zuletzt aus der Faulhaberschen Formel folgt, dass jede Summe von Potenzen natürlicher Zahlen $1^r + 2^r + 3^r + \ldots n^r$ ($r \varepsilon \mathbf{N}$) darstellbar ist als ein Polynom in n vom Grad r+1, d.h. dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^r = \sum_{j=1}^{r+1} a_j n^j = a_{r+1}n^{r+1} + a_r n^r + \ldots + a_r n \ (8).$$

Um die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_{r+1}$ im Polynom (8) zu bestimmen, wird ein lineares Gleichungssystem mit r+1 Gleichungen und den r+1 Koeffizienten als Unbekannten aufgestellt, indem n = 1, … r+1 in die Beziehung (8) eingesetzt werden. Es entsteht das folgende lineare Gleichungssystem:

$n = 1$: $1^r = a_{r+1} + a_r + \ldots + a_1$
$n = 2$: $1^r + 2^r = a_{r+1}\cdot 2^{r+1} + a_r\cdot 2^r + \ldots a_1\cdot 2$
…
$n = r+1$: $1^r + 2^r + \ldots + (r+1)^r = a_{r+1}\cdot(r+1)^{r+1} + a_r\cdot(r+1)^r + \ldots a_1\cdot(r+1)$.

In Matrixschreibweise lautet das lineare Gleichungssystem:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 & 1 \\
2^{r+1} & 2^r & \ldots & 2^k & \ldots & 2 & \sum_{i=1}^{2} i^r \\
\ldots & & & & & & \ldots \\
k^{r+1} & k^r & \ldots & k^k & \ldots & k & \sum_{i=1}^{k} i^r \\
\ldots & & & & & & \\
(r+1)^{r+1} & (r+1)^r & \ldots & (r+1)^k & \ldots & r+1 & \sum_{i=1}^{r+1} i^r
\end{array}\right]$$

Das lineare Gleichungssystem wird mit dem Gauß-Algorithmus gelöst. Wir lassen nachstehende Beispiele zur Ermittlung von Summenformeln über lineare Gleichungssysteme folgen:

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Ansatz: $\sum_{i=1}^{n} i = a_2 n^2 + a_1 n$ mit den zu bestimmenden Koeffizienten a_2, a_1

Koeffizientenbestimmung:

Lineares Gleichungssystem:

$+ 1a_2 + 1a_1 = 1$

$+ 4a_2 + 2a_1 = 3$

Anfangstableau:

1 1 | 1

4 2 | 3

1. Schritt: 1*(*2*) - 4*(*1*) /

1 1 | 1

0 -2 | -1

2. Schritt: 2*(*1*) + 1*(*2*) /

2 0 | 1

0 -2 | -1

Teilen: (*1*):2 / (*2*):(-2) /

1 0 | 1/2

0 1 | 1/2

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 1a_2 \quad = 1/2$

$\quad + 1a_1 = 1/2$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$a_2 = 1/2$

$a_1 = 1/2$

Ergebnis: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Ansatz: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n$ mit den zu bestimmenden Koeffizienten a_3, a_2, a_1

Koeffizientenbestimmung:

Lineares Gleichungssystem:

$+ \; 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 = 1$

$+ \; 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 5$

$+ \; 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 = 14$

Anfangstableau:

1	1	1	1
8	4	2	5
27	9	3	14

1. Schritt: 1*(*2*) - 8*(*1*) / 1*(*3*) - 27*(*1*) /

1	1	1	1
0	-4	-6	-3
0	-18	-24	-13

2. Schritt: 4*(*1*) + 1*(*2*) / -2*(*3*) + 9*(*2*) /

4	0	-2	1
0	-4	-6	-3
0	0	-6	-1

3. Schritt: -3*(*1*) + 1*(*3*) / -1*(*2*) + 1*(*3*) /

-12	0	0	-4
0	4	0	2
0	0	-6	-1

Teilen: (*1*):(-12) / (*2*):4 / (*3*):(-6) /

1	0	0	1/3
0	1	0	1/2
0	0	1	1/6

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ \; 1a_3 = 1/3$

$+ \; 1a_2 = 1/2$

$+ \; 1a_1 = 1/6$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$a_3 = 1/3$

$a_2 = 1/2$

$a_1 = 1/6$

Ergebnis: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

usw.

Potenzreihen und Reihen

Die oben genannte, auf den Bernoulli-Zahlen beruhende Beziehung (*):

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{\cosh \frac{x}{2}}{\sinh \frac{x}{2}} = \frac{x}{2} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} x^i$$

führt wegen: coth(x) = cosh(x)/sinh(x) auf die Potenzreihe des Kotangens hyperbolicus:

$$\frac{x}{2} \cdot \coth \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} x^i,$$

die für |x| < π konvergiert. Ersetzt man x/2 durch x, so folgt:

$$x \cdot \coth x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_{2i}}{(2i)!} (2x)^{2i} \text{ , } |x| < \pi.$$

Weiter ergibt sich mit dem Übergang vom Kotangens hyperbolicus zum Kotangens die Existenz der alternierenden Potenzreihe:

$$x \cdot \cot x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{B_{2i}}{(2i)!} (2x)^{2i} \text{ , } |x| < \pi.$$

Eine Potenzreihe für den Tangens stellt dann auf Grund der Gleichung: tan(x) = cot(x)–2cos(2x) die Beziehung

$$\tan x = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{(2^{2i}-1)B_{2i}}{(2i)!} (2x)^{2i-1} \text{ , } |x| < \pi/2.$$

dar.

Schließlich lassen sich auch Reihen aus unendlichen Summen von Kehrwerten gerader Potenzen mit Hilfe der Bernoulli-Zahlen ausdrücken:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2\pi)^{2k}$$, k = 1, 2, …

Für k = 1 gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^{2}} = (-1)^{0} \frac{B_{2}}{2!} (2\pi)^{2} = \frac{\pi^2}{6},$$

für k = 2:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^{4}} = (-1)^{1} \frac{B_{4}}{4!} (2\pi)^{4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Literaturhinweise: SCHELL, H.-J., Unendliche Reihen (= Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen, Landwirte, Bd.3), Leipzig [3]1978, S.65ff; Wikipedia. Die freie Enzyklopädie: https://de.wikipedia.org/wiki/Bernoulli-Zahl (Bernoulli-Zahlen, -Polynome), https://de.wikipedia.org/wiki/Faulha-bersche_Formel (Faulhabersche Formel), https://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_I._Bernoulli (Jakob Bernoulli); ZERN, A., Bernoullizahlen und Bernoullipolynome, Heidelberg 2009 (https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~theiders/PS-Analysis/Bernoullische_Polynome.pdf).