

Einleitung

Eindimensionale reelle Analysis beschreibt das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit reellwertigen Funktionen beschäftigt und dabei als Infinitesimalrechnung, als Differenzial- und Integralrechnung, den Grenzwertbegriff sowie die Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von Funktionen kreist. Gerade der Grenzwertbegriff der Differenzial- und Integralrechnung ist eng verbunden mit dem Begriff von Folgen als Abbildungen von den natürlichen in die reellen Zahlen.

Grundlage der Differenzial- und Integralrechnung ist der Körper der reellen Zahlen $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ mit der Addition und Multiplikation als Rechenoperationen induzierende Verknüpfungen zwischen den Elementen, der 0 als neutralem Element bzgl. der Addition, der 1 als neutralem Element bzgl. der Multiplikation, der algebraischen kommutativen Gruppen $(\mathbf{R}, +)$ und $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ (Assoziativgesetz, Gesetz der inversen Elemente, Kommutativgesetz) sowie den die Verknüpfungen verbindenden Distributivgesetzen. Auf dem Zahlbereich der reellen Zahlen lässt sich zudem vermittelt „ \leq “ eine totale Ordnung definieren, so dass im geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ reelle Zahlen miteinander vergleichbar sind (bei $-\infty < x < \infty$ für jede reelle Zahl x ; abgeschlossene, offene, halboffene Intervalle $[a; b]$, $(a; b]$, $[a; b)$, $(a; b)$ für reelle Zahlen a, b mit: $a < b$) und neben Gleichungen auch Ungleichungen algebraisch umgeformt werden können. Auch definieren der Körper der reellen Zahlen einen metrischen Raum, d.h.: der Betrag $||$ der Differenz zweier reeller Zahlen definiert eine (positiv definite, symmetrische) Metrik (mit Dreiecksungleichung), die wiederum die für die reellen Zahlen typische Topologie (eines Hausdorff-Raums) induziert (Trennungaxiom T_2). Topologie und Ordnung entsprechen dabei einander. Zudem sind die reellen Zahlen vollständig, d.h.: die Grenzwerte von Folgen reeller Zahlen sind wieder reell.

Folgen

Eine Abbildung $\{a_n\}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, die jeder natürlichen Zahl n genau eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: $n \rightarrow a_n$ oder $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, a_n das n -te Folgenglied. Mit

$$a_n = f(n)$$

definiert die Abbildung f eine Funktionsvorschrift der expliziten Folge. Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, bei denen sich Folgenglieder auf vorhergehende Folgenglieder beziehen, heißen rekursiv und lassen sich mit Hilfe einer Funktion f darstellen als:

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}) \text{ mit vorgegebenem } a_1, a_2, \dots, a_k \text{ (rekursive Folge } k\text{-ter Ordnung)}$$

$$a_n = f(a_{n-1}) \text{ mit vorgegebenem } a_1 \text{ (rekursive Folge 1. Ordnung)}$$

In jedem Fall heißt $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ also eine Folge.

Beispiele für explizite Folgen sind: $\{1, 2, 3, 4, \dots, n, n+1, \dots\}$; $\{9, 6, 3, 0, -3, -6, \dots, 6-3n, 3-3n, \dots\}$; $\{-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n \cdot n, (-1)^{n+1} \cdot (n+1), \dots\}$; $a_n = 4n$, $b_n = 17-2n$, $c_n = n^2$.

Beispiele für rekursive Folgen sind: a) $a_n = 2a_{n-1}$, $a_1=2$ besitzt die Folgenglieder: $a_1=2$, $a_2 = 2 \cdot 2 = 4$, $a_3 = 2 \cdot 4 = 8$, $a_4 = 2 \cdot 8 = 16$ usw., also auch die explizite Darstellung: $a_n = 2^n$.

b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ mit $a_1 = a_2 = 1$ ist die Folge der Fibonacci-Zahlen mit: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 1+1 = 2$, $a_4 = 2+1 = 3$, $a_5 = 3+2 = 5$, $a_6 = 5+3 = 8$, $a_7 = 8+5 = 13$, $a_8 = 13+8 = 21$ usw.

c) Die Folge $a_n = a_{n-1}^2$ mit $a_1 = 3$ lässt sich explizit darstellen als: $a_n = 3^{2^{n-1}}$.

Besondere Typen von (expliziten, rekursiven) Folgen sind: a) $\{a_n\} = \{x\}$ heißt für reelles x konstante Folge, z.B. als: $a_n = 2$; $b_n = \pi$; $c_n = 49/4$.

b) $\{a_n\}$ mit $a_n \cdot a_{n+1} = -1$ heißt alternierende Folge, z.B. als: $a_n = (-1)^n$; $b_n = (-2)^n$; $c_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$.

c) $\{a_n\} = \{d \cdot n + r\}$ heißt arithmetische Folge mit konstanter Differenz d zwischen zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern. Es gilt: $a_{n+1} - a_n = d$, $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$, $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Die arithmetischen Folgen lassen sich auch rekursiv darstellen als: $a_n = a_{n-1} + d$, $a_1 = d + r$. Beispiele für solche Folgen sind: $\{a_n\} = \{5n - 4\} = \{1, 6, 11, 16, 21, \dots\}$ mit: $a_{n+1} - a_n = 5$ und $a_n = 1 + 5 \cdot (n-1)$; $\{b_n\} = \{3 + 4n\} = \{7, 11, 15, 19, \dots\}$ mit $b_{n+1} - b_n = 4$ und $b_n = 1 + 5 \cdot (n-1)$; $c_n = 2n + 7$; $d_n = 7n - 14 = -7 + 7 \cdot (n-1)$. Die rekursive Folge $a_n = a_{n-1} + 4$, $a_1 = 12$ ist wegen $a_n - a_{n-1} = 4 = k$ ebenfalls eine arithmetische Folge vor, für die die explizite Darstellung lautet: $a_n = 4n + 8$. Die arithmetische Folge lautet explizit: $a_n = 117 - 3n$ mit: $a_1 = 117 - 3 = 114$, $d = -3$, so dass eine rekursive Darstellung der Folge gegeben ist durch: $a_n - a_{n-1} = -3 \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} - 3$ mit $a_1 = 114$.

d) $\{a_n\} = \{c \cdot q^n\}$ heißt geometrische Folge mit konstantem Quotienten q zwischen zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern. Es gilt: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Geometrische Folgen lassen sich rekursiv darstellen als: $a_n = q \cdot a_{n-1}$, $a_1 = c \cdot q$. Geometrische Folgen sind: $a_n = 2^n$; $b_n = (-4)^n$; $c_n = 7 \cdot 8^n$. Bei $a_n = 4a_{n-1}$, $a_1 = 7$, liegt wegen $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 4 = q$ eine geometrische Folge vor mit der Folgenreihe:

$$a_n = \frac{7}{4} \cdot 4^n = 7 \cdot 4^{n-1}.$$

Eigenschaften von Folgen

Folgen besitzen dann die Eigenschaften:

Sind $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ Folgen und c eine reelle Zahl, sind $\{c \cdot a_n\}$, $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$, $\{a_n/b_n\}$ usw. ebenfalls Folgen, soweit definiert.

Eine Folge ...

$\{a_n\}$ heißt nach unten beschränkt, wenn es eine untere Schranke $S_u \in \mathbf{R}$ gibt mit: $a_n \geq S_u$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

$\{a_n\}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke $S_o \in \mathbf{R}$ gibt mit: $a_n \leq S_o$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

$\{a_n\}$ heißt beschränkt, wenn $\{a_n\}$ nach oben und nach unten beschränkt ist, d.h.: es gibt eine untere Schranke $S_u \in \mathbf{R}$ und eine obere Schranke $S_o \in \mathbf{R}$ mit: $S_u \leq a_n \leq S_o$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

$\{a_n\}$ heißt monoton fallend, falls: $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

$\{a_n\}$ heißt streng monoton fallend, falls: $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

$\{a_n\}$ heißt monoton steigend, falls: $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

$\{a_n\}$ heißt streng monoton steigend, falls: $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Grundlegend für das Arbeiten mit Folgen ist:

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt konvergent, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ in jeder noch so kleinen (ε -) Umgebung um g (dem offenen Intervall $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$) ab einem gewissen n ($= n(\varepsilon)$) alle Folgenglieder liegen, d.h.:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Im Fall der Konvergenz gilt:

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Im Fall der Konvergenz ist der Grenzwert („Limes“) einer Folge eindeutig bestimmt.

Eine Folge mit Grenzwert $g = 0$, heißt Nullfolge. Für eine Folge $\{a_n\}$ mit Grenzwert g ist $\{a_n - g\}$ eine Nullfolge. Für die Nullfolge $a_n = \frac{1}{n}$ und eine beliebige Zahl $a > 0$ gibt es eine

natürliche Zahl n mit: $\frac{1}{n} < a$, d.h.: die Menge der rationalen Zahlen \mathbf{Q} liegt dicht in den reellen Zahlen \mathbf{R} . Mit Hilfe von Folgen lassen sich somit reelle (irrationale, transzendente) Zahlen konstruieren.

Beispiele: a) Es ist: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (e als Eulersche Zahl).

b) Es ist: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$ für: $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}$, $a_1 = 2$.

Falls alle Grenzwerte existieren, gelten die Grenzwertsätze:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$;

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$.

Es gelten noch die wichtigen Aussagen:

a) Jede beschränkte monotone Folge besitzt einen Grenzwert.

b) Jede konvergente Folge ist beschränkt. Jede unbeschränkte Folge ist divergent.

c) Es gilt das Majorantenkriterium für Nullfolgen, d.h.: Wenn es zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ gibt mit: $0 \leq a_n \leq b_n$ und $\{b_n\}$ eine Nullfolge ist, dann ist auch $\{a_n\}$ eine Nullfolge.

d) Für nichtnegative reelle Zahlen k und q folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{q^n} = 0 \quad (q > 1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n^k} = 0 \quad (q \leq 1).$$

e) Es gilt für Folgen, die aus Brüchen mit ganz rationalem Zähler und Nenner bestehen (k, l zeigen jeweils die höchsten Potenzen an):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r \cdot n^k + \dots}{s \cdot n^l + \dots} = \begin{cases} \pm \infty & k > l \\ \frac{r}{s} & k = l \\ 0 & k < l \end{cases}.$$

f) Ist $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ eine reellwertige stetige Funktion, so gilt hinsichtlich der (existierenden) Grenzwerte der Folgen a_n und $f(a_n)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n).$$

Beispiele: a) Es gelten die Grenzwertsätze: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{n} - 8 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 8 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 - 8 - 0 = -8$;

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n^2}\right)^4 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n^2}\right)\right)^4 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2}\right)^4 = (3 + 0)^4 = 81$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 7n + 8}{4 + n + 2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{7}{n} + \frac{8}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n} + 2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{7}{n} + \frac{8}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n} + 2)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 2} = \frac{1 - 0 + 0}{0 + 0 + 2} = \frac{1}{2}.$$

b) Die rekursiv definierte Folge $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$, $a_0 = 10$, ist beschränkt, da positiv und kleiner gleich 10, sowie monoton fallend wegen: $a_n = \frac{a_{n-1}}{n} < \frac{a_{n-1}}{1} = a_{n-1}$. Daher konvergiert die Folge, und ihr Grenzwert $g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ errechnet sich vermöge der Grenzwertsätze als: $a_n = \frac{a_{n-1}}{n} \rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}}{n} \Leftrightarrow g = \frac{g}{n} \Leftrightarrow ng = g \Leftrightarrow ng - g = 0 \Leftrightarrow (n-1)g = 0 \Leftrightarrow g = 0.$$

c) Mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ als Nullfolge gilt wegen $0 \leq \frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ nach dem Majorantenkriterium:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

d) Es gilt für Folgen als Brüche mit ganz rationalem Zähler und Nenner: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n - 17}{n^2 + 28n - 128} = 4$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - n^3}{6 + n^2 + 2n^3} = -\frac{1}{2}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 6n}{5 + 3n^2} = 0. \text{ Diese Vorgehensweise ist auch auf andere Potenzen}$$

übertragbar, u.a. auf: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n + 4}{6 + 2^n - 3^n} = -1$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3^n}{n^8 + 3^n} = 1$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n} + n}{2^{-n} + 4n} = \frac{1}{4}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1000}}{1,1^n} = 0$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + n}{\sqrt{n} - 2n} = -\frac{1}{2}.$$

e) Für stetige Funktion wie z.B. die Wurzelfunktion ergibt sich in der Grenzwertberechnung für Folgen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \sqrt{1 - 0} = 1$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^4 + 2^n}{n - 3^n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2^n}{n - 3^n}} = \sqrt{0} = 0$.

Summenfolgen, Reihen

(Unendliche) Reihen mit einer Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ lassen sich aus der Folge der Partialsummen

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i \text{ bilden beim Übergang } n \rightarrow \infty \text{ als: } \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ bzw. } \sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{ ge-}$$

rade im Fall der Konvergenz, d.h. der Reihe als reeller Zahl. Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ist damit der

(existierende) Grenzwert einer Folge von Partialsummen. Der „Wert“ $s_n \rightarrow s$ der unendlichen Reihe kann dabei unbestimmt, $+\infty$ oder $-\infty$ sein, es kann sich aber auch eine reelle Zahl s ergeben. Im ersten Fall spricht von der Divergenz, im zweiten von der Konvergenz der unendlichen Reihe.

Es gelten die folgenden Konvergenz-/Divergenzkriterien für Reihen:

a) Nullfolgenkriterium: Konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, so bilden die $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, d.h.

es ist: $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$. Wenn daher über Folgen summiert wird, die keine Nullfolgen sind, so ist die dazugehörige Reihe divergent.

b) Leibnizkriterium: Eine alternierende Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i$ ist genau dann konvergent, wenn die $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $a_i \geq 0$ eine Nullfolge bilden, d.h.: $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$.

c) Quotientenkriterium: Gilt bei einer Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ für den Grenzwert $\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| = q$, so ist die Reihe konvergent, falls $q < 1$, divergent, falls $q > 1$. Im Fall $q = 1$ greift das Kriterium nicht; die Reihe kann sowohl konvergent als auch divergent sein.

d) Wurzelkriterium: Gilt bei einer Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ für den Grenzwert $\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|a_i|} = q$, so ist die Reihe konvergent, falls $q < 1$, divergent, falls $q > 1$. Im Fall $q = 1$ greift das Kriterium nicht; die Reihe kann sowohl konvergent als auch divergent sein.

e) Majorantenkriterium: Lässt sich eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ mit $a_i \geq 0$ durch eine andere Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ nach oben abschätzen, gilt also $a_i \leq b_i$ für alle i , so ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent, falls die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergent ist.

f) Minorantenkriterium: Lässt sich eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ mit $a_i \geq 0$ durch eine andere Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ nach unten abschätzen, gilt also $a_i \geq b_i \geq 0$ für alle i , so ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent, falls die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergent ist.

g) Integralkriterium: Existiert für eine Funktion $f(x)$ das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x) dx$, so ist mit $a_i = f(i)$, $i \in \mathbb{N}$, die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent. Existiert das uneigentliche Integral nicht, so divergiert die Reihe.

Eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert. Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ist konvergent. Reihen, die nach dem Quotienten- oder Wurzelkriterium konvergieren, sind absolut konvergent. Für absolut konvergente Reihen gilt die Dreiecksungleichung:

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|.$$

Werden in einer absolut konvergenten Reihe deren Summanden anders angeordnet (umgeordnet), bleibt die Reihe konvergent.

Konvergente und divergente Reihen

Es gilt:

a) Die harmonische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ ist divergent.

b) Die geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ konvergiert (absolut) für $|q| < 1$ mit Reihenwert:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}.$$

Für alle anderen reellen q divergiert die geometrische Reihe.

c) Sind zwei Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ absolut konvergent, so ist auch ihr Cauchy-Produkt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^i a_j b_{i-j} \right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \right)$$

absolut konvergent.

d) Liegt für eine reellwertige Funktion $f(x)$ eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ (als Taylorreihe) vor, so ergibt sich für ein beliebiges x_0 aus dem Konvergenzbereich der Potenzreihe (Konvergenzradius $R \rightarrow$ Konvergenzintervall) der Reihenwert: $f(x_0) = s = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x_0^i$.

Beispiele: a) Die Reihe $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(i-1)i}$ konvergiert. Es lässt sich sogar ihr Reihenwert bestimmen ver-

möge der Betrachtung der Partialsummen: $s_n = \sum_{i=2}^n \frac{1}{(i-1)i} = \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{(i-1)} - \frac{1}{i} \right) = 1 - \frac{1}{n}$. Dann ist näm-

lich: $s = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(i-1)i} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1 - 0 = 1$.

b) Die Reihe $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ ist konvergent auf Grund des Majorantenkriteriums: $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(i-1)i}$ und a).

c) Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ ist divergent, da die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergent ist und das Minorantenkriterium:

$\frac{1}{i} < \frac{1}{\sqrt{i}}$ gilt.

d) Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{i}$ ist konvergent auf Grund des Leibnizkriteriums.

e) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{q^{n+1}}{q^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |q| = |q|$ konvergent für $|q| < 1$, also für $-1 < q < 1$, (unbestimmt) divergent für $|q| \geq 1$.

f) Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i + i}$ ist konvergent nach dem Wurzelkriterium wegen der Grenzwertberechnung:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{\frac{1}{3^i + i}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[i]{3^i + i}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{3 \cdot \sqrt[i]{1 + \frac{i}{3^i}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{1 + \frac{i}{3^i}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3} < 1.$$

g) Mit $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} [\ln x]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln R - \ln 1) = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R = \infty$. Daher divergiert die harmonische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$.

h) Mit $f(x) = \frac{1}{x^a}$, $a > 1$, gilt: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^a} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(1-a)x^{a-1}} \right]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(1-a)R^{a-1}} - \frac{1}{1-a} \right) = \frac{1}{a-1}$.

Daher konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^a}$.

i) Für die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ gilt die Potenzreihendarstellung: $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ mit e als Eulerscher Zahl. Einsetzen von $x = 1$ in die Potenzreihe ergibt: $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$, von $x = 0,5$:

$$\sqrt{e} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i i!}.$$

j) Es gilt die Potenzreihenentwicklung: $f(x) = \arctan x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i-1} x^{2i-1}$ und damit für $x = 1$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i-1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Literaturhinweise: BUHLMANN, M., Mathematik im Studium. 250 Klausuraufgaben Analysis, Bd.3: Reihen, Ableitungen und Integrale, Essen 1992, S.9-40 (Folgen, Reihen); DEITMAR, A., Analysis (= Springer Spektrum), Berlin-Heidelberg 2017, S.45-70 (Folgen, Reihen); dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München 2003, S.94-103 (Folgen, Reihen).