Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Grundlagen I

Einleitung

Eindimensionale reelle Analysis beschreibt das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit reellwertigen Folgen und Funktionen beschäftigt und dabei als Infinitesimalrechnung, als Differenzial- und Integralrechnung, den Grenzwertbegriff sowie die Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von Funktionen kreist.
Grundlage hierfür ist der Körper der reellen Zahlen (**R**, +, ·) mit der Addition und Multiplikation als Rechenoperationen induzierende Verknüpfungen zwischen den Elementen, der 0 als neutralem Element bzgl. der Addition, der 1 als neutralem Element bzgl. der Multiplikation, der algebraischen kommutativen Gruppen (**R**, +) und (**R**\{0}, ·) (Assoziativgesetz, Gesetz der inversen Elemente, Kommutativgesetz) sowie den die Verknüpfungen verbindenden Distributivgesetzen. Auf dem Zahlbereich der reellen Zahlen lässt sich zudem vermittels „≤“ eine totale Ordnung definieren, so dass im geordneten Körper (**R**, +, ·, ≤) reelle Zahlen miteinander vergleichbar sind (bei $-\infty<x<\infty$ für jede reelle Zahl x; abgeschlossene, offene, halboffene Intervalle [a; b], (a; b], [a; b), (a; b) für reelle Zahlen a, b mit: a<b) und neben Gleichungen auch Ungleichungen algebraisch umgeformt werden können. Auch definieren der Körper der reellen Zahlen einen metrischen Raum, d.h.: der Betrag **| |** der Differenz zweier reeller Zahlen definiert eine (positiv definite, symmetrische) Metrik (mit Dreiecksungleichung), die wiederum die für die reellen Zahlen typische Topologie (eines Hausdorff-Raums) induziert (Trennungsaxiom T_2). Topologie und Ordnung entsprechen dabei einander. Zudem sind die reellen Zahlen vollständig, d.h.: die Grenzwerte von Folgen reeller Zahlen sind wieder reell.

Folgen, Reihen

Eine Abbildung $\{a_n\}$: **N** -> **R**, die jeder natürlichen Zahl n genau eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: $n \to a_n$ oder $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, a_n das n-te Folgenglied. Mit $a_n = f(n)$ definiert f die Funktionsvorschrift der Folge. $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ heißt also eine Folge.
Eine Folge $\{a_n\}$ heißt konvergent, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g, wenn für jedes ε>0 in jeder noch so kleinen (ε-) Umgebung um g (dem offenen Intervall (g-ε, g+ε)) ab einem gewissen n (= n(ε)) alle Folgenglieder liegen, d.h.:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Im Fall der Konvergenz gilt:

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Eine Folge mit Grenzwert g=0, heißt Nullfolge. Für die Nullfolge $a_n = \frac{1}{n}$ und eine beliebige Zahl a>0 gibt es eine natürliche Zahl n mit: $\frac{1}{n} < a$, d.h.: die Menge der rationalen Zahlen **Q** liegt dicht in den reellen Zahlen **R**. Mit Hilfe von Folgen lassen sich somit reelle (irrationale, transzendente) Zahlen konstruieren; z.B. ist:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \text{ (e als Eulersche Zahl).}$$

(Unendliche) Reihen mit einer Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ lassen sich aus der Folge der Partialsummen

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ bilden beim Übergang n -> ∞ als: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)_{n\in N}$ bzw. $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ gerade im Fall der Konvergenz, d.h. der Reihe als reeller Zahl.

Funktionen

Eine Abbildung f: D_f -> **R**, die jeder reellen Zahl x des (maximalen) Definitionsbereichs $D_f \subset$ **R** in eindeutiger Weise eine reelle Zahl y = f(x) aus dem Wertebereich $W_f \subset$ **R** zuordnet, heißt Funktion. Die Funktion f: D_f -> W_f ist surjektiv, d.h.: jedem $y\varepsilon W_f$ ist mindestens ein $x\varepsilon D_f$ zugeordnet. Die Funktion f: D_f -> **R** heißt injektiv, wenn für zwei verschiedene x_1, $x_2\varepsilon D_f$ auch deren Funktionswerte $f(x_1)$, $f(x_2)\varepsilon W_f$ verschieden sind. Die Funktion f: D_f -> W_f heißt bijektiv, wenn sie surjektiv und injektiv ist. In dem Fall existiert zu einer Funktion f(x) die Umkehrfunktion f^{-1}: W_f -> D_f mit $f^{-1}(f(x)) = x$ (Vertauschung x <-> y).
Die Analysis beschäftigt sich dann mit den folgenden (geschlossen darstellbaren) Funktionentypen: Potenzfunktionen, ganz rationale Funktionen (Polynomen), gebrochen rationale Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, trigonometrische und Arkusfunktionen, Hyperbel- und Areafunktionen. Daneben gibt es Funktionen in nur impliziter Darstellung F(x,y) =0, z.B. algebraische Funktionen vom Typ $p_n(x)y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + p_0(x) = 0$ mit Polynomen $p_0(x)$, … $p_n(x)$, u.a. $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ als Kurven der Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel).

Stetigkeit

Eine Funktion f: D_f -> **R** heißt an einer Stelle $x_0\varepsilon D_f$ stetig, wenn für jedes ε>0 ein δ>0 existiert, so dass aus $|x – x_0| < \delta$ die Beziehung

$$|f(x) – f(x_0)| < \varepsilon$$

folgt, d.h. wenn – unter Verallgemeinerung des Grenzwertbegriffs von Folgen $\{x_n\}_{n\varepsilon \mathbf{N}}$: $\lim_{n->\infty} x_n = x_0$ => $\lim_{n->\infty} f(x_n) = f(x_0)$ – gilt:

$$\lim_{x->x_0} f(x) = \lim_{\substack{x->x_0\\x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x->x_0\\x>x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Funktionsgrenzwert, linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert müssen im Fall der Stetigkeit übereinstimmen und gleich dem (somit an der Stelle x_0) definierten Funktionswert sein. Existiert der Funktionsgrenzwert, so auch der links- und rechtsseitige Grenzwert, die dann gleich sind. Existieren der links- und rechtsseitige Grenzwert und sind gleich, so existiert auch der Gesamtgrenzwert und es gilt Gleichheit. Liegt $x_0\varepsilon D_f$ am Rand des Definitionsbereichs, so entfällt entweder der links- oder rechtsseitige Grenzwert. Sollte in der obigen Gleichungskette nur eine Gleichheit nicht erfüllt sein, so ist die Funktion f(x) unstetig an der Stelle x_0. Unstetigkeiten gibt es, wenn an der reellen Stelle x_0 eine Lücke, eine Sprungstelle oder eine Polstelle vorliegt.
Für stetige Funktionen f(x) gilt der Zwischenwertsatz, d.h.: Auf einem Intervall [a; b] gibt es für jedes y mit f(a)≤y≤f(b) bzw. f(b)≤y≤f(a) mindestens eine Stelle $x_0\varepsilon$[a; b] mit $f(x_0) = y$.
Differenzierbare Funktionen sind stetig; Funktionen, die an einer Stelle x_0 unstetig sind, sind dort auch nicht differenzierbar. Stetige Funktionen sind integrierbar, unstetige Funktionen mit einer endlichen Anzahl von Lücken oder Sprüngen ebenfalls.

Differenziation und Integration

Die Differenzial- und Integralrechnung kreist um den Grenzwertbegriff der Ableitung einer differenzierbaren reellwertigen Funktion f: D_f -> **R** der Form y = f(x) (D_f als Definitionsbereich), d.h. es gilt: Die Ableitung an einer beliebigen Stelle $x\varepsilon D_f$ stellt sich als Grenzwert eines Differenzenquotienten von Sekantensteigungen durch den Punkt P(x|f(x)) gehender Geraden dar:

$$\lim_{x^*->x} \frac{f(x^*)-f(x)}{x^*-x} = f'(x)$$

und ergibt die Steigung der im Punkt P(x|f(x)) die Funktion f(x) berührenden (eindeutig bestimmten) Tangente (Ableitung als Tangentensteigung). Mit anderen Worten: Aus dem Differenzenquotienten wird die Ableitung als Differenzialquotient. Für die Ableitung gilt somit:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x->0} \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Für differenzierbare Funktionen gilt der Mittelwertsatz: Auf einem Intervall [a; b] gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \varepsilon (a; b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Weiter lassen sich durch Wiederholung der Differentiation die 2. Ableitung f‘‘(x), die 3. Ableitung f‘‘‘(x), … die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$, also Ableitungen höherer Ordnung bilden. Uneigentliche, unbestimmte Grenzwerte von Funktionen sind vom Typ $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ o.ä. und lassen sich, falls existent, mit Hilfe der Regeln von de L’Hospital berechnen.
Behandelt man den Differenzialquotienten dy/dx = f‘(x) wie einen Bruch, so ergibt sich z.B. der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung aus der Identität:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

durch Multiplikation mit dx:

$$dy = f'(x)dx$$

und Integration mit unbestimmtem Integral (unter Vernachlässigung der Integrationskonstanten; Riemann-, Lebesgue-Integral) als:

$$\int dy = \int f'(x)dx \quad (*).$$

Nun ist das Integral $\int dy$ ein Integral mit der Variablen y, so dass gilt:

$$\int dy = \int 1dy = y = f(x).$$

Die Beziehung (*) wird also zu:

$$f(x) = \int f'(x)dx,$$

womit gezeigt ist, dass das Integrieren die Umkehrung des Differenzierens ist, eben der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt. Differenziation („Ableiten“) und Integration („Aufleiten“) sind daher mathematisch-analytische Methoden, die in unterschiedlicher und doch sehr ähnlicher Weise auf eine differenzierbare Funktion f(x) angewendet werden können.
Dem entspricht auch die Spiegelbildlichkeit der Ableitungs- und Integrationsregeln, zumindest was Faktor-, Summen-, Potenzregel und die Regeln z.B. für einfache trigonometrische und Exponentialfunktionen betrifft. An Ableitungsregeln sind noch die Ketten-, Produkt- und Quotientenregel zu nennen, die beim Integrieren nur teilweise in der Substitutionsregel, partiellen Integration (Produktintegration) und der Integration mittels Partialbruchzerlegung eine Entsprechung finden. Es gibt Funktionen, die integriert nicht als geschlossener Funktionsterm darstellbar sind.

Nicht zuletzt ermöglicht das Differenzieren einer Funktion die Betrachtung des unendlich Kleinen der Ableitung als Tangentensteigung und der Steigung der Funktion in einem Punkt, während Integration die Funktion „global“ in den Blick nimmt. Es gilt daher, zum einen die Tangentengleichung in einem Funktionspunkt $P(x_0|f(x_0))$:

$$\text{t: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

zum anderen das bestimmte Integral (Fläche, Flächensaldo):

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

mit den Integrationsgrenzen a, b (Intervall [a; b]) und der Stammfunktion F(x) mit F‘(x) = f(x) bzw. $F(x) = \int f(x)dx + C$ (C als Integrationskonstante) betrachten zu können. Stammfunktionen sind auch Funktionen der oberen Grenze $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Anwendungen

Bei einer reellwertigen, differenzierbaren Funktion f: D_f -> **R** lässt sich nicht zuletzt auf der Grundlage der algebraischen Möglichkeiten des reellen Zahlenkörpers im Rahmen einer Funktionsuntersuchung (Kurvendiskussion) besondere Kurvenpunkte ermitteln, wobei die Kurve oder der Graph der Funktion f(x) das (etwa auf einer x-f(x)-Wertetabelle beruhende) Schaubild in einem kartesischen x-y-Koordinatensystem ist. Besondere Kurvenpunkte sind: Nullstellen (f(x) = 0), Punkte mit waagerechter Tangente bzw. Hoch- und Tiefpunkte (f‘(x) = 0), Wendepunkte (f‘‘(x) = 0), Unstetigkeitsstellen (Lücken, Sprungstellen, Polstellen); daraus resultierend ergibt sich das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktion; außerdem ist das Verhalten von f(x) für x -> -∞ bzw. x -> +∞ (waagerechte Asymptoten, Grenzkurven) zu analysieren, schließlich die Achsen- (zur y-Achse des Koordinatensystems, zu einer Achse x=a) und die Punktsymmetrie (zum Ursprung des Koordinatensystems, zu einem Punkt Z(a|b) im Koordinatensystem). Periodisch sind trigonometrische Funktionen.
Bestimmungsaufgaben errechnen zu einem vorgegebenen Funktionsansatz und zu vorgegebenen Eigenschaften einer Funktion über Gleichungen und (lineare) Gleichungssysteme den Funktionsterm f(x).

Ein Sonderfall der Bestimmung von Maxima oder Minima sind die Extremwertaufgaben, die u.a. mathematische Anwendungen und Sachverhalte lösen (Ansatz: f‘(x) = 0).
Im Bereich der Integration sind Flächenberechnungen (von Flächen zwischen Funktion f(x) und x-Achse: x_1, x_2 Nullstellen -> Flächeninhalt A = $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|$; zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x): x_1, x_2 Schnittstellen -> Flächeninhalt A = $\left|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx\right|$;), Bogenlängenberechnungen (eines Kurvenabschnitts der Funktion f(x): Länge l = $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$), Volumenberechnungen und Mantelflächenberechnungen (von Rotationskörpern, die durch Rotation einer Funktion f(x) um die x-Achse entstehen: x_1, x_2 Nullstellen -> Volumen V = $\pi \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2 dx$, Mantelflächeninhalt M = $2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$), uneigentliche Integrale

(1. Art: $\int_a^\infty f(x)dx$, 2. Art: $\int_a^b f(x)dx$ mit Polstelle der Funktion bei x = a oder x = b).

Taylorentwicklung, Potenzreihen

Ist eine Funktion f: D_f -> **R** an einer Stelle $x_0 \varepsilon D_f$ unendlich oft differenzierbar, so heißen die Terme:

$$T_0(x) = f(x_0),\ T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \text{ (Tangente)},$$

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2, \ldots$$

Taylorpolynome, der Term:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

Taylorreihe zur Funktion f(x) mit Entwicklungsmittelpunkt x_0. Die Taylorpolynome sind Näherungspolynome einer Funktion f(x), die Taylorreihe T(x) gehört zu den Potenzreihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$ und stimmt mit der vorgegebenen Funktion f(x) auf dem Konvergenzintervall (x_0-R; x_0+R) mit Konvergenzradius R überein. Somit gilt u.a.

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},\ \sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!},\ \cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \text{ auf ganz } \mathbf{R},\ \ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} x^i}{i} \text{ auf (-1; 1].}$$

Potenzreihen (und Taylorreihen) können auf dem gemeinsamen Konvergenzintervall addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden. Insbesondere ist das gliedweise Differenzieren und Integrieren möglich.

Fourierreihen

Eine 2π-periodische, auf dem Intervall [0, 2π] stückweise definierte, stetige und monotone Funktion f(x) mit endlich vielen Sprungstellen lässt sich in eine Fourrierreihe als unendliche trigonometrische Reihe entwickeln, d.h. es gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

mit den Koeffizienten: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx$.

Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen sind Gleichungen, die eine Funktion y(x) und deren Ableitungen y'(x), y''(x) … sowie von x abhängige Terme f(x) enthalten können. Die Differentialgleichungen sind durch Integration nach der Funktion y(x) aufzulösen (explizite, implizite Darstellung). Es sind dabei Integrationskonstanten und u.U. Anfangsbedingungen zu beachten. Die Ordnung n einer Differentialgleichung gibt die höchste vorkommende Ableitung $y^{(n)}(x)$ wider, der Grad gibt den Exponenten k an, mit dem die höchste Ableitung vorkommt, also: $(y^{(n)}(x))^k$. Zu unterscheiden sind homogene von inhomogenen Differenzialgleichungen; die Lösung einer Differenzialgleichung ist die Summe der allgemeinen und der partikulären Lösung; Anfangsbedingungen legen auftretende Integrationskonstanten fest.

Folgende Typen von Differenzialgleichungen können wie folgt gelöst werden:

$y'(x) = f(x)$: Lösung durch einfache Integration

$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$: Lösung durch Trennung der Variablen

$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$: Lösung von gleichgradigen Differenzialgleichungen durch Substitution

$y'(x) = f(ax + by + c)$: Lösung mit linearer Substitution

$y' + f(x)y = g(x)$: Lösung als lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = g(x)$: Lösung der linearen Differenzialgleichung mit Hilfe der Lösungen der charakteristischen Gleichung: $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$

<u>(Lineare) Differenzialgleichungssysteme</u> sind Systeme von durch Differenzialgleichungen verbundenen Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$, … Liegt z.B. ein inhomogenes lineares Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Form:

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x)$$
$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(x)$$

vor, so lassen sich die allgemeinen Lösungen über die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems, die partikulären durch spezielle Ansätze zu y_1, y_2 ermitteln.

<u>Laplace-Transformation</u>

Durch Zuweisung einer <u>Laplace-Transformierten</u> (Bildfunktion) F(s) zur <u>Originalfunktion</u> (Urbildfunktion) f(t) vermittels des Laplace-Transformationsoperators $\mathfrak{L}$ gilt:

$$f(t) \overset{\mathfrak{L}}{\leftrightarrow} F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

für reelle Parameter s. Die Transformation $\overset{\mathfrak{L}}{\leftrightarrow}$ heißt <u>Korrespondenz</u> ○—●, es gilt damit: f(t) ○—● F(s) oder: F(s) = $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ (Transformation) bzw. f(t) = $\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$ (Rücktransformation). Die Laplace-Transformation setzt die Existenz des die Bildfunktion F(s) definierenden (Laplace-) Integrals voraus, so dass etwa F(s) -> 0 bei s->∞ folgt. Das (uneigentliche) Integral existiert, wenn f(t) stückweise stetig und $|f(t)/e^{st}| \leq K$ mit reellem positiven K gilt. Transformation und Rücktransformation dienen dazu, mathematische Probleme, die im Urbild-/Originalbereich auftreten, (nach Transformation) im Bildbereich (als algebraische Gleichung) zu lösen und (nach Rücktransformation) die Lösung wieder im Originalbereich zu platzieren.
Dies gilt insbesondere für Probleme betreffend das Lösen von Differenzialgleichungen. Für lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ergibt sich z.B. die folgende Vorgehensweise:

Differenzialgleichung: y‘ + ay = g(t), Anfangswert y(0) -> Laplace-Transformation: $\mathfrak{L}\{y' + ay\} = \mathfrak{L}\{g(t)\}$ => $sY(s) - y(0) + aY(s) = G(s)$ -> Lösen der algebraischen Gleichung: $Y(s) = \frac{G(s)+y(0)}{s+a}$ -> Rücktransformation: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)+y(0)}{s+a}\right\}$.

<u>Literaturhinweise</u>: BUHLMANN, M., Mathematik im Studium. 250 Klausuraufgaben Analysis, 3 Bde., Essen 1989-1992 (Analysis); dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München ^{3}2003, S.118-125, 136-147 (Differenziation, Integration); HEUSER, H., Lehrbuch der Analysis (= Mathematische Leitfäden), 2 Bde., Stuttgart ^{4}1986, ^{2}1986 (Analysis); PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd.1, Wiesbaden ^{11}2007, S.137-603, Bd.2, Wiesbaden ^{11}2007, S.158-181, 433-684 (Analysis)