

Einleitung

Von der Axiomatik der natürlichen Zahlen  $\mathbf{N}$  ableitbar ist der Integritätsring der ganzen Zahlen  $\mathbf{Z}$ , der Addition „+“ und Multiplikation „·“ erlaubt, sowie der Körper der rationalen Zahlen  $\mathbf{Q}$ , der Brüche ganzer Zahlen. Im Folgenden steht die Konstruktion des Körpers der reellen Zahlen  $\mathbf{R}$  aus dem der rationalen Zahlen im Vordergrund. Zudem wird erörtert, ob die dabei aufgeführten mathematischen Konstruktionen im Schulunterricht als Herleitung der reellen Zahlen dienen können.

Rationale Zahlen

Vorausgesetzt sei die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbf{Q}$ .  $(\mathbf{Q}, +, \cdot, \leq)$  ist ein archimedisch angeordneter Körper.

Ein Tripel  $(K, +, \cdot)$  aus Menge und Verknüpfungen heißt Körper, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

$(K, +)$  ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:

- $K$  ist eine Menge mit Elementen  $a, b, c, \dots \in K$ .
- $+$  ist die Verknüpfung „Addition“ von Elementen  $a, b \in K$  mit:  $+$ :  $(a, b) \rightarrow a+b \in K$ .
- Die Verknüpfung  $+$  ist assoziativ:  $(a+b)+c = a+(b+c)$  für alle  $a, b, c \in K$ .
- Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element  $0 \in K$  mit:  $0+a = a+0 = a$  für alle  $a \in K$ .
- Für alle  $a \in K$  gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element  $-a \in K$  mit:  $a+(-a) = (-a)+a = 0$  mit neutralem Element  $0$ .
- Die Verknüpfung  $+$  ist kommutativ:  $a+b = b+a$  für alle  $a, b \in K$ .

$(K \setminus \{0\}, \cdot)$  ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:

- $\cdot$  ist die Verknüpfung „Multiplikation“ von Elementen  $a, b \in K$  mit:  $\cdot$ :  $(a, b) \rightarrow a \cdot b \in K$ .
- Die Verknüpfung  $\cdot$  ist assoziativ:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  für alle  $a, b, c \in K$ .
- Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element  $1 \in K$  mit:  $1 \neq 0$  und:  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$  für alle  $a \in K$ .
- Für alle  $a \in K$  mit  $a \neq 0$  gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element  $a^{-1} \in K$  mit:  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$  mit neutralem Element  $1$ .
- Die Verknüpfung  $\cdot$  ist kommutativ:  $a \cdot b = b \cdot a$  für alle  $a, b \in K$ .

Es gelten die Distributivgesetze:

- $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$  für alle  $a, b, c \in K$ .
- $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  für alle  $a, b, c \in K$ .

Ein Körper  $(K, +, \cdot)$  heißt ein archimedisch angeordneter Körper, wenn:

- eine totale Ordnung „ $\leq$ “ existiert als Relation mit:  $a \leq a$  (Reflexivität),  $a \leq b$  und  $b \leq a \Rightarrow a=b$  (Antisymmetrie),  $a \leq b$  und  $b \leq c \Rightarrow a \leq c$  (Transitivität),  $a \leq b$  oder  $b \leq a$  (Totalität),  $a, b, c \in K$ ,
- die Anordnungsaxiome gelten:  $a \leq b$  und  $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ ,  $0 \leq a$  und  $0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a \cdot b$ ,  $a, b \in K$ ,
- für jedes Element  $a \in K$  gilt:  $a \leq n$  mit  $n = 1+1+1+\dots+1$  ( $n$ -mal,  $n \in \mathbf{N}$ ).

Konstruktion der reellen Zahlen  $\mathbf{R}$  mittels Cauchyfolgen in  $\mathbf{Q}$ 

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  von Elementen  $a_n$  des Körpers  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$  heißt eine Cauchyfolge, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Auf der Menge der Cauchyfolgen in  $\mathbf{Q}$  wird zunächst eine Äquivalenzrelation „ $\sim$ “ definiert, derart dass gilt: Zwei Cauchyfolgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  heißen äquivalent:

$$(a_n) \sim (b_n) :\Leftrightarrow (a_n - b_n) \text{ ist eine Nullfolge in } \mathbf{Q}.$$

Sei dann  $\overline{(a_n)}$  die Klasse der zur Cauchyfolge  $(a_n)$  äquivalenten Cauchyfolgen. Man bezeichnet nun mit  $\mathbf{R}$ , also die Menge der reellen Zahlen, folgende Menge:

$$\mathbf{R} := \{ \overline{(a_n)} \mid (a_n) \text{ ist Cauchyfolge in } \mathbf{Q} \}.$$

Durch die Verknüpfungen „+“ mit:

$$\overline{(a_n)} + \overline{(b_n)} = \overline{(a_n + b_n)}$$

und „·“ mit:

$$\overline{(a_n)} \cdot \overline{(b_n)} = \overline{(a_n \cdot b_n)}$$

wird  $(\mathbf{R}, +, \cdot)$  zu einem Körper. Weiter wird durch „<“ eine Anordnung auf  $\mathbf{R}$  definiert mit:

$$\overline{(a_n)} < \overline{(b_n)} : \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \geq n_0 : b_n - a_n > \varepsilon_0.$$

Zusammen mit der Gleichheitsbeziehung „=“ erhält man mit  $(\mathbf{R}, +, \cdot, <)$  einen angeordneten Körper, der zudem noch folgende Eigenschaften aufweist:

- $\mathbf{Q}$  kann in  $\mathbf{R}$  eingebettet werden vermöge der Identität:  $i: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $i(q) = \overline{(q)}$  für alle  $q \in \mathbf{Q}$ ;
- $\mathbf{R}$  ist archimedisch angeordnet;
- Jede Cauchyfolge in  $\mathbf{R}$  konvergiert, d.h. besitzt einen Grenzwert;  $\mathbf{R}$  ist vollständig.

### Konstruktion der reellen Zahlen mittels Obermengen Dedekindscher Schnitte

Definiert werden die reellen Zahlen als:

$$\mathbf{R} = \{ A \mid A \text{ ist eine Menge mit den Eigenschaften:} \}$$

- $A \subseteq \mathbf{Q}$ ;
- $A \neq \emptyset$ ;
- $\forall x \in A \exists x' \in A : x' < x$ ;
- $A$  ist nach unten beschränkt;
- $\forall x, q \in \mathbf{Q} : x \in A, x < q \Rightarrow q \in A$ .

Auf  $\mathbf{R}$  werden Verknüpfungen „+“ und „·“ eingeführt wie folgt:

$$\begin{aligned} A+B &= \{x+y \mid x \in A, y \in B\} \\ A \cdot B &= \{x \cdot y \mid x \in A, y \in B\} \text{ (falls } A \geq 0, B \geq 0\text{),} \\ A \cdot B &= (-A) \cdot (-B) \text{ (falls } A < 0, B < 0\text{),} \\ A \cdot B &= -((-A) \cdot B) \text{ (falls } A < 0, B \geq 0\text{)} \end{aligned}$$

$$A \cdot B = -(A \cdot (-B)) \text{ (falls } A \geq 0, B < 0; A, B \in \mathbf{R}, 0 \text{ als neutrales Element der Gruppe } (\mathbf{R}, +)).$$

„≤“ ist eine Anordnung auf  $\mathbf{R}$ , die definiert ist als:

$$A \leq B : \Leftrightarrow B \subseteq A.$$

Es folgt:  $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$  ist ein angeordneter Körper. Die Vollständigkeit von  $\mathbf{R}$  folgt aus der Existenz der Schnitzzahl  $S$  eines beliebigen Dedekindschen Schnittes in  $\mathbf{R}$ . Dabei heißt ein Paar  $(U^*, O^*)$  von Teilmengen in  $\mathbf{R}$  ein Dedekindscher Schnitt genau dann, wenn gilt:

- $U^*, O^* \subseteq \mathbf{R}$ ;
- $U^*, O^* \neq \emptyset$ ;
- $U^* \cup O^* = \mathbf{R}$ ;
- $\forall A \in U^*, B \in O^* : A \leq B$ .

### Didaktische Analyse der beiden Konstruktionsverfahren

Geht man davon aus, dass die reellen Zahlen gewöhnlicherweise in der Mittelstufe (Sekundarstufe I) eingeführt werden, so würden die zwei hier dargelegten Konstruktionsverfahren den Schülern doch einige Schwierigkeiten bereiten. Gründe dafür sind: Probleme bei der Identifizierung reeller Zahlen durch Klassen von Cauchyfolgen bzw. Obermengen; großer Formalismus (z.B. bei der Quantorenschreibweise); großer Zeitaufwand bei der vollständigen Durchführung einer Konstruktion; Schwierigkeiten, die Vollständigkeit der reellen Zahlen zu (er-)klären. Doch sollen auch nicht die Vorteile der Verfahren ver-

schwiegen werden. So basiert die Konstruktion von  $\mathbf{R}$  mittels Obermengen und Dedekindscher Schnitte teilweise auf einfachen mengentheoretischen Grundlagen (was sich besonders vorteilhaft beim Beweis der Vollständigkeit auswirkt). Das Verfahren mittels Cauchyfolgen könnte in der Oberstufe mit der Differentialrechnung und im Zusammenhang mit Folgen durchgeführt werden. In jedem Fall ist aber eine didaktische Reduktion auf die Belange der Schüler notwendig.

## Reelle Zahlen

Die oben genannten Konstruktionen führen auf den Körper der reellen Zahlen  $(\mathbf{R}, +, \cdot)$  mit der Addition und Multiplikation als Rechenoperationen induzierende Verknüpfungen zwischen den Elementen, der 0 als neutralem Element bzgl. der Addition, der 1 als neutralem Element bzgl. der Multiplikation, der algebraischen kommutativen Gruppen  $(\mathbf{R}, +)$  und  $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  (Assoziativgesetz, Gesetz der inversen Elemente, Kommutativgesetz) sowie den die Verknüpfungen verbindenden Distributivgesetzen. Auf dem Zahlbereich der reellen Zahlen lässt sich zudem vermittels „ $\leq$ “ eine totale Ordnung definieren, so dass im geordneten Körper  $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$  reelle Zahlen miteinander vergleichbar sind (bei  $-\infty < x < \infty$  für jede reelle Zahl  $x$ ; abgeschlossene, offene, halboffene Intervalle  $[a; b]$ ,  $(a; b]$ ,  $[a; b)$ ,  $(a; b)$  für reelle Zahlen  $a, b$  mit:  $a < b$ ) und neben Gleichungen auch Ungleichungen algebraisch umgeformt werden können. Auch definieren der Körper der reellen Zahlen einen metrischen Raum, d.h.: der Betrag  $|\cdot|$  der Differenz zweier reeller Zahlen definiert eine (positiv definite, symmetrische) Metrik (mit Dreiecksungleichung), die wiederum die für die reellen Zahlen typische Topologie (eines Hausdorff-Raums) induziert (Trennungsaxiom  $T_2$ ). Topologie und Ordnung entsprechen dabei einander. Zudem sind die reellen Zahlen vollständig, d.h.: die Grenzwerte von Folgen reeller Zahlen sind wieder reell.

Literaturhinweise: dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München <sup>3</sup>2003, S.46-51 (reelle Zahlen); HEUSER, H., Lehrbuch der Analysis (= Mathematische Leitfäden), Tl.1: Stuttgart <sup>4</sup>1986, S.29-32, 36ff (reelle Zahlen)

---

www.michael-buhlmann.de / Michael Buhlmann, 04.1982-02.2021