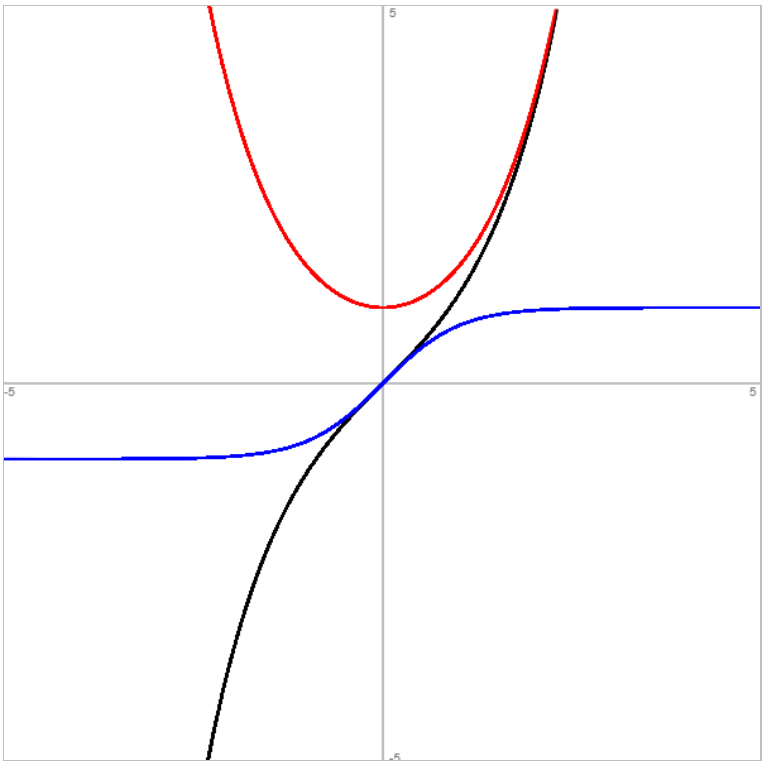
Mathematik > Analysis > Hyperbelfunktionen

Einleitung

Mit der Eulerschen Zahl $e = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ergibt sich die auf allen reellen Zahlen x definierte, stetige und differenzierbare natürliche Exponentialfunktion y = e^x. Die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion ist: y‘ = e^x. Mit y = e^x lassen sich die sog. Hyperbelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens hyperbolicus wie folgt:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

definieren. Alle Hyperbelfunktionen sind auf ganz **R** erklärt (tanh(x): e^x, e^{-x} > 0), dort stetig und differenzierbar.



y = sinh(x), y= cosh(x), y = tanh(x)

Eigenschaften

Wegen e^x -> +∞ für x -> +∞ und e^x -> 0 für x -> -∞ und folglich e^{-x} -> 0 für x -> +∞ und e^{-x} -> +∞ für x -> -∞ folgt für die Hyperbelfunktionen als Verhalten für betragsmäßig große x:

x -> +∞: sinh(x) -> +∞; x -> -∞: sinh(x) -> -∞
x -> +∞: cosh(x) -> +∞; x -> -∞: cosh(x) -> +∞
x -> +∞: tanh(x) -> 1; x -> -∞: tanh(x) -> -1,

Letzeres auf Grund von:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$\tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\xrightarrow[x->-\infty]{}\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

Es ergeben sich damit die folgenden <u>Definitions- und Wertebereiche</u> der Hyperbelfunktionen:

D_{sinh} = **R**, W_{sinh} = **R**
D_{cosh} = **R**, W_{cosh} = [1; +∞)
D_{tanh} = **R**, W_{tanh} = (-1; 1).

Zudem verfügen die Hyperbelfunktion über <u>Symmetrieeigenschaften</u>. Die Kurve des Sinus hyperbolicus y = sinh(x) ist punktsymmetrisch zum Ursprung des x-y-Koordinatensystems, die des Kosinus hyberbolicus y = cosh(x) achsensymmetrisch zur y-Achse des x-y-Koordinatensystems. Folglich ist der Tangens hyperbolicus y = tanh(x) als Bruch des punktsymmetrischen sinh(x) und achsensymmetrischen cosh(x) wieder punktsymmetrisch zum Ursprung des x-y-Koordinatensystems.

Zwischen den Termen der Hyperbelfunktionen bestehen <u>Beziehungen</u> wie etwa:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

wegen:

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=$$

$$\left(\left(\frac{e^x}{2}\right)^2+2\cdot\frac{e^x}{2}\cdot\frac{e^{-x}}{2}+\left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^2\right)-\left(\left(\frac{e^x}{2}\right)^2-2\cdot\frac{e^x}{2}\cdot\frac{e^{-x}}{2}+\left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^2\right)=$$

$$\frac{e^{2x}}{4}+\frac{1}{2}+\frac{e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}}{4}+\frac{1}{2}-\frac{e^{-2x}}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

<u>Ableitungen</u>

Alle Hyberbelfunktionen sind differenzierbar, die <u>Ableitungen</u> bestimmen sich als:

f(x) = sinh(x) = $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ => f'(x) = $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ = cosh(x)

f(x) = cosh(x) = $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ => f'(x) = $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ = sinh(x)

f(x) = tanh(x) = $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ => f'(x) = $\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{(e^x+e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}-\frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$ = 1 – $\tanh^2$(x).

Aus den Ableitungen ergibt sich u.a., dass die Funktionen f(x) = sinh(x) und f(x) = tanh(x) streng monoton steigend sind (f'(x) > 0).

<u>Umkehrfunktionen</u>

Wegen der strengen steigenden Monotonie der Funktionen f(x) = sinh(x) und f(x) = tanh(x) (Injektivität der Funktionen) existieren hier die <u>Areafunktionen</u> als Umkehrfunktionen der beiden (bijektiven) Hyperbelfunktionen auf Definitions- und Wertebereich (Surjektivität der Funktionen: $D_{Umkehrfunktion}$ = $W_{Funktion}$, $W_{Umkehrfunktion}$ = $D_{Funktion}$) vermöge:

f(x) = sinh(x): D_{sinh} = **R**, W_{sinh} = **R** =>

f^{-1}(x) = arsinh(x) = $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, D_{arsinh} = **R**, W_{arsinh} = **R** f(x) = tanh(x): D_{tanh} = **R**, W_{tanh} = (-1; 1) =>

f^{-1}(x) = artanh(x) = $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, D_{artanh} = (-1; 1), W_{artanh} = **R**.

Dabei ergibt sich der Areasinus aus dem Sinus hyperbolicus nach Vertauschen der Variablen x und y und dem Auflösen der Funktionsgleichung nach y:

y = sinh(x) -> x = sinh(y) ⇔ $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ ⇔ $2x = e^y - e^{-y}$ ⇔ $2xe^y = e^{2y} - 1$ ⇔

$0 = e^{2y} - 2xe^y - 1 \Leftrightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2+1}}{2} \Leftrightarrow$

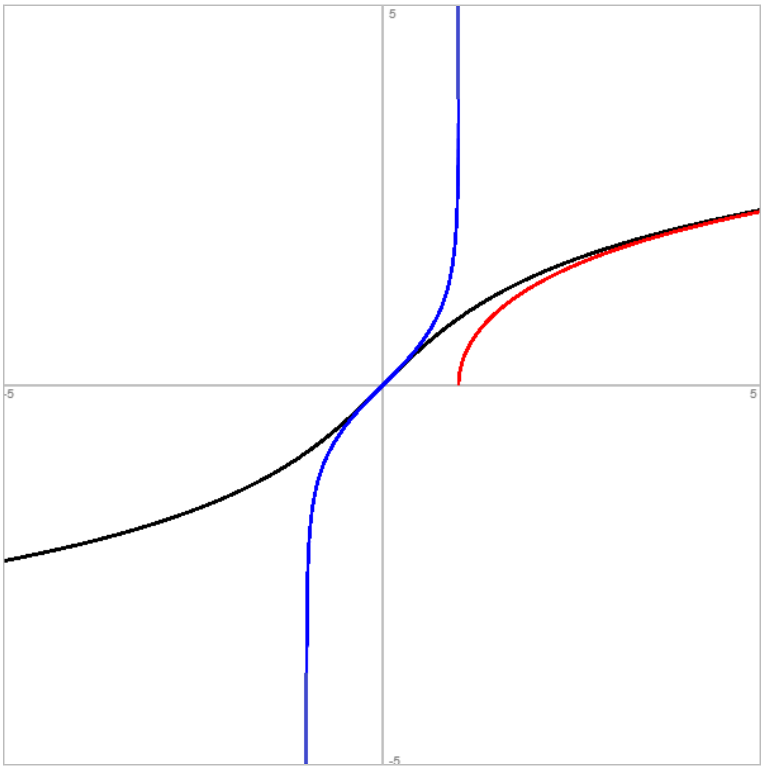
$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$ => $e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Entsprechendes gilt für den Tangens hyperbolicus und die Umkehrfunktion:

y = tanh(x) -> x = tanh(y) ⇔ $x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^y(e^y - e^{-y})}{e^y(e^y + e^{-y})} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Leftrightarrow x(e^{2y}+1) = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow$

$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow x = e^{2y} - xe^{2y} - 1 \Leftrightarrow 1 + x = e^{2y} - xe^{2y} \Leftrightarrow 1 + x = (1-x)e^{2y} \Leftrightarrow$

$\frac{1+x}{1-x} = e^{2y} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.



y = arsinh(x), y= arcosh(x), y = artanh(x)

Der Kosinus hyberbolicus f(x) = cosh(x) ist auf dem Intervall (-∞; 0) monoton fallend, auf dem Intervall (0; +∞) monoton steigend (und daher insgesamt nicht injektiv). Beschränkt man sich auf D_{cosh} = [0; +∞), so liegt eine streng monoton steigende Funktion mit W_{cosh} = [1; +∞) vor (Injektivität, Surjektivität), folglich (Bijektivität) lässt sich der Areacosinus als Umkehrfunktion wie folgt bestimmen:

y = cosh(x) -> x = cosh(y) ⇔ $x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ ⇔ $2x = e^y + e^{-y}$ ⇔ $2xe^y = e^{2y} + 1$ ⇔

$0 = e^{2y} - 2xe^{y} + 1 \Leftrightarrow e^{y} = \frac{2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2 - 1}}{2} \Leftrightarrow$

$e^{y} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ => $e^{y} = x + \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

Zusammenfassend ergibt sich:

f(x) = cosh(x): D_{cosh} = [0; +∞), W_{cosh} = [1; +∞) =>

f^{-1}(x) = arcosh(x) = $\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, D_{arcosh} = [1; +∞), W_{arcosh} = [0; +∞).

Potenzreihen

Taylorentwicklungen mit Entwicklungsmittelpunkt x_0 = 0 führen auf die Darstellung der Hyperbelfunktionen als (Taylor- und) Potenzreihen. Und zwar gilt:

sinh(x) = $\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$

cosh(x) = $\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$

tanh(x) = $\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{2^{2i}(2^{2i} - 1)}{(2i)!} \cdot B_{2i} x^{2i-1}$ (mit B_i als Bernoullizahlen).

Literaturhinweise: PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd.1, Wiesbaden [11]2007, S.286-293 (Hyperbelfunktionen)

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 11.2020