

Johannes Kepler

Geboren in der südwestdeutschen Reichsstadt Weil der Stadt am 27. Dezember 1571 als Sohn des niederadligen Vaters Heinrich Kepler und von dessen Ehefrau Katharina, erlebte Johannes eine eher unruhige Kindheit, die ihn nach Leonberg (1577/79) und Ellmendingen (1580/82) verschlug. Immerhin führte die protestantisch-schulische Ausbildung im württembergischen Herzogtum Kepler zum Eintritt in die Adelberger Klosterschule (1584/86), dann ins evangelische Seminar Maulbronn (1586/89) und an die Universität Tübingen bzw. das dortige evangelische Stift, wo er – durch ein Stipendium unterstützt – die *artes liberales* und Theologie studierte, freilich mit großem Interesse an Mathematik, Astronomie und Naturwissenschaften (1589/94). 1591 absolvierte Kepler die Magisterprüfung, 1594 wurde er Lehrer für Mathematik an der evangelischen Stiftsschule in Graz, wo er – überschattet von der Gegenreformation unter dem österreichischen Herzog Ferdinand (1590-1637) – bis 1600 blieb. In seiner Grazer Zeit gab Kepler sein Erstlingswerk „Weltgeheimnis“ (*Mysterium Cosmographicum* 1596; Planetenbahnen im heliozentrischen Sonnensystem vermöge eines Polyedermodells [Platonische Körper]) heraus, er heiratete Barbara Müller (1597) und kam in Kontakt mit dem berühmten, damals in Böhmen lebenden dänischen Astronom Tycho Brahe (1600). Es schließt sich die Prager Zeit Keplers an (1600/12). Er und Brahe sollten die „Rudolfinischen Tafeln“ – benannt nach Kaiser Rudolf II. (1576-1612) – zur astronomischen Vorausberechnung der Positionen von Sonne, Mond und Planeten ausarbeiten, doch starb Brahe schon 1601, Kepler wurde nun „kaiserlicher Mathematiker“. Er beschäftigte sich mit der Optik als Voraussetzung astronomischer Beobachtung (*Ad Vitellionem Paralipomena* als „Optischer Teil der Astronomie“ 1604), arbeitete mit dem Uhrmacher Jost Bürgi zusammen (Observatoriums-, Globusuhren) und beobachtete den Ausbruch einer (der „Keplerschen“) Supernova in der Milchstraße (1604/05) (*Gründtlicher Bericht von einem ungewöhnlichen Newen Stern* 1604; „Über den neuen Stern im Fuß des Schlangenträgers“ 1606) sowie den Halleyschen Kometen (1607) (*Ausführlicher Bericht von dem newlich im Monate Septembri und Octobri diß 1607. Jahrs erschienenen Haarstern oder Cometen* 1609; *De cometis libri tres* 1619). Das Hauptwerk Keplers war aber seine „Neue Astronomie“ (*Nova Astronomia* 1609), in der mit Bezug auf den Planeten Mars („Marswerk“) zwei der drei Keplerschen Gesetze erstmals auftauchen. Ab 1610 benutzte Kepler für seine Beobachtungen das neu erfundene Teleskop, seine Kontakte zu Galileo Galilei bestärkten ihn in der Verwendung des neuen astronomischen Instruments (Sonnenflecken, Milchstraße, Jupitermonde, Saturn). Abseits der Astronomie beschäftigte sich Kepler mit dem regelmäßigen Sechseck (*Strena sive De nive sexangula* als „Neujahrgabe oder: Über den sechseckigen Schnee“ 1611) und mit Naturphilosophie und Astrologie (*Tertius Interveniens*). Zudem veröffentlichte er die Schrift *Dioptrice* (1611) und damit eine wissenschaftliche Grundlegung der Optik als Teilgebiet der Physik. Der Tod seiner Ehefrau Barbara (1611) ließ Kepler als Witwer mit zwei Töchtern und dem Sohn Ludwig zurück, nach Absetzung und Tod Kaiser Rudolfs II. (1612) fand der Astronom im oberösterreichischen Linz eine neue Wirkungsstätte (1612/26). Auch hier arbeitete er – in Diensten des Kaisers Matthias (1612-1619) – an den „Rudolfinischen Tafeln“, deren Herausgabe sich aber immer wieder verzögerte. Daneben beschäftigte er sich mit der kartografischen Erfassung Oberösterreichs (*Bericht von der Landmappa* 1616; Karte 1628), engagierte sich als Protestant für den 1582 eingeführten Gregorianischen Kalender (Regensburger Reichstag 1613), geriet in Konflikt mit der evangelischen Kirchenbehörde Oberösterreichs (1613) und betrieb erfolgreich seine Heirat mit Susanna Reuttinger (1613), von der er zwei Töchter hatte; Querelen gab es daneben um Keplers Mutter Katharina, die als Hexe verdächtigt wurde (1616/22). Die Schrift „Neue Stereometrie der Fässer“ (1615) enthält die berühmte Keplersche Fassregel, es folgten der „Abriss der

copernicanischen Astronomie“ (1617) als Abhandlung zur Himmelsmechanik und Keplers „Weltharmonik“ (*Harmonice mundi* 1619), die das 3. Keplersche Gesetz beinhaltet, aber auch geometrische und musiktheoretische Überlegungen (Harmoniebegriff). Nach den Verheerungen des oberösterreichischen Aufstands protestantischer Bauern (1626) und auch wegen des anstehenden Drucks der „Rudolfinischen Tafeln“ verließen Kepler und seine Familie Linz und zogen nach Ulm, wo die umfangreichen *Tabulae Rudolfinae* – mitten im Dreißigjährigen Krieg (1618-1648) – entstanden (1627; Frankfurter Buchmesse 1627). Erst 1628 konnte sich Kepler, der damals in engem Kontakt zum kaiserlichen Feldherrn Wallenstein stand, mit seiner Familie im schlesischen Sagan niederlassen. Seine letzten zwei Lebensjahre verbringt er u.a. mit Ephemeridenrechnungen (*De raris mirisque anni 1631 Phaenomenis* als „Über die seltenen und wunderbaren Ereignisse des Jahres 1631“ 1629; Merkur- und Venustransit); ein Angebot der Universität Rostock lehnte er ab, dafür verfügte er nun über eine eigene Druckerei. Von seiner letzten Reise über Leipzig nach Regensburg sollte er jedoch nicht mehr zurückkehren. Johannes Kepler starb am 15. November 1630 in Regensburg an einer fiebrigen Erkrankung; sein Leichnam wurde drei Tage später auf dem lutherischen Friedhof südlich der Stadtmauer beerdigt, das Grab selbst 1632/34 in den Wirren des Krieges zerstört. Die Familie Keplers blieb wirtschaftlich verarmt zurück, ausstehende Löhne konnten nur zu einem geringen Teil eingetrieben werden, Keplers postum erschienene Schrift „Der Traum oder: Mond-Astronomie“ (*Somnium sive astronomia lunaris* 1634) sollte die wirtschaftliche Situation verbessern helfen. Die astronomischen und physikalischen Publikationen Keplers wurden unterschiedlich in der damaligen und späteren Gelehrtenwelt aufgenommen. Der Philosoph Thomas Hobbes und der Astronom Thomas Streete rezipierten Kepler; Isaac Newton verwendete für seine „Mathematischen Prinzipien der Naturphilosophie“ die Keplerschen Gesetze, Gottfried Wilhelm Leibniz stand Kepler positiv gegenüber. Das 19. Jahrhundert sah in Kepler nicht nur den Astronomen, sondern auch den Naturphilosophen und idealen Forscher (Georg Wilhelm Friedrich Hegel, Friedrich W.J. Schelling), das 20. Jahrhundert ging auf die „Keplersche Wende“ der frühneuzeitlichen Erforschung der Natur ein (Max Caspar, Ernst Cassirer), die Person Keplers spielt auch in der modernen Literatur und Musik eine Rolle (Paul Hindemith, Friedrich Hölderlin).

Keplersche Fassregel

Die von Kepler gefundene Fassregel gehört zum Repertoire der Integralrechnung innerhalb der mathematischen Analysis. Für eine Funktion $f(x)$ erlangt man im Allgemeinen durch Integrieren eine Stammfunktion $F(x)$, die abgeleitet wieder $f(x)$ ergibt ($F'(x) = f(x)$). Für das bestimmte Integral, das u.U. mit dem Flächeninhalt zwischen einer (nichtnegativen) Funktion $f(x)$ und der x -Achse auf einem x -Achsen-Intervall $[a; b]$ identifiziert werden kann, ergibt sich mit der Stammfunktion $F(x)$ und den Integrationsgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Nicht immer existieren allerdings Stammfunktionen $F(x)$ in geschlossener Form, so dass in solch einem Fall eine näherungsweise Berechnung des bestimmten Integrals (numerische Integration) angebracht ist. Manchmal ist zudem die näherungsweise Berechnung schneller, als das bestimmte Integral über analytische Methoden der Integration zu lösen. Dies gelingt z.B. der Simpsonregel für Integrale, gerade wenn diese verkettet wird. Ein Vorläufer und Spezialfall der Simpsonregel ist dann die Keplersche Fassregel.

Die Keplersche Fassregel als Spezialfall der einfachen (nicht verketteten) Simpsonregel ergibt sich für Volumenintegrale aus den nachstehenden Überlegungen. Bekanntlich berechnet sich das Volumenintegral für eine Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a; b]$ als:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Die einfache Simpsonregel liefert in diesem Fall für die Funktion $[f(x)]^2$ die Näherung:

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \approx \frac{b-a}{6} \pi \left[[f(a)]^2 + 4\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]^2 + [f(b)]^2 \right]$$

Dies entspricht aber der Keplerschen Fassregel:

Keplersche Fassregel für Volumenintegrale

$$V = \frac{h}{6} \left[A_a + 4A_{\frac{a+b}{2}} + A_b \right]$$

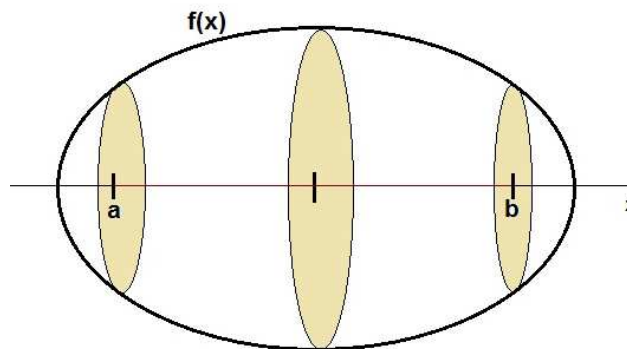
mit: Fasshöhe $h = b-a$,

unterer Fassfläche $A_a = \pi[f(a)]^2$,

mittlerem Fassquerschnitt $A_{\frac{a+b}{2}} = \pi\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]^2$,

oberer Fassfläche $A_b = \pi[f(b)]^2$

Dabei errechnet sich die Kreisfläche als $A = \pi r^2$ mit r als Kreisradius.



Beispiele (Keplersche Fassregel): a) Die Ellipsenfunktion $f(x) = 0,5\sqrt{1-x^2}$ beschreibe auf dem Intervall $[-0,8; 0,8]$ bei Rotation um die x -Achse einen fassähnlichen Körper mit Höhe $h = 1,6$ m, maximalem Querschnittsradius $f(0) = 0,5$ m und dem (unteren, oberen) Radius $f(-0,8) = f(0,8) = 0,3$ m. Das Integral berechnet sich exakt als:

$$V = \pi \int_{-0,8}^{0,8} [f(x)]^2 dx = 2\pi \int_0^{0,8} [0,5\sqrt{1-x^2}]^2 dx = 2\pi \int_0^{0,8} 0,25(1-x^2) dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{0,8} = \frac{118}{375} \pi$$

Es gilt also: $V = 0,9886 \text{ m}^3 = 988,6 \text{ l}$. Mit der Keplerschen Fassregel ergibt sich auf Grund von $h = 1,6$, $A_{-0,8} = A_{0,8} = \pi \cdot 0,3^2 = 0,09\pi$ und $A_0 = \pi \cdot 0,5^2 = 0,25\pi$:

$$V_F = \frac{1,6}{6} [0,09\pi + 4 \cdot 0,25\pi + 0,09\pi] = \frac{1,6 \cdot 1,18}{6} \pi = \frac{118}{375} \pi,$$

also ebenfalls der exakte Wert des Volumenintegrals, so dass die Fassregel (einfache Simpsonregel) in diesem Fall sehr gut arbeitet.

b) Die Kugel mit Radius $r = 3$ [LE] entsteht durch Rotation der Kurve $x^2 + y^2 = 3^2$ bzw. des positiven Astes der Funktion $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ um die x -Achse. Das Volumen der Kugel errechnet sich gemäß der Formel $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ als: $V = 36\pi$ [VE]. Nach der Keplerschen Fassregel ergibt sich bei

$a = -3, b = 3, (a+b)/2 = 0$ mit $f(-3) = f(3) = 0, h = 3 - (-3) = 6$ sowie $f(0) = 3$ das Kugelvolumen ebenfalls als:

$$V_F = \frac{6}{6} [0 + 4 \cdot 3^2 \cdot \pi + 0] = 36\pi \text{ [VE]}.$$

c) Für $f(x) = x^3 + 8$ errechnet sich auf dem Intervall $[-2; 1]$ das Volumen des Rotationskörpers exakt als:

$$V = \pi \int_{-2}^1 [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-2}^1 [x^3 + 8]^2 dx = \pi \int_{-2}^1 [x^6 + 16x^3 + 64] dx = \pi \left[\frac{x^7}{7} + 4x^4 + 64x \right]_{-2}^1 = \frac{1053}{7} \pi$$

bzw.:

$$V \approx 472,5853 \text{ [VE]}.$$

Die Keplersche Fassregel ergibt für $a = -2, b = 1, (a+b)/2 = -0,5, f(-2) = 0, f(-0,5) = 7,875, f(1) = 9, h = 3$ den Wert:

$$V_F = \frac{3}{6} [0 + 4 \cdot 7,875^2 \cdot \pi + 9^2 \cdot \pi] = \frac{5265}{32} \pi \approx 516,8902 \text{ [VE]}.$$

Die absolute Abweichung zwischen den so errechneten Volumina beträgt $|V - V_F| = 44,3049$, die relative Abweichung bestimmt sich als: $\frac{|V - V_F|}{V} = 0,09375 = 9,375\%$ Die Keplersche Fassregel verursacht mithin einen großen Fehler bei der Volumenberechnung (m = Meter, l = Liter, LE = Längeneinheiten, VE = Volumeneinheiten).

Literaturhinweise: dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München ³2003, S.156f (Keplersche Fassregel); POSCH, T., Johannes Kepler. Die Entdeckung der Weltharmonie (= Besondere Wissenschaftliche Reihe), Darmstadt 2017 (Johannes Kepler)