Michael Buhlmann

Mathematatik > Analysis > Integrale > Integrale vom Typ $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$

<u>Einführung</u>

Lässt sich eine Funktion f(x) darstellen als Produkt aus einem Polynom (ganz rationaler Funktion) und einer natürlichen Exponentialfunktion, so kann statt mit (mehrfacher) Produktintegration auch mit einem linearen Gleichungssystem die Stammfunktion oder das unbestimmte Integral ermittelt werden. Wir setzen dabei eine Funktion f(x) vom Typ

$$f(x) = (\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0)\cdot e^{rx}$$

mit vorgegebenen reellen Zahlen α_0, α_1, … α_n, $r\neq 0$ voraus, die Stammfunktion F(x) ist vom selben Typ mit:

$$F(x) = (a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0)\cdot e^{rx}$$

bei zu bestimmenden a_0, a_1, … a_n. Funktion und Stammfunktion enthalten als Faktoren Polynome vom selben Grad n, so dass n+1 a_i, i=0, …n, zu ermitteln sind.
Dazu leiten wir die Stammfunktion F(x) gemäß der Produktregel ab und erhalten:

$$f(x) = F'(x) = (na_n x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1)\cdot e^{rx} + r(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0)\cdot e^{rx} =$$
$$(ra_n x^n+(na_n+ra_{n-1})x^{n-1}+((n-1)a_{n-1}+ra_{n-2})x^{n-2}+\ldots+(a_1+ra_0))\cdot e^{rx}$$

und damit eine weitere Darstellung der Funktion f(x). Die Polynome in den beiden Funktionstermen von f(x) lassen sich vergleichen, der Koeffizientenvergleich führt auf das folgende <u>lineare Gleichungssystem</u>:

$$\begin{array}{ll}
ra_n & = \alpha_n \\
na_n+ra_{n-1} & = \alpha_{n-1} \\
(n-1)a_{n-1}+ra_{n-2} & = \alpha_{n-2} \\
\ldots & \\
(k+1)a_{k+1}+ra_k & = \alpha_k \\
\ldots & \\
a_1+ra_0 & = \alpha_0,
\end{array}$$

einem (n+1)x(n+1)-Gleichungssystem mit eindeutiger Lösung wegen der Existenz der Stammfunktion F(x). Tabellarisch ergibt sich das Anfangstableau des linearen Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} r & 0 & 0 & \ldots & & 0 & \alpha_n \\ n & r & 0 & \ldots & & 0 & \alpha_{n-1} \\ \ldots & & & & & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & r & \alpha_0 \end{array}\right).$$

Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist also in der Hauptdiagonale nur mit r besetzt, die untere Nebendiagonale mit den Zahlen n, n-1, n-2, … 1. Die Lösungen a_0, a_1, a_2, … a_n des Gleichungssystems lassen sich dadurch recht einfach „von oben nach unten" bestimmen auf Grund der (impliziten, expliziten) Lösungsformel:

$$a_n = \frac{\alpha_n}{r},\ a_k = \frac{\alpha_k - (k+1)a_{k+1}}{r},\ k = n-1, n-2, \ldots 0\ (*)$$

$$a_k = \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i \cdot \frac{(k+i)!}{k!} \cdot \frac{\alpha_{k+i}}{r^{i+1}},\ k = 0, 1, 2, \ldots n\ (**)$$

Integrale von Funktionen vom Typ $f(x) = x^n e^{rx}$

Die Funktion $f(x) = x^n e^{rx}$, $n \varepsilon \mathbf{N}$, soll nun integriert werden. Wegen $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n = 1$ ergibt sich nach (**):

$$a_k = \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i \cdot \frac{(k+i)!}{k!} \cdot \frac{\alpha_{k+i}}{r^{i+1}} = (-1)^{n-k} \cdot \frac{n!}{k!} \cdot \frac{1}{r^{n-k+1}},\ k = 0, 1, 2, \ldots n\ (***).$$

D.h., es ist:

$$a_n = \frac{1}{r}$$

$$a_{n-1} = -n\frac{1}{r^2}$$

$$a_{n-2} = n(n-1)\frac{1}{r^3}$$

$$a_{n-3} = -n(n-1)(n-2)\frac{1}{r^4}$$

usw.

Tabellarisch lässt sich dies hinsichtlich der Stammfunktionen wie folgt zusammenfassen:

Tabelle 1:

Funktion f(x) =	**Stammfunktion** F(x) =
e^{rx}	$\frac{1}{r}e^{rx}$
xe^{rx}	$\frac{1}{r}\left(x-\frac{1}{r}\right)e^{rx}$
x^2e^{rx}	$\frac{1}{r}\left(x^2-\frac{2}{r}x+\frac{2}{r^2}\right)e^{rx}$
x^3e^{rx}	$\frac{1}{r}\left(x^3-\frac{3}{r}x^2+\frac{6}{r^2}x-\frac{6}{r^3}\right)e^{rx}$
x^4e^{rx}	$\frac{1}{r}\left(x^4-\frac{4}{r}x^3+\frac{12}{r^2}x^2-\frac{24}{r^3}x+\frac{24}{r^4}\right)e^{rx}$
x^5e^{rx}	$\frac{1}{r}\left(x^5-\frac{5}{r}x^4+\frac{20}{r^2}x^3-\frac{60}{r^3}x^2+\frac{120}{r^4}x-\frac{120}{r^5}\right)e^{rx}$
x^6e^{rx}	$\frac{1}{r}\left(x^6-\frac{6}{r}x^5+\frac{30}{r^2}x^4-\frac{120}{r^3}x^3+\frac{360}{r^4}x^2-\frac{720}{r^5}x+\frac{720}{r^6}\right)e^{rx}$
x^7e^{rx}	$\frac{1}{r}\left(x^7-\frac{7}{r}x^6+\frac{42}{r^2}x^5-\frac{210}{r^3}x^4+\frac{840}{r^4}x^3-\frac{2520}{r^5}x^2+\frac{5040}{r^6}x-\frac{5040}{r^7}\right)e^{rx}$
x^8e^{rx}	$\frac{1}{r}\left(x^8-\frac{8}{r}x^7+\frac{56}{r^2}x^6-\frac{336}{r^3}x^5+\frac{1680}{r^4}x^4-\frac{6720}{r^5}x^3+\frac{20160}{r^6}x^2-\frac{40320}{r^7}x+\frac{40320}{r^8}\right)e^{rx}$
x^9e^{rx}	$\frac{1}{r}\left(x^9-\frac{9}{r}x^8+\frac{72}{r^2}x^7-\frac{504}{r^3}x^6+\frac{3024}{r^4}x^5-\frac{15120}{r^5}x^4+\frac{60480}{r^6}x^3-\frac{181440}{r^7}x^2+\frac{362880}{r^8}x-\frac{362880}{r^9}\right)e^{rx}$
…	

Integrale vom Typ $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$

Mit r = -1 ergibt sich aus der Tabelle 1 die nachstehende Tabelle:

Tabelle 2:

Funktion f(x) =	**Stammfunktion** F(x) =
e^{-x}	$-e^{-x}$
xe^{-x}	$(-x-1)e^{-x}$
x^2e^{-x}	$(-x^2-2x-2)e^{-x}$
x^3e^{-x}	$(-x^3-3x^2-6x-6)e^{-x}$
x^4e^{-x}	$(-x^4-4x^3-12x^2-24x-24)e^{-x}$

x^5e^{-x}	$\left(-x^5-5x^4-20x^3-60x^2-120x-120\right)e^{-x}$
x^6e^{-x}	$\left(-x^6-6x^5-30x^4-120x^3-360x^2-720x-720\right)e^{-x}$
x^7e^{-x}	$\left(-x^7-7x^6-42x^5-210x^4-840x^3-2520x^2-5040x-5040\right)e^{-x}$
x^8e^{-x}	$\left(-x^8-8x^7-56x^6-336x^5-1680x^4-6720x^3-20160x^2-40320x-40320\right)e^{-x}$
x^9e^{-x}	$\left(-x^9-9x^8-72x^7-504x^6-3024x^5-15120x^4-60480x^3-181440x^2-362880x-362800\right)e^{-x}$
…	

Allgemein gilt folgende <u>Identität</u> auf Grund von (***):

$$\int x^n e^{-x}dx = \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{n-k}\cdot\frac{n!}{k!}\cdot\frac{1}{(-1)^{n-k+1}}\cdot x^k\right)e^{-x} = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{n!}{k!}\cdot x^k\right)e^{-x} = \left(-\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}\cdot x^{n-i}\right)e^{-x},$$

d.h.: die Funktion $f(x) = x^n e^{-x}$ hat als <u>Stammfunktion</u> $F(x) = \left(-\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}\cdot x^{n-i}\right)e^{-x}$. Wir werten die Stammfunktion aus:

$$F(0) = \left(-\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}\cdot 0^{n-i}\right)e^{-0} = -\frac{n!}{(n-n)!}\cdot 0^{n-n}\cdot 1 = -\frac{n!}{0!}\cdot 1\cdot 1 = -n!$$

$$\lim_{x->\infty} F(x) = \lim_{x->\infty}\left(-\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}\cdot x^{n-i}\right)e^{-x} = \lim_{x->\infty}\frac{-\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}\cdot x^{n-i}}{e^x} = 0$$

und haben für das uneigentliche Integral:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \lim_{z->\infty}\int_0^z x^n e^{-x}dx = \lim_{z->\infty}\left[\left(-\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}\cdot x^{n-i}\right)e^{-x}\right]_0^z = \lim_{z->\infty}\left(\left(-\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}\cdot z^{n-i}\right)e^{-z} - \left(-\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}\cdot 0^{n-i}\right)e^{-0}\right) =$$

$$\lim_{z->\infty}\left(-\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}\cdot z^{n-i}\right)e^{-z} - (-n!) = 0 + n! = n!$$

Es gilt damit für das somit existierende Integral und den dazugehörenden <u>Integralwert</u>:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$$

für alle natürlichen Zahlen n = 0, 1, 2, …

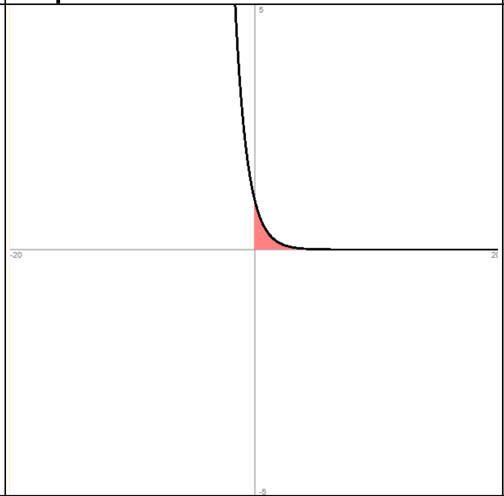
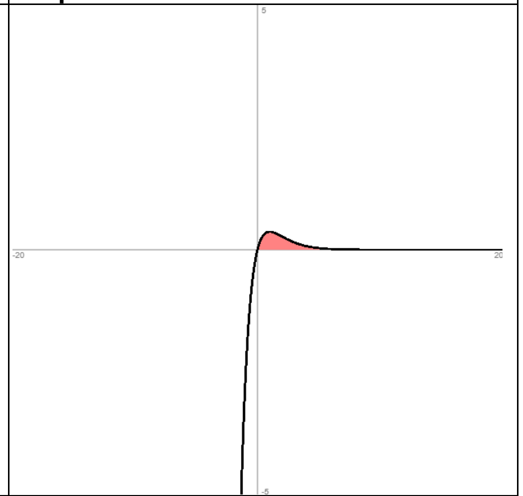
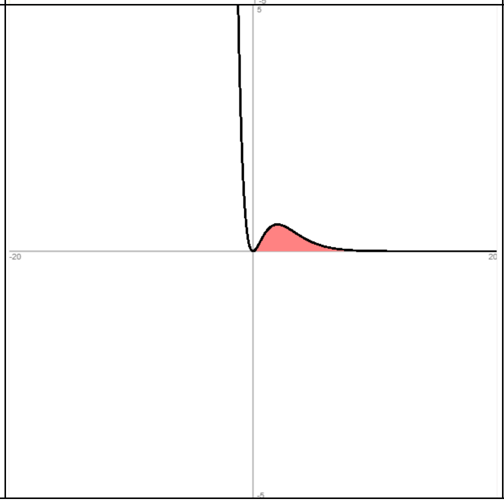
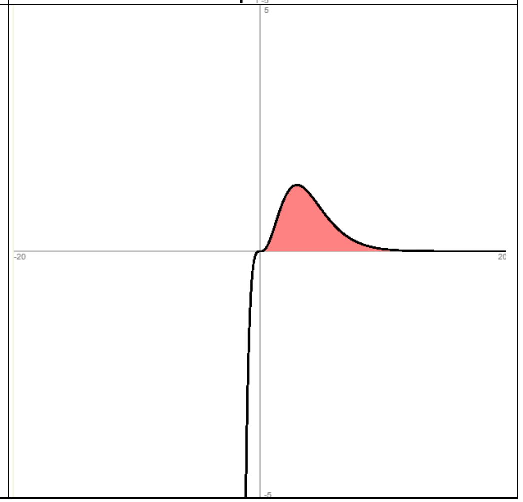
<u>Übersicht</u>

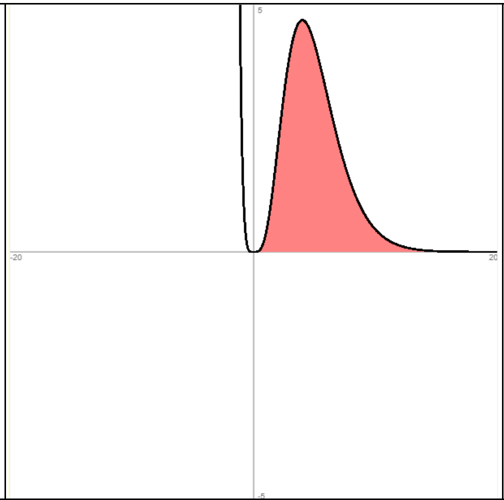
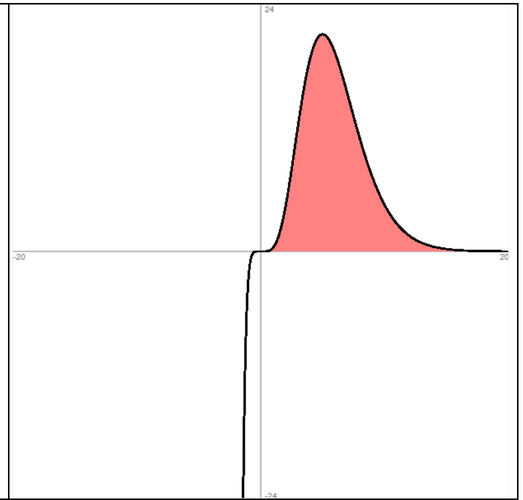
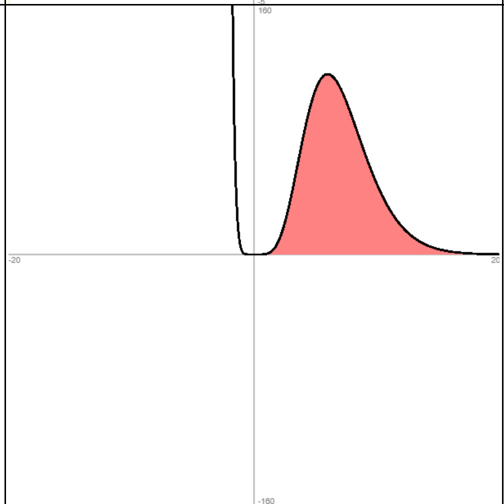
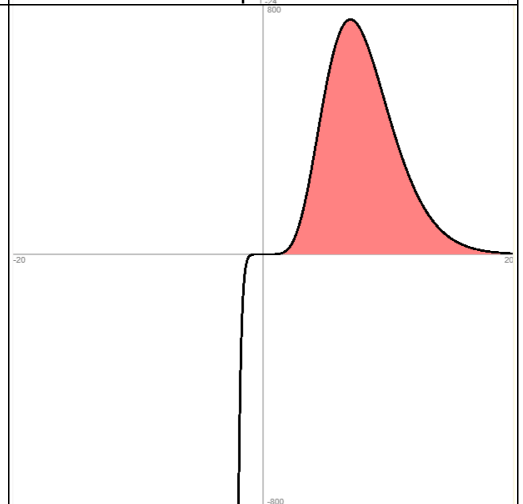
Die Beziehung

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$$

führt auf die nachstehende Übersicht:

<u>Tabelle 3</u>:

Integral	**Integralwert**	**Graph**		**Integral**	**Integralwert**	**Graph**
$\int_0^\infty e^{-x}dx$	0! = 1			$\int_0^\infty xe^{-x}dx$	1! = 1	
$\int_0^\infty x^2e^{-x}dx$	2! = 2			$\int_0^\infty x^3e^{-x}dx$	3! = 6	

$\int_0^\infty x^4 e^{-x} dx$	4! = 24			$\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx$	5! = 120	
$\int_0^\infty x^6 e^{-x} dx$	6! = 720			$\int_0^\infty x^7 e^{-x} dx$	7! = 5040	
…						

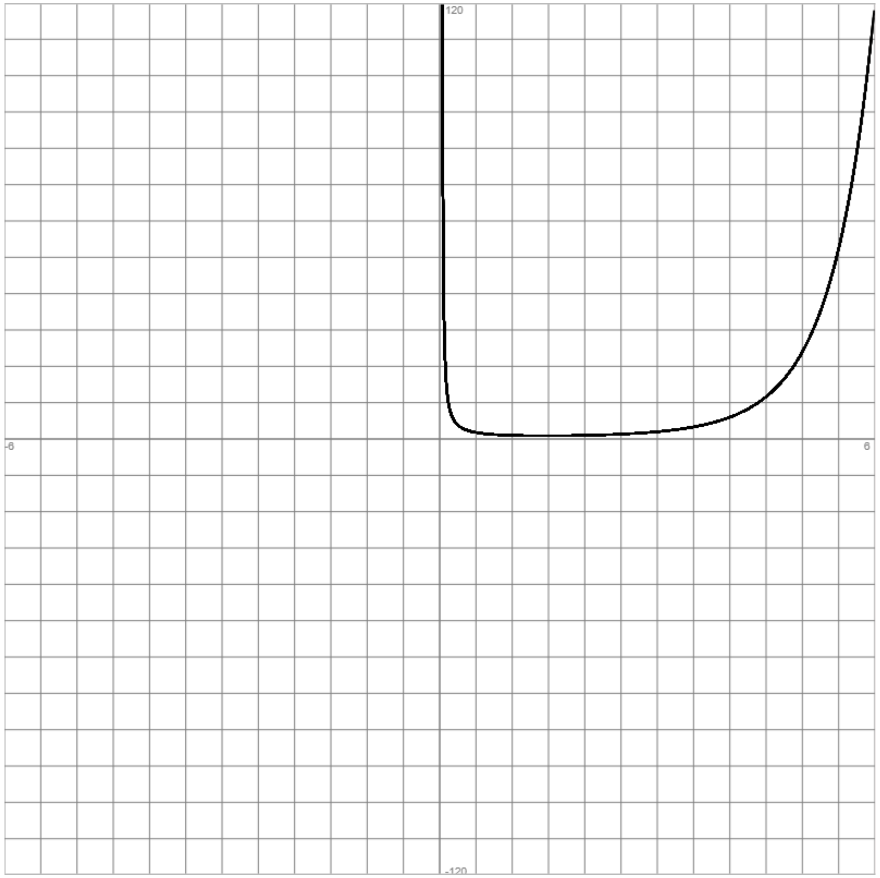
<u>Gammafunktion Γ(x) für positive reellen Zahlen</u>

Die Funktion, die die Funktionalgleichung x·Γ(x) = Γ(x+1), x>0, erfüllt, heißt <u>Gammafunktion</u>. Definieren lässt sich die Gammafunktion auf den positiven reellen Zahlen für jedes x durch ein uneigentliches Integral als:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt .$$

Ist x = n+1 für alle natürlichen Zahlen n = 0, 1, 2, …, so ergibt sich wegen $\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt$ = n! die Identität:

Γ(n+1) = n! (oder: Γ(n) = (n-1)!).



Gammafunktion Γ(x), x>0

Es gilt weiter:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x\cdot(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)},\ \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^x}{x\cdot(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)},\ \Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+x)} + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\,.$$

Für x = 0,5 ergibt sich:

$$\Gamma(0{,}5) = \int_0^\infty t^{-0,5} e^{-t}\,dt = \sqrt{\pi}\ .$$

An der Stelle x = 0 besitzt die Gammafunktion Γ(x) einen Pol (senkrechte Asymptote); es gilt: x -> +∞: Γ(x) -> +∞. Die Funktion Γ(x) kann angenähert werden durch die Stirlingformel:

$$\Gamma(x) = (2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} e^{-x} e^{\mu(x)} \text{ mit } 0<\mu(x)<\frac{1}{12x}\ .$$

Literaturhinweise: Homepage „Michael Buhlmann“: www.michael-buhlmann.de/PDF_Texte/mbhp_analysis_integrale_lgs_produktintegration_pdf.pdf (BUHLMANN, M., Lineares Gleichungssystem statt Produktintegration, 2021); Wikipedia. Die freie Enzyklopädie: https://de.wikipedia.org/wiki/Gammafunktion (Gammafunktion).

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 08.2024