Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Integrale > Partialbruchzerlegung

Für eine Funktion f(x) erlangt man im Allgemeinen durch Integrieren eine Stammfunktion F(x), die abgeleitet wieder f(x) ergibt (F'(x) = f(x)). Es gilt dann mit dem unbestimmten Integral (und der Integrationskonstante C):

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Quotienten aus Polynomen integriert man durch Partialbruchzerlegung, d.h. man geht wie folgt vor:

Partialbruchzerlegung für Integrale
Der Integrand sei von der Form: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{b_m x^m + ... + b_0}{a_n x^n + ... + a_0}$ mit ganz rationaler Zähler- und Nennerfunktion p(x) bzw. q(x) vom Grad m bzw. n. Zähler- und Nennerfunktion besitzen dabei keine gemeinsamen Linear- oder quadratische Faktoren.
I. Im Falle, dass der Grad der Zählerfunktion den der Nennerfunktion übersteigt (m ≥ n), ist für den Integranden eine Polynomdivision durchzuführen, so dass $$f(x) = p(x) : q(x) = (b_m x^m + ... + b_0) : (a_n x^n + ... + a_0) = c_m x^{m-n} + ... + c_n + \frac{c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_0}{a_n x^n + ... + a_0}$$ gilt, mithin $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ aus einem ganz rationalen Anteil $f_1(x) = c_m x^{m-n} + ... + c_n$ und einen echt gebrochen rationalen Anteil $f_2(x) = \frac{c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_0}{a_n x^n + ... + a_0}$ besteht.
II. Für die Nennerfunktion q(x) des echt gebrochen rationalen Anteils des Integranden $f_2(x) = \frac{c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_0}{a_n x^n + ... + a_0}$ ist eine Faktorisierung in lineare und quadratische Faktoren durchzuführen, so dass $$a_n x^n + ... + a_0 = a_n (x - x_1)^{n_1} \cdot ... \cdot (x - x_k)^{n_k} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{o_1} \cdot ... \cdot (x^2 + p_l x + q_l)^{o_l}$$ erfüllt ist.
III. Es gilt nun der Ansatz: $$f_2(x) = \frac{c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_0}{a_n x^n + ... + a_0} =$$ $$\frac{1}{a_n}\left[\frac{A_1}{x - x_1} + ... + \frac{A_{n_1}}{(x - x_1)^{n_1}} + ... + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + ... + \frac{B_{o_1} x + C_{o_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{o_1}} + ...\right] \quad (*)$$ Multiplikation der Gleichung (*) mit der Nennerfunktion führt dann auf eine Polynomgleichung: $$c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_0 = A_1 (x - x_1)^{n_1 - 1} \cdot ... \cdot (x - x_k)^{n_k} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{o_1} \cdot ... \cdot (x^2 + p_l x + q_l)^{o_l} + ...,$$ mit der mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs oder mit dem Einsetzen bestimmter x-Werte und der Lösung eines linearen Gleichungssystems die Koeffizienten A_1, … bestimmt werden können.
IV. Die Integration der gebrochen rationalen Funktion führt dann über die Integration der Summe der einfachen Brüche $\frac{A_1}{x - x_1}$, …, also:

$$\int f(x)dx = \int \frac{b_m x^m + ... + b_0}{a_n x^n + ... + a_0} dx = \int (c_m x^{m-n} + ... + c_n)dx + \int \frac{c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_0}{a_n x^n + ... + a_0} dx =$$

$$= \int (c_m x^{m-n} + ... + c_n)dx +$$

$$+ \frac{1}{a_n} \int \left[\frac{A_1}{x - x_1} + ... + \frac{A_{n_1}}{(x - x_1)^{n_1}} + ... + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + ... + \frac{B_{o_1} x + C_{o_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{o_1}} + ... \right] dx$$

Dabei finden die folgenden Integrationsregeln Verwendung mit nε**N₀**, a,b,p,qε**R**:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a|$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \text{ für n>1}$$

$$\int \frac{2x+p}{x^2 + px + q} dx = \ln|x^2 + px + q|$$

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q - p^2}} \right) \text{ mit } 4q - p^2 > 0$$

Anwendungen und Beispiele (gemäß Partialbruchzerlung für Integrale):

a) $\int \frac{x-16}{2x^2 - 9x - 5} dx$

I. entfällt, da der Grad des Nennerpolynoms größer als der des Zählerpolynoms ist.

II. Nullstellenbestimmung:

$$2x^2 - 9x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + \frac{5}{2}} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{121}{16}} = \frac{9}{4} \pm \frac{11}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 5$$

Also: $2x^2 - 9x - 5 = 2(x + \frac{1}{2})(x - 5)$ für den faktorisierten Nenner.

III. Ansatz und Koeffizientenvergleich:

$$\frac{x-16}{2x^2 - 9x - 5} = \frac{A}{2(x + \frac{1}{2})} + \frac{B}{x-5} \qquad \text{(Hauptnenner-Multiplikation)}$$

$$x - 16 = A(x-5) + 2B(x + \frac{1}{2}) \qquad (*)$$

x = 5 in (*) einsetzen:

$$-11 = 0 + 2B \cdot 5\frac{1}{2} \Leftrightarrow -11 = 11B \Leftrightarrow B = -1$$

x = -1/2 in (*) einsetzen:

$$-\frac{1}{2} - 16 = A \cdot (-5\frac{1}{2}) + 0 \Leftrightarrow -\frac{33}{2} = -\frac{11}{2} A \Leftrightarrow A = 3$$

Es gilt damit die Identität:

$$\frac{x-16}{2x^2-9x-5} = \frac{3}{2(x+\frac{1}{2})} - \frac{1}{x-5}$$

IV. Integration:

$$\int \frac{x-16}{2x^2-9x-5}dx = \int \frac{3}{2(x+\frac{1}{2})}dx - \int \frac{1}{x-5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+\frac{1}{2}}dx - \int \frac{1}{x-5}dx = \frac{3}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}\right| - \ln|x-5|$$

b) $\int \frac{x-6}{x^2(x-2)}dx$

I.-II. entfällt.

III. Ansatz und Koeffizientenvergleich:

$$\frac{x-6}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$ (Hauptnenner-Multiplikation)

$$x-6 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2$$ (Ausmultiplizieren)

$$x-6 = Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B + Cx^2$$

$$x-6 = (A+C)x^2 + (-2A+B)x - 2B$$

Also: $A+C=0$, $-2A+B=1$, $-2B=-6$ und damit: B = 3, A = 1, C = -1.

Es gilt damit die Identität:

$$\frac{x-6}{x^2(x-2)} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x-2}$$

IV. Integration:

$$\int \frac{x-6}{x^2(x-2)}dx = \int \frac{1}{x}dx + 3\int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x-2}dx = \ln|x| + 3\frac{(-1)}{x} - \ln|x-2| = \ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{3}{x}$$

c) $\int \frac{x^5+x^4-1}{x^4-1}dx$

I. Polynomdivision:

$(x^5+x^4-1):(x^4-1) = x + 1 + \frac{x}{x^4-1}$

$-(x^5-x)$

x^4+x-1

$-(x^4-1)$

x

II. Faktorisierung des Nenners auf Grund der 3. binomischen Formel:

$$x^4-1=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

III. Ansatz und Koeffizientenvergleich für den Restbruch $\frac{x}{x^4-1}$:

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$ (Hauptnenner-Multiplikation)

$$x = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$$ (*)

x = -1 einsetzen in (*):

$$-1 = 0 + B\cdot(-2)\cdot 2 + 0 \Leftrightarrow -1 = -4B \Leftrightarrow B = \frac{1}{4}$$

x = 1 einsetzen in (*):

$$1 = A\cdot 2\cdot 2 + 0 + 0 \Leftrightarrow 1 = 4A \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}$$

x = 0 einsetzen in (*):

$$0 = A\cdot 1\cdot 1 + B\cdot(-1)\cdot 1 + (0+D)\cdot(-1) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - D \Leftrightarrow D = 0$$

x = 2 einsetzen in (*):

$$2 = A\cdot 3\cdot 5 + B\cdot 1\cdot 5 + (C\cdot 2 + 0)\cdot 3 \Leftrightarrow 2 = 15A + 5B + 6C \Leftrightarrow$$

$$2 = \frac{15}{4} + \frac{5}{4} + 6C \Leftrightarrow 2 = 5 + 6C \Leftrightarrow -3 = 6C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Es gilt insgesamt die Identität:

$$\frac{x^5 + x^4 - 1}{x^4 - 1} = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1}$$

IV. Integration:

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 1}{x^4 - 1} dx = \int x dx + \int dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|$$

Michael Buhlmann, 07.2014