Mathematik > Analysis > Integrale > Produktintegration

Für eine Funktion f(x) erlangt man im Allgemeinen durch Integrieren eine Stammfunktion F(x), die abgeleitet wieder f(x) ergibt (F'(x) = f(x)). Es gilt dann mit dem unbestimmten Integral (und der Integrationskonstante C):

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Produkte von Funktionen integriert man durch Produktintegration (partielle Integration). Aus Ab- und Aufleiten leitet sich die Produktintegration her, folgt doch aus der Produktregel für das Ableiten:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

zunächst:

$$u'v = (uv)' - uv'$$

und weiter durch Aufleiten:

$$\int u'v = \int (uv)' - \int uv' \ ,$$

so dass sich die Regel der Produktintegration ergibt:

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

oder:

$$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$$

Damit ist die Produktintegration eine „unvollständige“ Integrationsregel (partielle Integration), da nach der (ersten) Integration wieder ein Integral vorhanden ist, das eventuell nochmals mit Hilfe der Produktintegration zu lösen ist (usw.).
Im Einzelnen geht man nun wie folgt vor:

Produktintegration für Integrale

Es gilt für zwei differenzierbare Funktionen u(x) und v(x):

$$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx \ .$$

Es gelten die folgenden Fallunterscheidung bzgl. der Produktintegration:

I. Produkt = Polynom * Exponentialfunktion: Wähle als u'(x) die Exponentialfunktion, als v(x) das Polynom n. Grades. Nach n-maliger Anwendung der Produktintegration ist das entsprechende Integral vollständig gelöst.

II. Produkt = Polynom * Sinus-/Kosinusfunktion: Wähle als u'(x) die Sinus-/Ko-sinusfunktion, als v(x) das Polynom n. Grades. Nach n-maliger Anwendung der Produktintegration ist das entsprechende Integral vollständig gelöst.

III. Produkt = Polynom * natürlicher Logarithmus: Wähle als u'(x) das Polynom n. Grades und $v(x) = \ln x$. Nach einmaliger Anwendung der Produktintegration ist das entsprechende Integral vollständig gelöst.

IV. Produkt = Sinus-/Kosinusfunktion * Sinus-/Kosinusfunktion: Die Wahl von u'(x) und v(x) ist beliebig. Die Integration führt dadurch, dass sich Sinus- und Kosinusfunktionen beim Ab- und Aufleiten wiederholen, wieder auf das anfängliche Integral, so dass die Integration als Gleichung aufgefasst werden kann, die nach dem zu lösenden Integral umgeformt werden kann.

V. Produkt = Exponentialfunktion * Sinus-/Kosinusfunktion: Die Wahl von u'(x) und v(x) ist beliebig. Die Integration führt dadurch, dass sich Sinus- und Kosinusfunktionen beim Ab- und Aufleiten wiederholen, wieder auf das anfängliche Integral, so dass die Integration als Gleichung aufgefasst werden kann, die nach dem zu lösenden Integral umgeformt werden kann.

<u>Anwendungen und Beispiele</u> (gemäß der Produktintegration für Integrale):

a) $\int xe^{-x}dx = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$

mit: $u'(x) = e^{-x}$, $u(x) = -e^{-x}$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$ (Regel I).

b) $\int x^2e^xdx = x^2e^x - \int 2x\cdot e^xdx = x^2e^x - 2\int xe^xdx = x^2e^x - 2[xe^x - \int 1\cdot e^xdx] =$

$x^2e^x - 2[xe^x - e^x] = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x = (x^2-2x+1)e^x$

mit: $u'(x) = e^x$, $u(x) = e^x$, $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$ (1. Produktintegration), $u'(x) = e^x$, $u(x) = e^x$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$ (2. Produktintegration) (Regel I)

c) $\int x\sin xdx = x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)dx = -x\cos x + \int\cos xdx = -x\cos x + \sin x$

mit: v(x)=x, u'(x)=sin*x*, v'(x)=1, u(x)=-cos*x* (Regel II)

d) $\int \ln xdx = \int 1\cdot\ln xdx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int 1dx = x\ln x - x$

mit: $u'(x) = 1$, $u(x) = x$, $v(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$ (Regel III)

e) $\int (x^3+2x-4)\ln xdx = \left(\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 4x\right)\ln x - \int\left(\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 4x\right)\cdot\frac{1}{x}dx =$

$\left(\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 4x\right)\ln x - \int\left(\frac{1}{4}x^3 + x^3 - 4\right)dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 4x\right)\ln x - \left(\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right)$

mit: $u'(x) = x^3 + 2x - 4$, $u(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 4x$, $v(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$ (Regel III)

f) $\int\sin^2 xdx = \int\sin x\cdot\sin xdx = -\cos x\cdot\sin x - \int(-\cos x)\cdot\cos xdx =$

$-\cos x\cdot\sin x + \int\cos^2 xdx = -\cos x\cdot\sin x + \int(1-\sin^2 x)dx = -\cos x\cdot\sin x + \int 1dx - \int\sin^2 dx =$

$-\cos x\cdot\sin x + x - \int\sin^2 dx = x - \cos x\cdot\sin x - \int\sin^2 dx$ (*)

mit: $u'(x) = \sin x$, $u(x) = -\cos x$, $v(x) = \sin x$, $v'(x) = \cos x$ (Regel IV).

Die Gleichung (*) ist nach $\int\sin^2 dx$ umzuformen. Addition mit $\int\sin^2 dx$ ergibt:

$2\int\sin^2 dx = x - \cos x\cdot\sin x$,

so dass Division durch 2 zum gewünschten Resultat führt:

$\int\sin^2 dx = \frac{x - \cos x\cdot\sin x}{2}$.

g) $\int e^x\cos xdx = e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)dx = e^x\cos x + \int e^x\sin xdx =$

$e^x\cos x + [e^x\sin x - \int e^x\cos xdx] = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos xdx$ (*)

(mit zweimaliger Produktintegration, Regel V). Umformen von (*) ergibt:

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x \Leftrightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2}$$.

h) $\int (3x-1)\cdot\cos(2x)dx = (3x-1)\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) - \int 3\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)dx =$

$\frac{1}{2}(3x-1)\cdot\sin(2x) - \frac{3}{2}\int\sin(2x)dx = \frac{1}{2}(3x-1)\cdot\sin(2x) - \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) =$

$\frac{1}{2}(3x-1)\cdot\sin(2x) + \frac{3}{4}\cdot\cos(2x)$

mit: v(x)=3x-1, u'(x)=cos(*2x*), v'(x)=3, $u(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ (Produktintegration nach Regel II, umgekehrte Kettenregel)

i) $\int x^3 \ln(4\sqrt{x})dx = \int x^3\cdot(\ln 4 + \frac{1}{2}\ln x)dx = \int x^3 \ln 4 dx + \frac{1}{2}\int x^3 \ln x dx =$

$\frac{\ln 4}{4}x^4 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\ln x - \int\frac{1}{4}x^4\cdot\frac{1}{x}dx\right] = \frac{\ln 4}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^4\ln x - \frac{1}{8}\int x^3 dx =$

$\frac{\ln 4}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^4\ln x - \frac{1}{32}x^4 = \frac{x^4}{4}\left(\ln 4 + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{8}\right) = \frac{x^4}{4}\left(\ln(4\sqrt{x}) - \frac{1}{8}\right)$

mit: $u'(x) = x^3$, $u(x) = \frac{1}{4}x^4$, $v(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$ (Logarithmengesetze, Produktintegration nach Regel III)

Michael Buhlmann, 08.2014