Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Integrale
> Simpsonregel und Keplersche Fassregel

Für eine Funktion f(x) erlangt man im Allgemeinen durch Integrieren eine Stammfunktion F(x), die abgeleitet wieder f(x) ergibt (F'(x) = f(x)). Für das bestimmte Integral, das u.U. mit dem Flächeninhalt zwischen einer (nichtnegativen) Funktion f(x) und der x-Achse auf einem x-Achsen-Intervall [a; b] identifiziert werden kann, ergibt sich mit der Stammfunktion F(x) und den Integrationsgrenzen a,bε**R**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Nicht immer existieren allerdings Stammfunktionen F(x) in geschlossener Form, so dass in solch einem Fall eine näherungsweise Berechnung des bestimmten Integrals (numerische Integration) angebracht ist. Manchmal ist zudem die näherungsweise Berechnung schneller, als das bestimmte Integral über analytische Methoden der Integration (Summen-, Produktregel, Substitution, Partialbruchzerlegung u.a.) zu lösen.

Für die näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrals ist auf die Simpsonregel und die verkettete Simpsonregel zu verweisen. Ist f(x) eine auf einem Intervall [a; b] definierte Funktion, so soll diese im Rahmen der Simpsonregel durch eine Parabel (als ganz rationale Funktion 2. Grades) angenähert werden. Die Parabel p(x) gehe dabei durch die Punkte P(a|f(a)) und Q(b|f(b)) an den Intervallenden sowie durch den Punkt R((a+b)/2|f((a+b)/2)) in der Intervallmitte. Mit dem Ansatz:

$$p(x) = rx^2 + sx + t$$

und mit:

$$p(a) = ra^2 + sa + t = f(a)$$
$$p\left(\frac{a+b}{2}\right) = r\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + s\left(\frac{a+b}{2}\right) + t = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$p(b) = rb^2 + sb + t = f(b)$$

ergibt sich zunächst für das Integral der Parabelfunktion:

$$\int_a^b p(x)dx = \int_a^b (rx^2 + sx + t)dx = \left[\frac{r}{3}x^3 + \frac{s}{2}x^2 + tx\right]_a^b = \left(\frac{r}{3}b^3 + \frac{s}{2}b^2 + tb\right) - \left(\frac{r}{3}a^3 + \frac{s}{2}a^2 + ta\right) =$$
$$\frac{r}{3}b^3 - \frac{r}{3}a^3 + \frac{s}{2}b^2 - \frac{s}{2}a^2 + tb - ta = \frac{r}{3}(b^3 - a^3) + \frac{s}{2}(b^2 - a^2) + t(b-a) =$$
$$\frac{r}{3}(b-a)(b^2 + ab + a^2) + \frac{s}{2}(b-a)(b+a) + t(b-a) = (b-a)\left[\frac{r}{3}(b^2 + ab + a^2) + \frac{s}{2}(b+a) + t\right] =$$
$$\frac{(b-a)}{6}\left[2r(b^2 + ab + a^2) + 3s(b+a) + 6t\right] = \frac{(b-a)}{6}\left[2rb^2 + 2rab + 2ra^2 + 3sb + 3sa + 6t\right] =$$
$$\frac{(b-a)}{6}\left[(ra^2 + sa + t) + (ra^2 + 2rab + rb^2 + 2sa + 2sb + 4t) + (rb^2 + sb + t)\right] =$$
$$\frac{(b-a)}{6}\left[(ra^2 + sa + t) + (r(a^2 + 2ab + b^2) + 2s(a+b) + 4t) + (rb^2 + sb + t)\right] =$$

$$\frac{(b-a)}{6}\left[(ra^2+sa+t)+(r(a+b)^2+2s(a+b)+4t)+(rb^2+sb+t)\right]=$$

$$\frac{(b-a)}{6}\left[(ra^2+sa+t)+4(r\frac{(a+b)^2}{4}+s\frac{(a+b)}{2}+t)+(rb^2+sb+t)\right]=$$

$$\frac{(b-a)}{6}\left[(ra^2+sa+t)+4(r\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+s\left(\frac{a+b}{2}\right)+t)+(rb^2+sb+t)\right]=$$

$$\frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

Verwendung fand bei der obigen Umformung die Identität: $b.^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2)$.
Es gilt in Näherung: f(x) ≈ g(x) und daher:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx$$

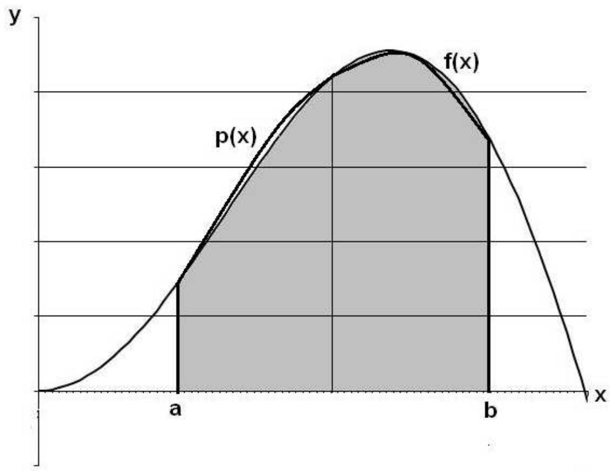
Nun ist:

$$\int_a^b p(x)dx = \frac{1}{6}(b-a)\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

Man erhält damit die Formel für die näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrals mit der einfachen Simpsonregel:

Simpsonregel für Integrale
$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}(b-a)\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

Intervall [a; b], Funktion f(x), Näherungsparabel p(x) und Flächen sind dann in der nachstehenden Abbildung zu sehen:



Bei der <u>verketteten Simpsonregel</u> wird das Intervall [a; b] wird in 2n gleichbreite Teilintervalle eingeteilt und auf je zwei dieser Teilintervalle die einfache Simpsonregel angewandt. Je zwei Teilintervallen entspricht damit eine Fläche, die durch eine quadratische Näherungsfunktion begrenzt wird, die Aufsummierung der Teilflächen ergibt dann eine (bessere) Näherung für das Integral (die Fläche zwischen Funktion und x-Achse, wenn man eine im Positiven verlaufende Funktion f(x) voraussetzt).

Im Einzelnen haben wir:

das Intervall [a; b],

die Breite der 2n Teilintervalle $h = \frac{b-a}{2n}$,

die Anfangs- bzw. Endpunkte der Teilintervalle x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, …, x_{2n} = b,

die zugehörigen Funktionswerte $y_0 = f(x_0) = f(a)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, … $y_n = f(x_n) = f(b)$,

die n Teilflächen mit der Breite 2h auf je zwei Teilintervallen $A_1 = \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{3}h$,

$A_2 = \frac{y_2 + 4y_3 + y_4}{3}h$, …, $A_n = \frac{y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}}{3}h$,

die Summierung der Teilflächen zu A = $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Es gilt dann bzgl. der Gesamtsumme der Teilflächen:

$$A = \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{3}h + \frac{y_2 + 4y_3 + y_4}{3} + \ldots + \frac{y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}}{3}h =$$

$$\frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \ldots + y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right] =$$

$$\frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right] =$$

$$\frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}\right]$$

Die verkettete Simpsonregel lautet daher insgesamt:

Verkettete Simpsonregel für Integrale
$\int_a^b f(x)dx \approx$ $\frac{1}{3}h \cdot [f(a) + 4[f(a+h) + .f(a+3h) + .. + f(b-h)] + 2[f(a+2h) + f(a+4h) ... + f(b-2h)] + f(b)]$

Ein Spezialfall der einfachen Simpsonregel ist die Keplersche Fassregel für Volumenintegrale. Bekanntlich berechnet sich das <u>Volumenintegral</u> für eine Funktion f(x) auf dem Intervall [a; b] als:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

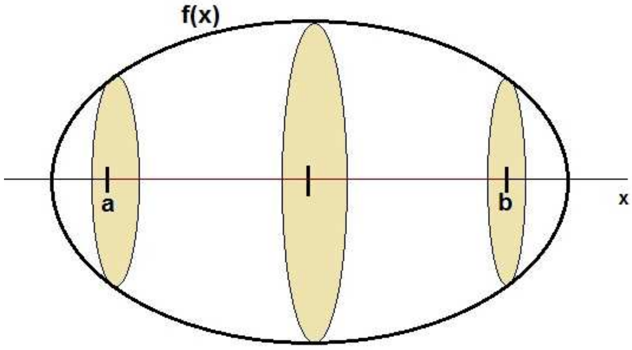
Die einfache Simpsonregel liefert in diesem Fall für die Funktion $[f(x)]^2$ die Näherung:

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \approx \frac{b-a}{6}\pi\left[[f(a)]^2 + 4[f(\frac{a+b}{2})]^2 + [f(b)]^2\right]$$

Dies entspricht aber der <u>Keplerschen Fassregel</u>:

Keplersche Fassregel für Volumenintegrale
$$V=\frac{h}{6}\left[A_a+4A_{\frac{a+b}{2}}+A_b\right]$$ mit: Fasshöhe h = b-a, unterer Fassfläche $A_a=\pi[f(a)]^2$, mittlerem Fassquerschnitt $A_{\frac{a+b}{2}}=\pi[f(\frac{a+b}{2})]^2$, oberer Fassfläche $A_b=\pi[f(b)]^2$

Dabei errechnet sich die Kreisfläche als $A = \pi r^2$ mit r als Kreisradius.



Beispiel (Keplersche Fassregel): Die Ellipsenfunktion $f(x)=0{,}5\sqrt{1-x^2}$ beschreibe auf dem Intervall [-0,8; 0,8] bei Rotation um die x-Achse einen fassähnlichen Körper mit Höhe h = 1,6 m, maximalem Querschnittradius f(0) = 0,5 m und dem (unteren, oberen) Radius f(-0,8) = f(0,8) = 0,3 m. Das Integral berechnet sich exakt als:

$$V=\pi\int_{-0,8}^{0,8}[f(x)]^2dx=2\pi\int_0^{0,8}\left[0{,}5\sqrt{1-x^2}\right]^2dx=2\pi\int_0^{0,8}0{,}25(1-x^2)dx=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{0,8}=\frac{118}{375}\pi$$

Es gilt also: $V = 0{,}9886\ m^3 = 988{,}6\ l$. Mit der Keplerschen Fassregel ergibt sich auf Grund von h = 1,6, $A_{-0,8} = A_{0,8} = \pi\cdot 0{,}3^2 = 0{,}09\pi$ und $A_0 = \pi\cdot 0{,}5^2 = 0{,}25\pi$:

$$V_F=\frac{1{,}6}{6}[0{,}09\pi+4\cdot 0{,}25\pi+0{,}09\pi]=\frac{1{,}6\cdot 1{,}18}{6}\pi=\frac{118}{375}\pi\ ,$$

also ebenfalls der exakte Wert des Volumenintegrals, so dass die Fassregel (einfache Simpsonregel) in diesem Fall sehr gut arbeitet.

Michael Buhlmann, 10.2012