Bei Funktionen f(x), die auf einem Intervall [a,b] nicht negativ sind, ist mit der Stammfunktion F(x) der Wert des bestimmten Integrals

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

identisch mit dem Inhalt der Fläche A zwischen Funktion f(x) und x-Achse. In solch einem Fall hat sich eingebürgert, die Identität von Fläche und Integral mit Unter- und Obersummen darzustellen, mithin das Integral als ganzheitlichen (auf das Intervall bezogenen) Grenzprozess von sich der Fläche annähernden Rechtecken einzuführen. Hier spielen die Unter- und Obersummen eine wichtige Rolle, die auf Teilintervalle bezogene Rechtecke unterhalb bzw. auch oberhalb der Funktion aufsummieren und die sich im Grenzprozess als identisch erweisen.
Da sich solche Betrachtungen meist nur auf Parabeln $f(x) = x^n$, $n \varepsilon \mathbf{N}$, beziehen, sind noch folgende Summenformeln hilfreich:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+..+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1+4+9+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1+8+27+64+...+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

<u>Beispiel</u>:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x^2$. Die Fläche zwischen f(x) und x-Achse im Intervall [0,2] soll im Folgenden ermittelt werden. Dazu unterteilen wir das Intervall in n Teile der Breite h = $\frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$. Das erste Teilintervall beginnt bei $x_0=0$, das n-te Teilintervall endet bei $x_n = 2$. In jedem Teilintervall $[x_i; x_{i+1}] = [i \cdot \frac{2}{n};\ (i+1)\frac{2}{n}]$, i = 0, 1, … n-1, nimmt wegen der steigenden Monotonie die Funktion f(x) ihr Minimum bei x_i mit $m_i = f(x_i) = f(i \cdot \frac{2}{n}) = 4 \cdot \left(i \cdot \frac{2}{n}\right)^2 = 16 \cdot \frac{i^2}{n^2}$, ihr Maximum bei x_{i+1} mit $M_i = f(x_{i+1}) = f((i+1)\frac{2}{n}) = 4 \cdot \left((i+1)\frac{2}{n}\right)^2 = 16 \cdot \frac{(i+1)^2}{n^2}$ an, i = 0, 1, … n-1. Wir bilden mit Hilfe der Minima die Unter-, mit Hilfe der Maxima die Obersumme. Die Rechtecke der Untersumme U_n haben jeweils den Flächeninhalt $u_{ni} = h \cdot m_i = \frac{2}{n} \cdot 16 \cdot \frac{i^2}{n^2} = 32 \cdot \frac{i^2}{n^3}$, die Rechtecke der Obersumme O_n den Flächeninhalt $o_{ni} = h \cdot M_i = \frac{2}{n} \cdot 16 \cdot \frac{(i+1)^2}{n^2} = 32 \cdot \frac{(i+1)^2}{n^3}$. Die Untersumme berechnet sich mit Hilfe der obigen Summenformel als:

$$U_n = u_{n0} + u_{n1} + u_{n2} ... + u_{n,n-1} = 0 + 32 \cdot \frac{1}{n^3} + 32 \cdot \frac{4}{n^3} + ... + 32 \cdot \frac{(n-1)^2}{n^3}$$
$$= \frac{32}{n^3} \cdot \left(1 + 4 + ... + (n-1)^2\right) = \frac{32}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{16}{3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{n^3}$$

Die Obersumme berechnet sich mit Hilfe der obigen Summenformel als:

$$O_n = o_{n0} + o_{n1} + o_{n2} ... + o_{n,n-1} = 32 \cdot \frac{1}{n^3} + 32 \cdot \frac{4}{n^3} + ... + 32 \cdot \frac{n^2}{n^3}$$

$$= \frac{32}{n^3} \cdot \left(1 + 4 + ... + n^2\right) = \frac{32}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{16}{3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

Wir führen nun für die Unter- und die Obersumme den Grenzprozess n -> ∞ durch und erhalten:

$$\lim_{n->\infty} U_n = \lim_{n->\infty} \frac{16}{3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{n^3} = \frac{16}{3} \cdot \lim_{n->\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3}$$

$$= \frac{16}{3} \cdot \lim_{n->\infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{16}{3} \cdot (2 - 0 + 0) = \frac{32}{3}$$

sowie:

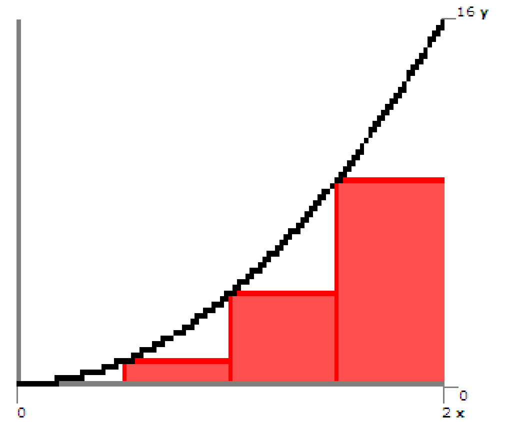
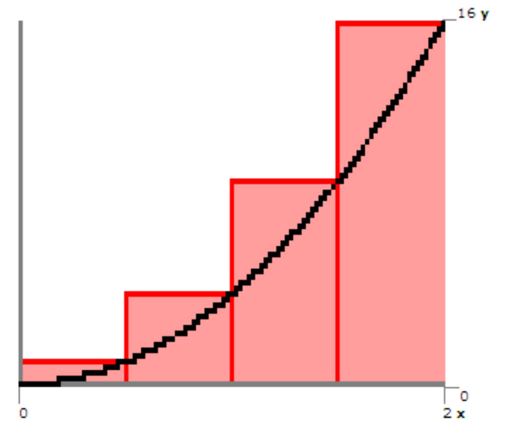
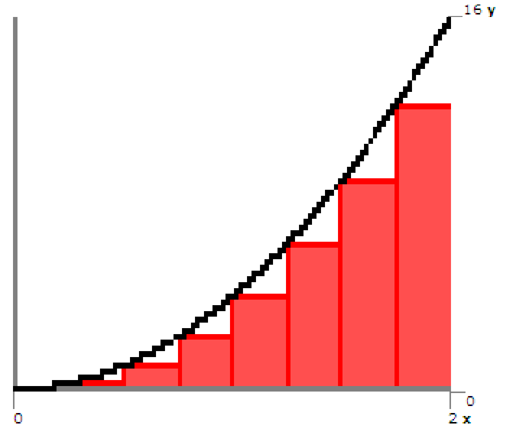
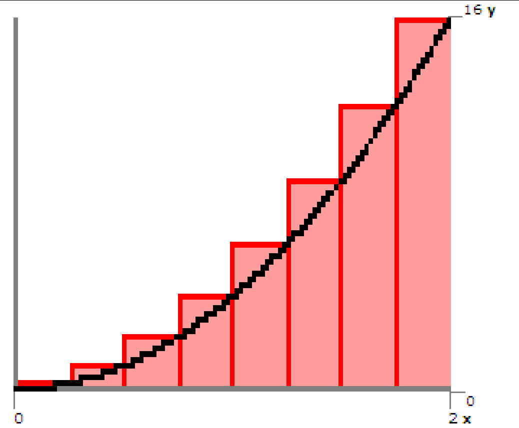
$$\lim_{n->\infty} O_n = \lim_{n->\infty} \frac{16}{3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{16}{3} \cdot \lim_{n->\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}$$

$$= \frac{16}{3} \cdot \lim_{n->\infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{16}{3} \cdot (2 + 0 + 0) = \frac{32}{3}$$

Grenzwert von Unter- und Obersumme sind gleich und identisch mit dem gesuchten Flächeninhalt. Wir überprüfen dies, indem wir integrieren:

$$A = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 4x^2 dx = 4\int_0^2 x^2 dx = 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4\left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = 4 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}.$$

Nachstehend sind einige Unter- und Obersummen für $f(x) = 4x^2$ skizziert und berechnet:

n=4	Untersumme: $U_4 = 7$ (Prozentuale) Abweichung: $\lvert A-U_4 \rvert = 3.6667$, $\lvert A-U_4 \rvert /A = 34.38\%$	Obersumme: $U_4 = 15$ (Prozentuale) Abweichung: $\lvert A-O_4 \rvert = 4.3333$, $\lvert A-O_4 \rvert /A = 40.63\%$
		
n=8	Untersumme: $U_8 = 8.75$ (Prozentuale) Abweichung: $\lvert A-U_8 \rvert = 1.9167$, $\lvert A-U_8 \rvert /A = 17.97\%$	Obersumme: $U_8 = 12.75$ (Prozentuale) Abweichung: $\lvert A-O_8 \rvert = 2.0833$, $\lvert A-O_8 \rvert /A = 19.53\%$
		

Michael Buhlmann, 08.2014