Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Bestimmtes Integral

Die Differenzial- und Integralrechnung kreist um den Grenzwertbegriff der Ableitung einer differenzierbaren reellwertigen Funktion f: D_f -> **R** der Form y = f(x) (D_f als Definitionsbereich), d.h. es gilt für die Ableitung f'(x) an einer beliebigen Stelle xεD_f:

$$\lim_{x^*->x} \frac{f(x^*)-f(x)}{x^*-x} = f'(x) \text{ bzw. } \frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x->0} \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

und damit der Übergang von den Differenzenquotienten zur Ableitung als Differenzialquotient.

Integration bedeutet u.a. die Berechnung eines bestimmten Integrals von der Form:

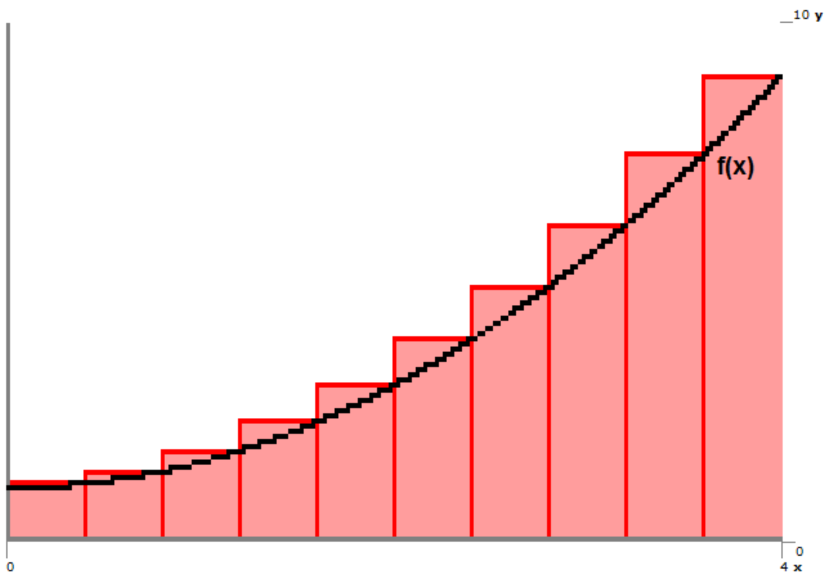
$$\int_a^b f(x)dx$$

vermöge der Identifizierung des Integrals mit einer Fläche (Flächensaldo) zwischen Funktion f(x) und x-Achse eines x-y-Koordinatensystems und der folgenden Vorgehensweise:

Das Intervall [a; b] auf der reellen x-Achse (a<b; a als untere, b als obere [Intervall-] Grenze [des bestimmten Integrals]) wird in n gleiche Stücke der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ unterteilt (nε**N**). Es ergeben sich n+1 x-Achsenstellen $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ sowie n+1 Funktionswerte $f(x_i) = f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)$, 0≤i≤n. Der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

ist eine Summe von Flächeninhalten von n Rechtecken der einheitlichen Breite Δx und der Höhe $f(x_i)$.



Vergrößert man nun n, so verkleinert sich Δx und die Summe von Rechteckflächen nähert sich mit n -> ∞, Δx -> dx und $f(x_i)$ -> f(x) dem bestimmten Integral an, so dass definitionsgemäß gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \xrightarrow{n->\infty} \int_a^b f(x)dx \text{ bzw. } \int_a^b f(x)dx = \lim_{n->\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x .$$

Dasselbe Resultat erhält man übrigens, wenn statt mit Rechtecken die (An-) Näherung durch Trapeze erfolgt, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\Delta x \xrightarrow{n->\infty} \int_a^b f(x)dx$$

folgt. Das bestimmte Integral ist unabhängig von der Zerlegung des Intervalls [a; b]. Ordnen wir dem bestimmten Integral eine reelle Zahl A (Fläche, Flächensaldo) zu, so gilt:

$$A = \int_a^b f(x)dx \text{ bzw. } dA = f(x)dx .$$

Aus $dA = f(x)dx$ folgt mithin durch Integration: $A = \int_a^b f(x)dx$.

Behandelt man für eine <u>Stammfunktion</u> F(x) zur Funktion y = f(x) den Differenzialquotienten dF/dx = F‘(x) = f(x) wie einen Bruch, so ergibt sich der <u>Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung</u> aus der Identität:

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

durch Kürzen von dx:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{dF}{dx}dx = \int_a^b dF = F(b) - F(a)$$

und damit auch die Rechenvorschrift für bestimmte Integrale, wonach in die Stammfunktion die obere und untere Grenze des bestimmten Integrals einzusetzen und die Differenz der Werte zu berechnen ist:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a) .$$

Das bis hierher Erarbeitete soll auf weitere bestimmte Integrale angewendet werden:

a) Die <u>Bogenlänge</u> einer Funktion y = f(x) auf einem Intervall [a; b] folgt aus der Zerlegung des Intervalls in n (gleiche) Teile, den Funktionspunkten $P_i(x_i|f(x_i))$ und den Abständen zwischen den Funktionspunkten $s_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$ gemäß dem Satz des Pythagoras mit: $s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ (0≤i≤n bzw. 0≤i≤n-1). Der Übergang mit n -> ∞ zum Infinitesimalen führt auf:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

weiter auf:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2\left(1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right)} = dx\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = \sqrt{\left(1 + (f'(x))^2\right)}dx$$

und damit nach Integration auf:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx\,,$$

die Formel für die Bogenlänge.

b) Das <u>Volumenintegral</u>, das entsteht, wenn die Funktion y = f(x) auf dem Intervall [a; b] um die x-Achse rotiert, errechnet sich bei Zerlegung des Intervalls in n (gleiche) Teile und mit der Volumenformel für den Kegelstumpf $V = \frac{\pi}{3}h\left((r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$ im Teilintervall [x_i; x_{i+1}], also mit:

$$V_i = \frac{\pi}{3}\Delta x\left((f(x_i))^2 + f(x_i)f(x_{i+1}) + (f(x_{i+1}))^2\right)$$

(Δx als Höhe, f(x_i), f(x_{i+1}) als Radien des Kegelstumpfs) (0≤i≤n-1) durch den Übergang mit n -> ∞ als:

$$dV = \frac{\pi}{3}dx\left((f(x))^2 + f(x)f(x) + (f(x))^2\right) = \frac{\pi}{3}dx \cdot 3(f(x))^2 = \pi(f(x))^2\,dx\,,$$

so dass Integration ergibt:

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx\,.$$

c) Das <u>Mantelflächenintegral</u>, das entsteht, wenn die Funktion y = f(x) auf dem Intervall [a; b] um die x-Achse rotiert, bestimmt sich mit der üblichen Zerlegung des Intervalls in n (gleiche) Teile und der Formel für die Mantelfläche eines Kegelstumpfs $M = \pi(r_1 + r_2)s$ zunächst als:

$$M_i = \pi\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)s_i$$

(f(x_i), f(x_{i+1}) als Radien, s_i als Mantellinie des Kegelstumpfs), 0≤i≤n-1. Nach dem Satz des Pythagoras berechnet sich s_i als: $s_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$. Der infinitesimale Übergang mit n -> ∞ führt dann auf:

$$dM = \pi\left(f(x) + f(x)\right)ds = 2\pi f(x)ds = 2\pi f(x) \cdot \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

und weiter (wie beim Bogenlängenintegral):

$$dM = 2\pi f(x) \cdot \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx\,.$$

Integration ergibt:

$$M = 2\pi\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx\,.$$

Literaturhinweise: dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München [3]2003, S.136-147 (Integration); PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd.1, Wiesbaden [11]2007, S.398-401, 414ff, 481-492 (Integration)

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 02.2017