Mathematik > Analysis > Bestimmtes Integral

Die Differenzial- und Integralrechnung kreist um den Grenzwertbegriff der <u>Ableitung</u> einer differenzierbaren reellwertigen Funktion f: $D_f \rightarrow \mathbf{R}$ der Form y = f(x) (D_f als Definitionsbereich), d.h. es gilt für die Ableitung f'(x) an einer beliebigen Stelle $x \in D_f$:

$$\lim_{x^* \to x} \frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x} = f'(x) \text{ bzw. } \frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

und damit der Übergang von den Differenzenquotienten zur Ableitung als Differenzialquotient.

Integration bedeutet u.a. die Berechnung eines bestimmten Integrals von der Form:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

vermöge der Identifizierung des Integrals mit einer Fläche (Flächensaldo) zwischen Funktion f(x) und x-Achse eines x-y-Koordinatensystems und der folgenden Vorgehensweise:

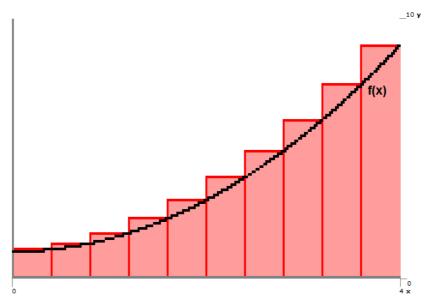
Das Intervall [a; b] auf der reellen x-Achse (a<b; a als untere, b als obere [Intervall-] Grenze [des bestimmten Integrals]) wird in n gleiche Stücke der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ unterteilt

(nɛN). Es ergeben sich n+1 x-Achsenstellen $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ sowie n+1 Funktionswerte

$$f(x_i) = f\left(a + i \cdot \frac{b - a}{n}\right)$$
, 0 \le i \le n. Der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x$$

ist eine Summe von Flächeninhalten von n Rechtecken der einheitlichen Breite Δx und der Höhe $f(x_i)$.



Vergrößert man nun n, so verkleinert sich Δx und die Summe von Rechteckflächen nähert sich mit n -> ∞ , Δx -> dx und $f(x_i)$ -> f(x) dem bestimmten Integral an, so dass definitionsgemäß gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x \xrightarrow{n \to \infty} \int_{a}^{b} f(x) dx \text{ bzw. } \int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x.$$

Dasselbe Resultat erhält man übrigens, wenn statt mit Rechtecken die (An-) Näherung durch Trapeze erfolgt, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta x \xrightarrow{n \to \infty} \int_{a}^{b} f(x) dx$$

folgt. Das bestimmte Integral ist unabhängig von der Zerlegung des Intervalls [a; b]. Ordnen wir dem bestimmten Integral eine reelle Zahl A (Fläche, Flächensaldo) zu, so gilt:

$$A = \int_{a}^{b} f(x)dx \text{ bzw. } dA = f(x)dx.$$

Aus dA = f(x)dx folgt mithin durch Integration: $A = \int_{a}^{b} f(x)dx$.

Behandelt man für eine <u>Stammfunktion</u> F(x) zur Funktion y = f(x) den Differenzialquotienten dF/dx = F'(x) = f(x) wie einen Bruch, so ergibt sich der <u>Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung</u> aus der Identität:

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

durch Kürzen von dx:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{dF}{dx} dx = \int_{a}^{b} dF = F(b) - F(a)$$

und damit auch die Rechenvorschrift für bestimmte Integrale, wonach in die Stammfunktion die obere und untere Grenze des bestimmten Integrals einzusetzen und die Differenz der Werte zu berechnen ist:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = [F(x)]_{a}^{b} = F(b) - F(a).$$

Das bis hierher Erarbeitete soll auf weitere bestimmte Integrale angewendet werden:

a) Die <u>Bogenlänge</u> einer Funktion y = f(x) auf einem Intervall [a; b] folgt aus der Zerlegung des Intervalls in n (gleiche) Teile, den Funktionspunkten $P_i(x_i|f(x_i))$ und den Abständen zwischen den Funktionspunkten $s_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$ gemäß dem Satz des Pythagoras mit: $s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ ($0 \le i \le n$ bzw. $0 \le i \le n-1$). Der Übergang mit $n \to \infty$ zum Infinitesimalen führt auf:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

weiter auf:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 \left(1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right)} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{f'(x)}{f'(x)}\right)^2} dx$$

und damit nach Integration auf:

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$
,

die Formel für die Bogenlänge.

b) Das <u>Volumenintegral</u>, das entsteht, wenn die Funktion y = f(x) auf dem Intervall [a; b] um die x-Achse rotiert, errechnet sich bei Zerlegung des Intervalls in n (gleiche) Teile und mit der Volumenformel für den Kegelstumpf $V = \frac{\pi}{3} h \left((r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \right)$ im Teilintervall [x_i; x_{i+1}], also mit:

$$V_{i} = \frac{\pi}{3} \Delta x \Big((f(x_{i}))^{2} + f(x_{i}) f(x_{i+1}) + (f(x_{i+1}))^{2} \Big)$$

(Δx als Höhe, $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ als Radien des Kegelstumpfs) (0≤i≤n-1) durch den Übergang mit n -> ∞ als:

$$dV = \frac{\pi}{3} dx \Big((f(x))^2 + f(x)f(x) + (f(x))^2 \Big) = \frac{\pi}{3} dx \cdot 3(f(x))^2 = \pi (f(x))^2 dx,$$

so dass Integration ergibt:

$$V = \pi \int_{a}^{b} (f(x))^{2} dx.$$

c) Das <u>Mantelflächenintegral</u>, das entsteht, wenn die Funktion y = f(x) auf dem Intervall [a; b] um die x-Achse rotiert, bestimmt sich mit der üblichen Zerlegung des Intervalls in n (gleiche) Teile und der Formel für die Mantelfläche eines Kegelstumpfs $M = \pi(r_1 + r_2)s$ zunächst als:

$$M_i = \pi (f(x_i) + f(x_{i+1})) s_i$$

(f(x_i), f(x_{i+1}) als Radien, s_i als Mantellinie des Kegelstumpfs), $0 \le i \le n-1$. Nach dem Satz des Pythagoras berechnet sich s_i als: $s_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$. Der infinitesimale Übergang mit n -> ∞ führt dann auf:

$$dM = \pi (f(x) + f(x))ds = 2\pi f(x)ds = 2\pi f(x) \cdot \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

und weiter (wie beim Bogenlängenintegral):

$$dM = 2\pi f(x) \cdot \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Integration ergibt:

$$M = 2\pi \int_{a}^{b} f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^{2}} dx.$$

<u>Literaturhinweise</u>: dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München ³2003, S.136-147 (Integration); PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd.1, Wiesbaden ¹¹2007, S.398-401, 414ff, 481-492 (Integration)

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 02.2017