Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Krümmungskreis

Krümmung: Bei einer mehrfach differenzierbaren Funktion f: D_f -> **R** ist die Krümmung eine Eigenschaft der Funktion, die man u.a. anhand der 2. Ableitung und der Wendepunkte erkennen kann. Wendepunkte x_0 einer Funktion f(x) erkennt man vermöge der Beziehungen:

x_0 Wendepunkt der Funktion f(x): $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ (*),

d.h. auf Grund der folgenden Vorgehensweise:

1) $f''(x) = 0$ (notwendige Bedingung) => mögliche Wendestelle x_0 (u.a.)
2) $f'''(x_0) \neq 0$ (hinreichende Bedingung) => Wendestelle x_0
3) $f(x_0)$ bestimmen => Wendepunkt $W(x_0|f(x_0))$.

Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente, d.h. es gilt:

$f'(x_0) = 0$ (waagerechte Tangente), $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ (Wendepunkt).

An den Wendepunkten ändert sich die Krümmung der Funktion f(x), d.h.: eine Links- geht in eine Rechtskrümmung über oder umgekehrt. Eine Funktion f(x) heißt links gekrümmt (konvex), wenn $f''(x) > 0$, rechts gekrümmt (konkav), wenn $f''(x) < 0$ für gewisse x. Eine Modifizierung der Beziehungen (*) ergibt zudem:

x_0 Wendepunkt der Funktion f(x) mit Übergang von einer Rechts- zur Linkskrümmung:
$f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$

x_0 Wendepunkt der Funktion f(x) mit Übergang von einer Links- zur Rechtskrümmung:
$f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) < 0$

(beim Durchlaufen der Funktion f(x) im Koordinatensystem von links nach rechts).
Wendepunkte definieren (zusammen mit Lücken des Definitionsbereichs D_f) die Krümmungsintervalle der Funktion f(x), d.h. die Intervalle gleicher (Links-, Rechts-) Krümmung. Für D_f = **R** und mit $x_1 < x_2 < \ldots$ als Wendepunkte von f(x) ergeben sich z.B. die Krümmungsintervalle: $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, … Liegt in einem der Krümmungsintervalle ein Hochpunkt $H(x_0|f(x_0))$ ($f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$), so ist die Funktion auf dem Intervall rechts gekrümmt, liegt dort ein Tiefpunkt $T(x_0|f(x_0))$ ($f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$), so dort links gekrümmt.

Tangenten, Normalen: Zu einer Funktion f(x) und einer Stelle $x_0 \varepsilon D_f$ lässt sich im Falle der Differenzierbarkeit die Tangente t der Funktion f(x) an der Stelle x_0 bestimmen als:

$$\text{t: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

die Normale n der Funktion f an der Stelle x_0 als:

$$\text{n: } y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) .$$

Tangente und Normale stehen also in einem gewissen Punkt $P(x_0|f(x_0))$ senkrecht aufeinander, die Tangente berührt die Funktion f(x) im Punkt P, die Normale steht im Punkt P senkrecht auf der Funktion. Wendetangenten, also Tangenten in einem Wendepunkt $W(x_0|f(x_0))$, schneiden (berührend) die Funktion f(x) und teilen sie in einen links- und rechtsgekrümmten Teil.

Krümmungskreis: Die Krümmung k einer Funktion f(x) an einer Stelle $x_0 \varepsilon D_f$ lässt sich definieren als:

$$k = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + (f'(x_0))^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Die Zahl k ≥ 0 gibt also das Maß der Krümmung einer Funktion f(x) in einem Punkt

$P(x_0|f(x_0))$ an. Wendepunkte $W(x_0|f(x_0))$ haben wegen $f''(x_0) = 0$ die Krümmung $k = 0$. Für den Krümmungskreis ist das Maß der Krümmung insofern von Bedeutung, dass der Radius r des Krümmungskreises der Kehrwert der Krümmung ist, also $r = 1/k$ bei $k > 0$ (Wendepunkte haben also einen „Krümmungskreis" mit unendlichem „Radius"). Es gilt damit:

$$r = \frac{1}{k} = \frac{(1+(f'(x_0))^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}.$$

Der Krümmungskreis bestimmt sich durch Radius r und Kreismittelpunkt $M(x_M|y_M)$, wobei sich die Koordinaten des Kreismittelpunkts M errechnen aus:

$$x_M = x_0 - \frac{f'(x_0)(1+(f'(x_0))^2)}{f''(x_0)}, \; y_M = f(x_0) + \frac{1+(f'(x_0))^2}{f''(x_0)}.$$

Der Mittelpunkt M des Krümmungskreises liegt dann auf der Normalen an die Funktion f(x) durch den Punkt $P(x_0|f(x_0))$ (bei $f'(x_0) \neq 0$). Bildet man für jedes $x_0 \varepsilon D_f$ den Krümmungskreis, so liegen alle Krümmungskreismittelpunkte auf einer Kurve, die Evolute heißt, die Funktion f(x) ist die Evolvente der Evolute.
Der Krümmungskreis selbst lässt sich mit Radius r und Kreismittelpunkt $M(x_M|y_M)$ darstellen als:

$$(x-x_M)^2 + (y-y_M)^2 = r^2,$$

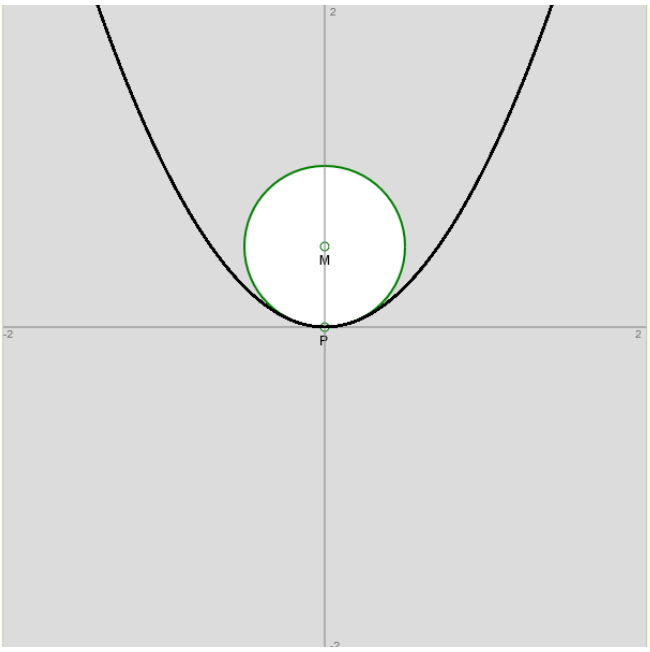
d.h. als „Funktion" (mit zwei Ästen):

$$y = y_M \pm \sqrt{r^2 - (x-x_M)^2}.$$

Beispiele:

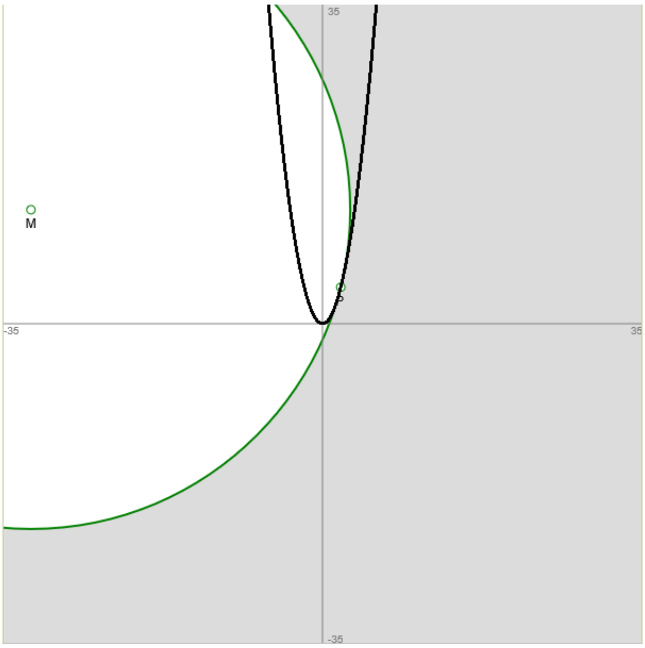
a) Für $f(x) = x^2$ (Normalparabel) ergeben sich an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_0 = 2$:

Funktion, Punkt: $f(x) = x^2$, P(0|0)



Krümmung, Radius, Mittelpunkt: k = 2, r = 0,5, M(0|0,5)
Kreis: $x^2 + (y-0,5)^2 = 0,25$

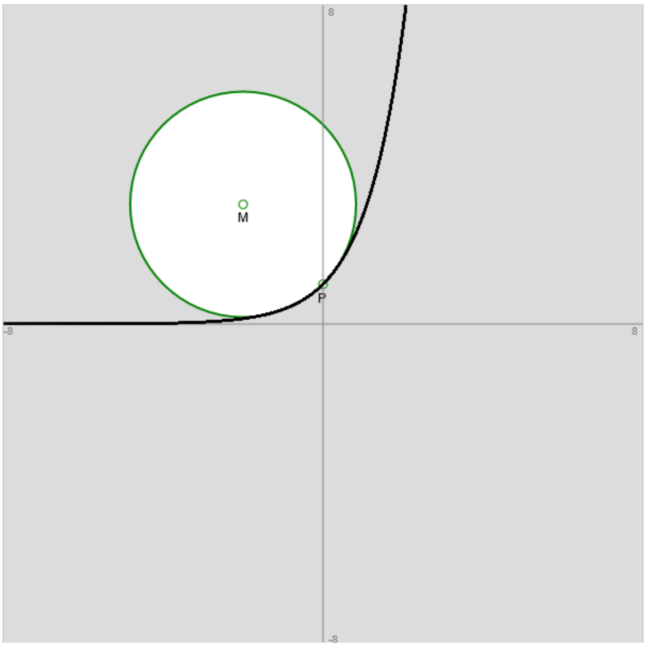
Funktion, Punkt: $f(x) = x^2$, P(2|4)



Krümmung, Radius, Mittelpunkt: k = 0,0285, r = 35,0464, M(-32|12,5)
Kreis: $(x+32)^2 + (y-12,5)^2 = 1228,25$

b) Für $f(x) = e^x$ stellen sich die Krümmungskreise an $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$ dar als:

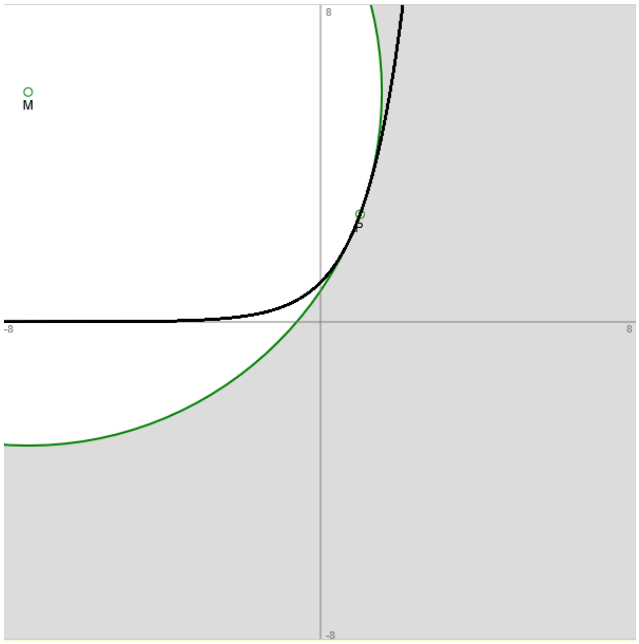
Funktion, Punkt: $f(x) = e^x$, P(0|1)



Krümmung, Radius, Mittelpunkt: $k = 1/\sqrt{8}$, $r = \sqrt{8}$, M(-2|1)

Kreis: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$

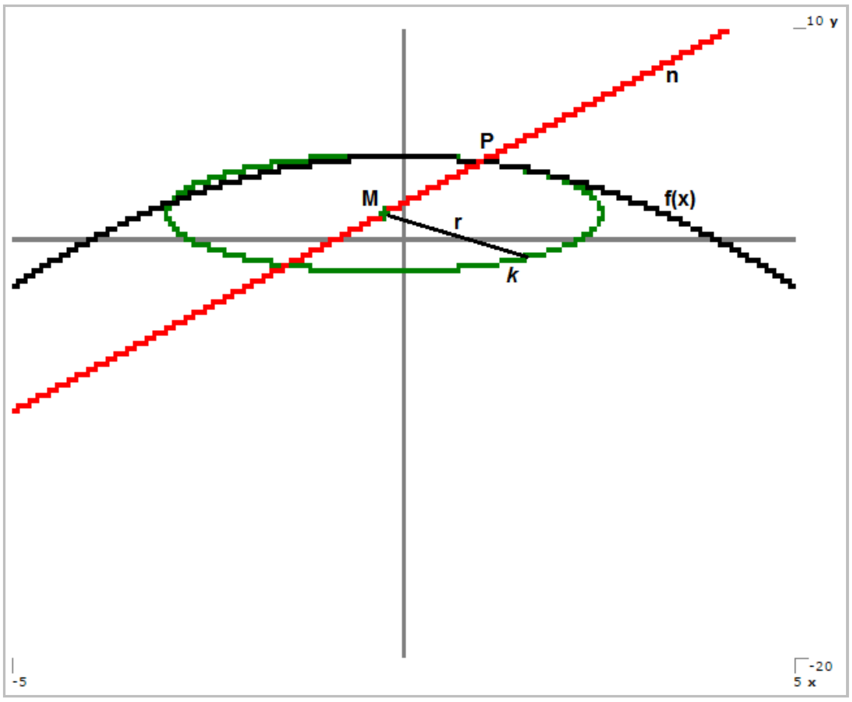
Funktion, Punkt: $f(x) = e^x$, P(1|e)



Krümmung, Radius, Mittelpunkt: k = 0,112, r = 8.939, M(-7,389|5,805)

Kreis: $(x+7{,}389)^2 + (y-5{,}805)^2 = 79{,}906$

c) Für die Funktion $f(x) = -0{,}25x^2+4$ und den Punkt P(1|3,75) auf f(x) ergibt sich die Krümmung k = 0.3578, der Krümmungsradius r = 2.7951, der Mittelpunkt des Krümmungskreises M(-0,25|1,25), der Krümmungskreis: $(x+0{,}25)^2 + (y-1{,}25)^2 = 7{,}8126$. Der Mittelpunkt M des Krümmungskreises liegt auf der Normale durch den Punkt P: n: $y = 2x+1{,}75$.



d) Zur Funktion $f(x) = x^3/8$ soll an der Stelle $x_0 = 1$ Krümmung und Krümmungskreis explizit errechnet werden. Der Funktionspunkt lautet wegen f(1) = 1/8: P(1|1/8), die 1. und 2. Ableitung sind: $f'(x) = 3x^2/8$, $f''(x) = 3x/4$. Die Krümmung k ergibt sich wegen f'(1) = 3/8 und f''(1) = 3/4 als:

$$k = \frac{|f''(1)|}{(1+(f'(1))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\left(1+\left(\frac{3}{8}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0{,}6157\,.$$

Der Radius des Krümmungskreises ist dann:

$$r = \frac{1}{k} = \frac{1}{0{,}6157} = 1{,}6243\,.$$

Die x- und y-Koordinate des Krümmungskreismittelpunkts $M(x_M|y_M)$ ergibt sich aus:

$$x_M = x_0 - \frac{f'(1)(1+(f'(1))^2)}{f''(1)} = 1 - \frac{3}{8}\cdot\frac{1+\left(\frac{3}{8}\right)^2}{\frac{3}{4}} = 0{,}4297\,,$$

$$y_M = f(1) + \frac{1+(f'(1))^2}{f''(1)} = \frac{1}{8} + \frac{1+\left(\frac{3}{8}\right)^2}{\frac{3}{4}} = 1{,}6458\,.$$

Der Krümmungskreismittelpunkt heißt M(0,4297|1,6458), der Krümmungskreis hat somit die Form:

$$(x–0{,}4297)^2 + (y–1{,}6458)^2 = 2{,}6383.$$

Die Bestimmung der Tangente und Normale im Punkt P(1|8) ergibt sich mit f(1) =1/8 und f‘(1) = 3/8 aus:

t: y = f‘(1)(x–1) + f(1) = 0,375x – 0,25
n: y = -(x-1)/f‘(1) + f(1) = -8x/3 + 67/24.

Der Krümmungskreismittelpunkt liegt auf der Normalen.