Undefinierte Ausdrücke vom Typ „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" lassen sich im Rahmen der Analysis nach den Regeln von de l'Hospital errechnen vermöge der Identität:

$$\boxed{\lim_{x->x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x->x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

wobei für zwei differenzierbare Funktionen f(x), g(x) die Bedingung $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oder $= \pm\infty$ für $x_0 \varepsilon \mathbf{R}$ oder $x_0 = \pm\infty$ gilt. Die Regeln von de l'Hospital lassen sich auch auf unbestimmte Ausdrücke vom Typ „$0\cdot\infty$", „$\infty - \infty$", „1^∞", „0^0", „∞^0" anwenden. Zur Erläuterung dienen die folgenden Beispiele und Vorgehensweisen:

Ausdruck:	**Beispiel:**
1. (Typ $\frac{0}{0}$)	$\lim_{x->2}\frac{x^2-4}{2^x-4}=\lim_{x->2}\frac{2x}{2^x\cdot\ln 2}=\frac{2\cdot 2}{2^2\cdot\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$ (1x l'Hospital anwenden, x=2 einsetzen)
2. (Typ $\frac{0}{0}$)	$\lim_{x->0}\frac{\sin x-x}{e^{\sin x}-e^x}=\lim_{x->0}\frac{\cos x-1}{e^{\sin x}\cos x-e^x}=\lim_{x->0}\frac{-\sin x}{e^{\sin x}\cos^2 x-e^{\sin x}\sin x-e^x}$ $=\lim_{x->0}\frac{-\cos x}{e^{\sin x}\cos^3 x-2e^{\sin x}\cos x\sin x-e^{\sin x}\cos x\sin x-e^{\sin x}\cos x-e^x}$ $=\frac{-1}{1-0-0-1-1}=1$ (3x l'Hospital anwenden, x=0 einsetzen)
3. (Typ $\frac{\infty}{\infty}$)	$\lim_{x->\infty}\frac{x^3-x+1}{4x^3+x^2+8}=\lim_{x->\infty}\frac{3x^2-1}{12x^2+2x}=\lim_{x->\infty}\frac{6x}{24x+2}=\lim_{x->\infty}\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ (3x l'Hospital anwenden)
4. (Typ $\frac{\infty}{\infty}$)	$\lim_{x->\infty}\frac{\ln x^{11}}{x}=\lim_{x->\infty}\frac{11\cdot\ln x}{x}=\lim_{x->\infty}\frac{11\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x->\infty}\frac{11}{x}=0$ (Logarithmengesetze, 1x l'Hospital anwenden)
5. (Typ $\frac{\infty}{\infty}$)	$\lim_{x->0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 7x}=\lim_{x->0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{\frac{1}{\sin 7x}\cdot\cos 7x\cdot 7}=\lim_{x->0}\frac{\tan 7x}{7\tan x}=\lim_{x->0}\frac{(1+\tan^2 7x)\cdot 7}{7\cdot(1+\tan^2 x)}$ $=\lim_{x->0}\frac{1+\tan^2 7x}{1+\tan^2 x}=\frac{1+0}{1+0}=1$ (rechtsseitiger Grenzwert; 2x l'Hospital anwenden, x=0 einsetzen)

6. (Typ 0·∞)	Vorgehensweise: $\boxed{f(x)g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}}$ $\lim_{x->0}(\sqrt{x}\cdot\ln x)=\lim_{x->0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x->0}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x->0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=\lim_{x->0}(-2\cdot\frac{1}{x}\cdot x^{\frac{3}{2}})$ $=\lim_{x->0}(-2x^{\frac{1}{2}})=\lim_{x->0}(-2\sqrt{x})=-2\sqrt{0}=0$ (rechtsseitiger Grenzwert; Umwandeln in Typ $\frac{\infty}{\infty}$, 1x l'Hospital anwenden, x=0 einsetzen)
7. (Typ 0·∞)	$\lim_{x->-\infty}(1-2x-3x^3)e^{2x}$ $=\lim_{x->-\infty}\frac{1-2x-3x^3}{e^{-2x}}=\lim_{x->-\infty}\frac{-2-9x^2}{-2e^{-2x}}=\lim_{x->-\infty}\frac{-18x}{4e^{-2x}}$ $=\lim_{x->-\infty}\frac{-18}{-8e^{-2x}}=\lim_{x->-\infty}(\frac{9}{4}e^{2x})=\frac{9}{4}\cdot 0=0$ (Umwandeln in Typ $\frac{\infty}{\infty}$, 3x l'Hospital anwenden)
8. (Typ ∞-∞)	Vorgehensweise: $\boxed{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)g(x)}}$ $\lim_{x->0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x->0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x->0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}$ $=\lim_{x->0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{1+1+-0}=\frac{0}{2}=0$ (Umwandeln in Typ $\frac{0}{0}$, 2x l'Hospital anwenden, x=0 einsetzen)
9. (Typ ∞-∞)	Vorgehensweise: $\boxed{f(x)-g(x)=f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)}$ $\lim_{x->\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x->\infty}\left[\sqrt{x+1}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)\right]=\lim_{x->\infty}\left[\sqrt{x+1}\left(1-\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)\right]$ $=\lim_{x->\infty}\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}=\lim_{x->\infty}\frac{1-(1-(x+1)^{-1})^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}$

	$= \lim\limits_{x->\infty} \frac{\frac{1}{2}(1-(x+1)^{-1})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) \cdot (x+1)^{-2} \cdot 1}{-\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}}$ $= \lim\limits_{x->\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}} \cdot \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{(x+1)^{2}}\right] = \lim\limits_{x->\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right]$ $= \lim\limits_{x->\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1-1}} = \lim\limits_{x->\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ (Umwandeln in Typ $\frac{0}{0}$, 1x l'Hospital anwenden)
10. (Typ 0^0)	Vorgehensweise: $\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}}$ $\lim\limits_{x->0} x^{2x} = \lim\limits_{x->0} e^{\ln x^{2x}} = \lim\limits_{x->0} e^{2x \cdot \ln x} = e^{\lim\limits_{x->0}(2x \cdot \ln x)} = e^{2 \cdot \lim\limits_{x->0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$ $= e^{2 \cdot \lim\limits_{x->0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{2 \cdot \lim\limits_{x->0}(-x)} = e^{2 \cdot 0} = e^{0} = 1$ (rechtsseitiger Grenzwert; Umwandeln in Typ $\frac{\infty}{\infty}$, 1x l'Hospital anwenden, x=0 einsetzen)
11. (Typ 1^∞)	$\lim\limits_{x->0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x->0} e^{\frac{1}{\sin x} \cdot \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)} = \lim\limits_{x->0} e^{\frac{1}{\sin x} \cdot (-\ln(\cos x))} = e^{-\lim\limits_{x->0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x}}$ $= e^{-\lim\limits_{x->0} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{\cos x}} = e^{\lim\limits_{x->0} \frac{\sin x}{\cos^2 x}} = e^{\frac{0}{1}} = 1$ (Umwandeln in Typ $\frac{0}{0}$, 1x l'Hospital anwenden, x=0 einsetzen)
12. (Typ $\frac{\infty}{\infty}$)	$\lim\limits_{x->\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan 5x} = \lim\limits_{x->\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3}{\frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5} = \lim\limits_{x->\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x} = \lim\limits_{x->\frac{\pi}{2}} \frac{-6\cos 5x \sin 5x \cdot 5}{-10\cos 3x \sin 3x \cdot 3}$ $= \lim\limits_{x->\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x \sin 5x}{\cos 3x \sin 3x} = \lim\limits_{x->\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin^2 5x \cdot 5 + \cos^2 5x \cdot 5}{-\sin^2 3x \cdot 3 + \cos^2 3x \cdot 3}$ $= \frac{-5+0}{-3+0} = \frac{5}{3}$ (3x l'Hospital anwenden, x=$\frac{\pi}{2}$ einsetzen)

13. (Typ $\frac{0}{0}$)	$$\lim_{x->3}\frac{\ln(x^2-8)}{x^2+x-12}=\lim_{x->3}\frac{\frac{1}{x^2-8}\cdot 2x}{2x+1}=\frac{\frac{6}{9-8}}{6+1}=\frac{6}{7}$$ (1x l'Hospital anwenden, x=3 einsetzen)
14. (Typ ∞-∞)	$$\lim_{x->0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x->0}\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}=\lim_{x->0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\ln(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}}$$ $$=\lim_{x->0}\frac{x+1-1}{(x+1)\ln(x+1)+x}=\lim_{x->0}\frac{x}{(x+1)\ln(x+1)+x}$$ $$=\lim_{x->0}\frac{1}{\ln(x+1)+(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}+1}=\lim_{x->0}\frac{1}{\ln(x+1)+2}=\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}$$ (Umwandeln in Typ $\frac{0}{0}$, 2x l'Hospital anwenden, Bruch mit x+1 erweitern, x=0 einsetzen)
15. (Typ ∞^0)	$$\lim_{x->\infty}\sqrt[x]{x^4+x^2+x}=\lim_{x->\infty}(x^4+x^2+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x->\infty}e^{\frac{1}{x}\ln(x^4+x^2+x)}$$ $$=e^{\lim_{x->\infty}\frac{\ln(x^4+x^2+x)}{x}}=e^{\lim_{x->\infty}\frac{\frac{1}{x^4+x^2+x}\cdot(4x^3+2x)}{1}}$$ $$=e^{\lim_{x->\infty}\frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+x}}=e^{\lim_{x->\infty}\frac{4x^2+2}{x^3+x+1}}=e^{\lim_{x->\infty}\frac{8x}{3x^2+1}}$$ $$=e^{\lim_{x->\infty}\frac{8}{6x}}=e^0=1$$ (Umwandeln in Typ $\frac{\infty}{\infty}$, 3x l'Hospital anwenden)
16. (Typ 0·∞)	$$\lim_{x->0}(\cos 2x-1)\ln 4x$$ $$=\lim_{x->0}\frac{\ln 4x}{(\cos 2x-1)^{-1}}=\lim_{x->0}\frac{\frac{1}{4x}\cdot 4}{-(\cos 2x-1)^{-2}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2}$$ $$=\lim_{x->0}\frac{(\cos 2x-1)^2}{2x\sin 2x}=\lim_{x->0}\frac{2(\cos 2x-1)\cdot(-\sin 2x)\cdot 2}{2\sin 2x+2x\cos 2x\cdot 2}$$ $$=\lim_{x->0}\frac{-2\sin 2x(\cos 2x-1)}{\sin 2x+2x\cos 2x}$$ $$=\lim_{x->0}\frac{2\cos 2x\cdot 2\cdot(\cos 2x-1)+2\sin^2 2x\cdot 2}{\cos 2x\cdot 2+2\cos 2x-2x\sin 2x\cdot 2}$$ $$=\lim_{x->0}\frac{\cos 2x(\cos 2x-1)+\sin^2 2x}{\cos 2x-x\sin 2x}=\frac{1\cdot 0+0}{1-0\cdot 0}=0$$ (Umwandeln in Typ $\frac{\infty}{\infty}$, 3x l'Hospital anwenden, x=0 einsetzen)

17. (Typ $\frac{0}{0}$)	$\lim_{x->8}\frac{4-\sqrt{x+8}}{x^2-64}=\lim_{x->8}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+8}}}{2x}=\lim_{x->8}\left[-\frac{1}{4x\sqrt{x+8}}\right]=-\frac{1}{32\sqrt{16}}=-\frac{1}{128}$ (1x l'Hospital anwenden, x=8 einsetzen)

Mit Hilfe der Regeln von l'Hospital lassen sich dann noch folgende allgemeine Grenzwerte bestimmen:

$$\lim_{x->\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \text{ für a>1 und n}\varepsilon\mathbf{R}$$

$$\lim_{x->\infty}\frac{r\cdot p_1(x)+...}{s\cdot p_2(x)+...}=\begin{cases}\pm\infty & falls\ p_1(x)\ größer\ p_2(x)\\ \frac{r}{s} & falls\ p_1(x)=p_2(x)\\ 0 & falls\ p_1(x)\ kleiner\ p_2(x)\end{cases}$$

für höchste Potenzen $p_1(x)$ und $p_2(x)$

$$\lim_{x->\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a,\ \lim_{x->\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^x=e^{-a}$$

$$\lim_{x->0}x^n\ln^m x=0,\ \lim_{x->\infty}\frac{\ln^m x}{x^n}=0 \text{ für n,m>0}$$

Literaturhinweise: PAPULA, L., Mathematische Formelsammlung, Wiesbaden [9]2006, S.73f (Regeln von de l'Hospital); REINHARDT, F., SOEDER, H., dtv-Atlas zur Mathematik. Tafeln und Texte, Bd.2: Analysis und angewandte Mathematik (= dtv 3008), München 1977, S.304f (Regeln von de l'Hospital).

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 06.2017