Michael Buhlmann

# Mathematik > Analysis > Folgen > Näherung für Kreiszahl > Regelmäßige Vielecke, Fläche

## Archimedes

Der griechische Mathematiker Archimedes (*287?-†212 v.Chr.) lebte in der Zeit des Hellenismus und des Aufstiegs Roms zur beherrschenden Macht zunächst im westlichen Mittelmeerraum in den Großstädten Alexandria (Ptolemäer, Museion) (zeitweise) und Syrakus (König Hieron II., 2. Punischer Krieg [218-201] und römische Belagerung und Eroberung von Syrakus [214/12 v.Chr.]). Kontakte des Archimedes zu den alexandrinischen Gelehrten Konon von Samos und Eratosthenes sind bezeugt; Archimedes soll ein Freund König Hierons II. von Syrakus (275-215 v.Chr.) gewesen sein. Einige Legenden ranken sich um seine Person ("Heureka"-Ausruf [Auftrieb und Wasserverdrängung], Tod); Archimedes soll der Erfinder der archimedischen Pumpe (Ägypten) und von während der Belagerung von Syrakus von griechischer Seite eingesetzten Maschinen und Waffen (Steinwurfmaschinen, Skorpione, Kräne, Spiegel?). Jenseits der Legenden wird Archimedes erkennbar durch seine mathematischen Werke: *Über das Gleichgewicht ebener Flächen I/II* (Balkenwaage mit ebenen Flächen, Hebelgesetz, Schwerpunkt eines Parabelsegments), *Die Quadratur der Parabel* (Fläche eines Parabelsegments; ca.240 v.Chr.), *Über Kugel und Zylinder I/II* (Zylinder und Prismen, Kegel und Pyramide, Volumen- und Oberflächenverhältnis von Zylinder und Kugel), *Kreismessung*, *Über Spiralen* (archimedische Spiralen, Längen- und Flächenbeziehungen; ca.230 v.Chr.), *Über Paraboloide, Hyperboloide und Ellipsoide* (Volumina, Schwerpunkte), *Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen* (v.220 v.Chr.), *Über schwimmende Körper I/II* (Auftrieb, spezifisches Gewicht; ca.220 v.Chr.), *Die Sandzahl* (Astronomie und Weltall), *Stomachion* (Archimedes-Palimpsest/Gebetbuch [10. Jahrhundert, 2. Hälfte/v.1229, Konstantinopel]; Gittervielecke [Picksche Flächenformel], Quadratzerlegung). In Archimedes' geometrische Beweise zu Flächen und Körpern fließen auch "infinitesimale" Überlegungen (Approximationen) mit ein. Auf Archimedes sollen laut Pappos von Alexandrien die archimedischen Körper (an den Ecken abgeflachte platonische Körper [Polyeder]) zurückgehen.

## Folgen

Eine Abbildung $\{a_n\}$: **N** -> **R**, die jeder natürlichen Zahl $n$ eine reelle Zahl $a_n$ zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: $n$ -> $a_n$ oder $\{a_n\}_{n\varepsilon\mathbf{N}}$, $a_n$ das n-te Folgenglied. Mit $a_n$ = f($n$) definiert f die Funktionsvorschrift der Folge. $\{a_n\}_{n\varepsilon\mathbf{N}} = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n, a_{n+1}, \dots\}$ heißt also eine Folge. Nun gilt:

a) $\{c\cdot a_n\}$, $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n\cdot b_n\}$, $\{a_n/b_n\}$ usw. sind Folgen, soweit definiert.

b) $\{a_n\}$ heißt <u>nach unten beschränkt</u>, wenn es eine <u>untere Schranke</u> $S_u\varepsilon$**R** gibt mit: $a_n \geq S_u$ ($n\varepsilon$**N**).

c) $\{a_n\}$ heißt <u>nach oben beschränkt</u>, wenn es eine <u>obere Schranke</u> $S_o\varepsilon$**R** gibt mit: $a_n \leq S_o$ ($n\varepsilon$**N**).

d) $\{a_n\}$ heißt <u>beschränkt</u>, wenn $\{a_n\}$ nach oben und nach unten beschränkt ist, d.h.: es gibt eine untere Schranke $S_u\varepsilon$**R** und eine obere Schranke $S_o\varepsilon$**R** mit: $S_u \leq a_n \leq S_o$ ($n\varepsilon$**N**).

e) $\{a_n\}$ heißt <u>monoton fallend</u>, falls: $a_n \geq a_{n+1}$ ($n\varepsilon$**N**).

f) $\{a_n\}$ heißt <u>monoton steigend</u>, falls: $a_n \leq a_{n+1}$ ($n\varepsilon$**N**).

g) $\{a_n\}$ heißt <u>konvergent</u>, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g, wenn (für jedes ε>0) in jeder noch so kleinen (ε-) Umgebung um g (dem offenen Intervall (g-ε, g+ε)) ab einem gewissen n (= n(ε)) alle Folgenglieder liegen. Dann gilt: $g = \lim_{n->\infty} a_n$ .

h) Satz (von Bolzano-Weierstraß): Jede beschrankte, monotone Folge $\{a_n\}$ besitzt einen Grenzwert $g = \lim_{n \to \infty} a_n$.

Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, bei denen sich Folgenglieder auf vorhergehende Folgenglieder beziehen, heißen rekursiv und lassen sich mit Hilfe einer Funktion f darstellen als: $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$ mit vorgegebenem $a_1, a_2, \ldots a_k$ (rekursive Folge k-ter Ordnung), $a_n = f(a_{n-1})$ mit vorgegebenem $a_1$ (rekursive Folge 1. Ordnung).

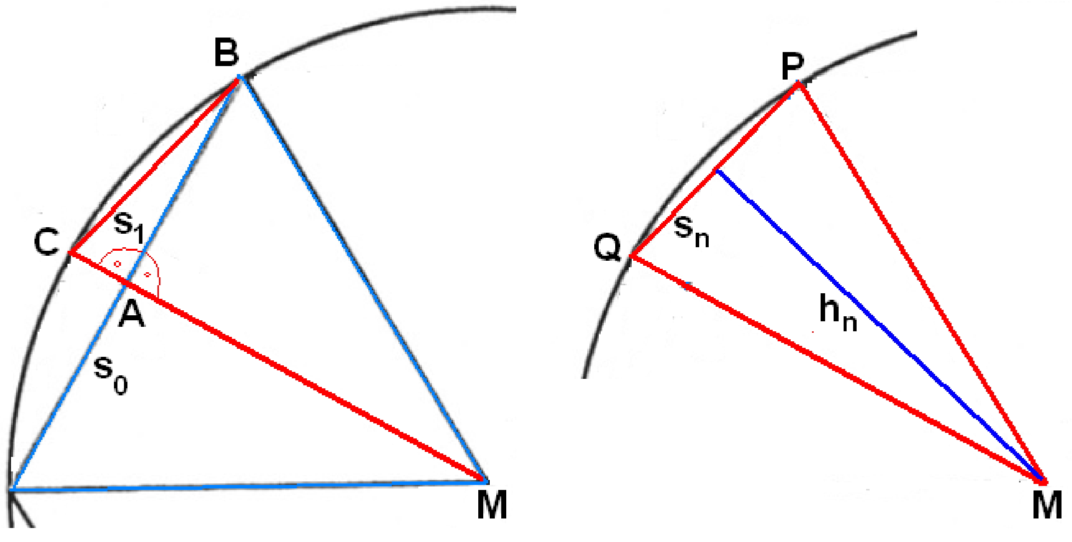
Näherung für die Kreiszahl π nach Archimedes

Ein Kreis mit Radius r hat den Flächeninhalt $A = \pi r^2$, so dass die Kreiszahl π sich als $\pi = A/r^2$ bestimmt. Nähert man also einen Kreis mit einbeschriebenen Vielecken an, so nähert sich die Fläche der Vielecke der Kreisfläche an, und die Kreiszahl lässt sich näherungsweise bestimmen. Sind die Vielecke regelmäßig, so vereinfacht sich die näherungsweise Berechnung. Sind die Vielecke regelmäßige 6-, 12-, 24-, 48-Ecke usw., so gehen wir bei der Kreisnäherung so vor, wie der griechische Mathematiker Archimedes vorgegangen ist. Für einen Kreis mir Radius r und ein im Kreis einbeschriebenes regelmäßiges Sechseck mit Sechseckseite $s_0$ gilt zunächst: $s_0 = r$, $A_0 = 6 \cdot \frac{s_0^2}{4}\sqrt{3} = 1{,}5 s_0^2 \sqrt{3}$ (ein regelmäßiges Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken). Die Seitenlänge des regelmäßigen Zwölfecks erhalten wir im Dreieck ABC bzw. ABM nach dem Satz des Pythagoras mit:

$$s_1^2 = \left(\frac{s_0}{2}\right)^2 + \overline{AC}^2 \quad (*)$$

bzw. mit:

$$\overline{AC} = r - \overline{AM} = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_0}{2}\right)^2} \quad (**).$$




Aus den beiden Beziehungen (*) und (**) ergibt sich (u.a. mit den binomischen Formeln):

$$s_1^2 = \left(\frac{s_0}{2}\right)^2 + \overline{AC}^2 = \left(\frac{s_0}{2}\right)^2 + \left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_0}{2}\right)^2}\right)^2 = \left(\frac{s_0}{2}\right)^2 + r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \left(\frac{s_0}{2}\right)^2} + r^2 - \left(\frac{s_0}{2}\right)^2 =$$

$$2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \left(\frac{s_0}{2}\right)^2} = 2r^2 - 2r\sqrt{\frac{4r^2 - s_0^2}{4}} = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_0^2}$$

Wir verallgemeinern dann die Beziehung $s_1 = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_0{}^2}}$ (Wurzelziehen!) zu:

$$s_{n+1} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n{}^2}}\text{ , } s_0 = r \text{ (***)}$$

und erhalten damit eine rekursive Folge der Seitenlängen $s_n$ einbeschriebener regelmäßiger 6-, 12-, 24-, 48-Ecke usw. Die rekursive Folge $\{s_n\}$ in (***) ist Grundlage der Folge von Vielecksflächen. Die Fläche eines Vielecks mit $6 \cdot 2^n$ Ecken hat $6 \cdot 2^n$ gleichschenklige Dreiecke jeweils (nach dem Satz des Pythagoras) mit der Fläche $A_\Delta$, also mit:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot s_n \cdot h_n = \frac{1}{2} \cdot s_n \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot s_n \cdot \sqrt{\frac{4r^2 - s_n^2}{4}} = \frac{1}{4} \cdot s_n \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^2}$$

Die Fläche $A_n$ eines Vielecks mit $6 \cdot 2^n$ Ecken hat also die Größe:

$$A_n = 6 \cdot 2^n \cdot \frac{1}{4} \cdot s_n \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^2} = 1{,}5 \cdot 2^n \cdot s_n \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^2}$$

Die durch die rekursive Folge $\{s_n\}$ in (***) beschriebene Iteration ist nachfolgend für den Kreisradius r = 1 durchgeführt und ergibt in der Tat eine Näherung für die Kreiszahl π; hier mit: $A_n \to \pi$ für $n \to \infty$.

Tabelle: Regelmäßige Vielecke

Iteration: $s_{n+1} = [2r^2 - r(4r^2 - s_n^2)^{1/2}]^{1/2}$, $s_0 = r$ -> $A_n = 1{,}5 \cdot 2^n \cdot s_n \cdot (4r^2 - s_n^2)^{1/2}$ -> $\pi_n = A_n/r^2$

| | | **Radius** r = | **Kreisfläche** $A_{Kr}$ = | **Kreiszahl** π = |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 3.141592653589793 | 3.141592653589793 |
| **Iteration** n = | **Ecken-anzahl** | **Vieleckseite** $s_n$ = | **Vieleckfläche** $A_n$ = | **Näherung für π** $\pi_n$ = |
| 0 | 6 | 1 | 2.598076211353316 | 2.598076211353316 |
| 1 | 12 | 0.5176380902050416 | 3.000000000000001 | 3.000000000000001 |
| 2 | 24 | 0.2610523844401031 | 3.1058285412302475 | 3.1058285412302475 |
| 3 | 48 | 0.13080625846028634 | 3.132628613281243 | 3.132628613281243 |
| 4 | 96 | 0.0654381656435527 | 3.1393502030468876 | 3.1393502030468876 |
| 5 | 192 | 0.03272346325297234 | 3.141031950890392 | 3.141031950890392 |
| 6 | 384 | 0.01636227920787303 | 3.1414524722852266 | 3.1414524722852266 |
| 7 | 768 | 0.008181208052471187 | 3.1415576079124747 | 3.1415576079124747 |
| 8 | 1536 | 0.004090612582339534 | 3.14158389215703 | 3.14158389215703 |
| 9 | 3072 | 0.0020453073607051095 | 3.141590463271827 | 3.141590463271827 |
| 10 | 6144 | 0.00102265381399354 | 3.141592105895269 | 3.141592105895269 |
| 11 | 12288 | 0.0005113269236068993 | 3.141592515967563 | 3.141592515967563 |
| 12 | 24576 | 0.0002556634639747083 | 3.1415926196529087 | 3.1415926196529087 |
| 13 | 49152 | 0.00012783173198735415 | 3.141592638904139 | 3.141592638904139 |
| 14 | 98304 | 0.00006391586599367708 | 3.1415926437169465 | 3.1415926437169465 |
| 15 | 196608 | 0.00003195793299683854 | 3.141592644920148 | 3.141592644920148 |

Betrachten wir die Folge der Flächen $A_n = 1{,}5 \cdot 2^n \cdot s_n \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^2}$, so lässt sich das Folgende aussagen:

a) Die Folge $\{A_n\}$ ist monoton steigend.
b) Die Folge $\{A_n\}$ ist beschränkt durch die Kreisfläche $A = \pi r^2$.

Dabei ergibt sich Aussage a) aus der Dreiecksungleichung, mithin aus: $2s_{n+1} \geq s_n$, woraus durch Multiplikation der Ungleichung mit $1{,}5 \cdot 2^n$ zunächst folgt: $1{,}5 \cdot 2^n \cdot 2s_{n+1} \geq 1{,}5 \cdot 2^n \cdot s_n$, und weiter: $1{,}5 \cdot 2^{n+1} s_{n+1} \geq 1{,}5 \cdot 2^n \cdot s_n$ (1). Weil wegen $s_{n+1} \leq s_n$ die Ungleichung

$\sqrt{4r^2 - s_{n+1}^2} \geq \sqrt{4r^2 - s_n^2}$ (2) folgt, gilt nach Multiplikation jeweils der größeren und der kleineren Terme in den Ungleichungen (1) und (2) miteinander:

$$1{,}5 \cdot 2^{n+1} \cdot s_{n+1} \cdot \sqrt{4r^2 - s_{n+1}^2} \geq 1{,}5 \cdot 2^n \cdot s_n \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^2}\ ,$$

also: $A_{n+1} \geq A_n$.
Die Richtigkeit der Aussage b) erklärt sich daraus, dass für zwei Punkte P und Q auf einem Kreis die Länge der Strecke (Sehne) $\overline{PQ}$ kleiner als die Länge des Kreisbogens $\overset{\frown}{PQ}$ ist. Das gleichschenklige Dreieck mit Basis $s_n$ hat mithin einen kleineren Flächeninhalt als der Kreisausschnitt mit Kreisbogen $\overset{\frown}{PQ}$. Damit gilt: $A_n \leq A = \pi r^2$.
Aus den Aussagen a) und b) folgt nach dem Satz für monoton (steigende), beschränkte Folgen, dass die Folge $\{A_n\}$ einen Grenzwert g besitzt. Da die Kreisfläche $A = \pi r^2$ die kleinste obere Schranke (Supremum) für die Flächenfolge $A_n$ ist, lautet der Grenzwert:

$$g = \lim_{n->\infty} A_n = \pi r^2\ ,$$

so dass sich die Kreiszahl π theoretisch aus:

$$\pi = \frac{\lim_{n->\infty} A_n}{r^2}$$

errechnet, praktisch (näherungsweise) aus:

$$\pi \approx \frac{A_n}{r^2}$$ für hinreichend großes n.

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 11.2014