

Isaac Newton

Isaac Newton wurde am 4. Januar 1643 (gemäß dem gregorianischen Kalender) in Woolsthorpe-by-Colsterworth, Lincolnshire, Königreich England, geboren. Er wuchs teils bei seiner Großmutter auf und besuchte später die Schule in Grantham, bevor er 1661 am Trinity College in Cambridge studierte. Im Bereich von Physik, Mechanik, Bewegung und Gravitation formulierte Newton die drei Bewegungsgesetze und das Gravitationsgesetz, mit denen er die Bewegungen von irdischen und himmlischen Körpern mathematisch beschreiben konnte. Seine Ergebnisse veröffentlichte er 1687 in der *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Im Bereich der Optik zeigte Newton, dass weißes Licht aus einem Spektrum von Farben besteht; zudem entwickelte er gegen chromatische Aberration das Spiegelteleskop. Im Jahr 1704 erschien sein physikalisches Werk *Opticks*. In der Mathematik schuf Newton parallel zum deutschen Philosophen und Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (*1646-†1716) die Grundlagen der Infinitesimalrechnung (Differential- und Integralrechnung) als Fluxionsrechnung (1666), wie er es nannte (Veröffentlichung der Fluxionsrechnung im Werk der *Opticks*). Der Prioritätsstreit mit Leibniz bei der Erfindung der Infinitesimalrechnung (ab 1705) prägte die wissenschaftliche Debatte seiner Zeit. Newton war Professor für Mathematik in Cambridge, wurde Mitglied und später Präsident der Royal Society (ab 1703) und übernahm administrative Aufgaben bei der Royal Mint („königliche Münze“). 1705 wurde er von der englisch-schottischen Königin Anne (1702-1714; Königreich Großbritannien 1707) zum Ritter geschlagen. 1707 erschien die *Arithmetica universalis sive De compositione et resolutione arithmetica liber*, 1710 Newtons wichtiger Beitrag zur ebenen algebraischen Geometrie. Neben Physik und Mathematik beschäftigte sich Newton als Universalgelehrter auch mit theologischen Problemen (Trinität, Mystik), Alter Geschichte und Alchemie. Der bedeutende Naturwissenschaftler starb am 31. März 1727 (gemäß dem gregorianischen Kalender) in Kensington und wurde in der Londoner Westminster Abbey begraben. Insbesondere Newtons Erkenntnisse im Bereich der Mechanik und Gravitation sollten das physikalische Weltbild bis in den Anfang des 20. Jahrhunderts prägen.

Binomischer Lehrsatz und Verallgemeinerung

Auf der mathematischen Grundlage der sog. Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

mit $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ($n!$ als „n Fakultät“, $0! = 1$, $\binom{n}{k}$ als „n über k“) (n, k als natürliche Zahlen, $0 \leq k \leq n$) baut der binomische Lehrsatz auf:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \quad \text{bzw.} \quad (a-b)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Vermöge er ausführlichen Darstellungen: $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$, $(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots \pm \binom{n}{2}a^2b^{n-2} \mp nab^{n-1} \pm b^n$ gelten die üblichen (1., 2.) binomischen Formeln:

$$\underline{n=2}: (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\underline{n=3}: (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\underline{n=4}: (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$\underline{n=5}: (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5, (a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \quad \text{usw.}$$

Mit n als natürlicher Zahl stellt sich der binomische Lehrsatz als eine endliche Summe dar. Ersetzt man n durch eine reelle Zahl α , so ist dies nicht mehr der Fall; aus der binomischen Summe wird die auf Isaac Newton zurückgehende binomische Reihe:

$$(a+b)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} a^{\alpha-i} b^i \quad (*) \quad \text{bzw.} \quad (a-b)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\alpha}{i} a^{\alpha-i} b^i \quad (*).$$

mit dem verallgemeinerten Binomialkoeffizienten:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

für natürliche Zahlen $k \geq 0$. Setzen wir – wie Isaac Newton im Jahr 1669 vorging – in die Formeln (*) $a = 1$ und $b = \xi$, so erhalten wir:

$$(1+\xi)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \xi^i \quad \text{bzw.} \quad (1-\xi)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\alpha}{i} \xi^i \quad (**)$$

als binomische Reihen und Potenzreihen, die für $|\xi| < 1$ konvergent sind bei beliebigem reellen α und die für $|\xi| \leq 1$ konvergieren, wenn $\alpha \geq 0$ gilt.

Näherung für die Kreiszahl π (I)

Um für die Kreiszahl π eine Näherung zu erhalten, die ohne die damals gängigen, auf den griechischen Mathematiker Archimedes (*ca.287-†212 v.Chr.) beruhenden, geometrischen Überlegungen mit regelmäßigen n-Ecken auskam, betrachtete Isaac Newton einen Halbkreis mit Radius $r=1$ (halber Einheitskreis) im 1. und 2. Quadranten des x-y-Koordinatensystems mit dem Koordinatenursprung als Kreismittelpunkt $M(0|0)$. Analytisch gesehen, liegt auf Grund der Kreisidentität $x^2 + y^2 = 1$ eine reellwertige Funktion

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{auf } [-1; 1]$$

vor. Newton verwendete weiter die binomische Reihe (**) für $\alpha = 1/2 = 0,5$ und $\xi = x^2$ als:

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\frac{1}{2}}{i} x^{2i} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots$$

mit: $\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1$, $\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{1!} = \frac{1}{2}$, $\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1)}{2!} = -\frac{1}{8}$, $\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1) \cdot (\frac{1}{2}-2)}{3!} = -\frac{1}{16}$, ... Nun stellt das Integral

$$\int_0^1 y dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots \right) dx$$

einen Viertelkreis (als Fläche zwischen Funktion y und x-Achse) dar, hat also wegen der Fläche des Einheitskreises $A = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$ bei $r=1$ die Größe $A/4 = \pi/4$. Es gilt somit:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots \right) dx \Leftrightarrow \pi = 4 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots \right) dx$$

Die Aufleitung des Integrals führt auf:

$$\pi = 4 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots \right) dx = 4 \left[x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 - \dots \right]_0^1 = 4 \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \dots \right) - 0 \approx 4 \cdot 0,7950644841 = 3,180257937,$$

einen Wert, der keine gute Näherung für die Kreiszahl darstellt.

Näherung für die Kreiszahl π (II)

Letztendlich geleitetet von Konvergenzbetrachtungen, kam Newton auf die folgende Modifikation der Berechnung von π . Die binomische Reihe (**) für $\alpha = 1/2 = 0,5$ und $\xi = x^2$ integrierte er dabei nur über dem Intervall $[0; 0,5]$ und teilte gleichzeitig die Fläche zwischen Funktion $y = \sqrt{1-x^2}$ und x-Achse auf in einen Kreisausschnitt mit Winkel $\varphi = 30^\circ$ und ein rechtwinkliges Dreieck. Für die beiden Teilflächen A_{KA} (Kreisausschnitt), A_D (Dreieck) gilt dann:

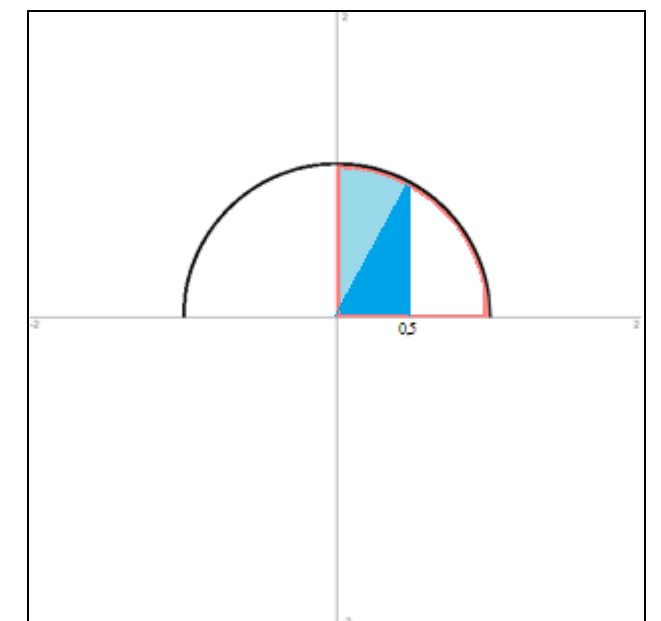
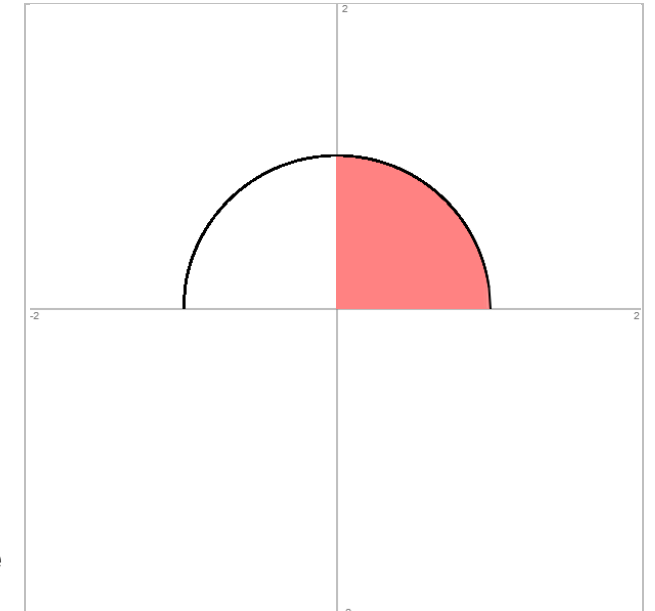
$$A_{KA} = \pi r^2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{12}, \quad A_D = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

auf Grund von: $r = 1$ = Dreieckshypotenuse, Dreieckskatheten $a = 0,5$, $b = \sqrt{1^2 - 0,5^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck), Nebenwinkel $\varphi' = \cos^{-1}(0,5/1) = 60^\circ$ (Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck), Winkel (des Kreisausschnitts) $\varphi = 90^\circ - \varphi' = 30^\circ$. Jetzt ist:

$$A_{KA} + A_D = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \int_0^{0,5} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots \right) dx \Leftrightarrow \pi = 12 \int_0^{0,5} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots \right) dx - \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

woraus folgt:

$$\pi = 12 \left[x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 - \dots \right]_0^{0,5} - \frac{3}{2}\sqrt{3} = 12 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 - \frac{1}{40} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^5 - \frac{1}{112} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^7 - \frac{5}{1152} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^9 - \dots \right) - 0 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 3,14161001$$



als eine auf drei Nachkommastellen genaue Näherung von π . Die eben durchgeführte Rechnung setzt aber voraus, dass wir über die irrationale Wurzel $\sqrt{3}$ Bescheid wissen. D.h. aber: Die transzendent-irrationale Zahl π wird mit Hilfe einer irrationalen Zahl berechnet.

Näherung für die Kreiszahl π (III)

Isaac Newton wird insbesondere zugeschrieben, dass er (im Jahr 1665) einen Halbkreis im 1. Quadranten des x-y-Koordinatensystems betrachtete mit Radius $r=0,5$ und Mittelpunkt $M(0,5|0)$. Auf Grund der Kreisidentität $(x-0,5)^2 + y^2 = 1$ liegt mit dem Halbkreis die reellwertige Funktion

$$y = \sqrt{0,5^2 - (x-0,5)^2} = \sqrt{0,25 - (x^2 - x + 0,25)} = \sqrt{x - x^2} = \sqrt{x(1-x)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} \text{ auf } [0; 1]$$

vor. Weiter ergibt die binomische Reihe (**) für $\alpha = 1/2 = 0,5$ und $\xi = x$:

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\frac{1}{2}}{i} x^i = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \dots (***)$$

Im Halbkreis wird nun Kreisausschnitt mit Ausschnittswinkel $\varphi = 60^\circ$ abgeteilt. Der Kreisausschnitt wird begrenzt durch den Kreisbogen zwischen $x=0$ und $x=0,25$. Der Flächeninhalt A_{KA} des Kreisausschnitts beträgt:

$$A_{KA} = \pi r^2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} = \pi \cdot 0,5^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{24}$$

Teil des Flächeninhalts ist ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse $r=0,5$ und Kathete $a=0,25$, so dass die andere Kathete des Dreiecks sich als $b = \sqrt{0,5^2 - 0,25^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck) berechnet. Der Flächeninhalt A_D des rechtwinkligen Dreiecks lautet dann:

$$A_D = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{32}$$

Wir stellen den Differenzflächeninhalt von Kreisausschnitt und Dreieck dem Integral der Funktion $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}$ gegenüber und erhalten:

$$A_{KA} - A_D = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} = \int_0^{0,25} \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} \cdot dx \Leftrightarrow \pi = 24 \int_0^{0,25} \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} \cdot dx + \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

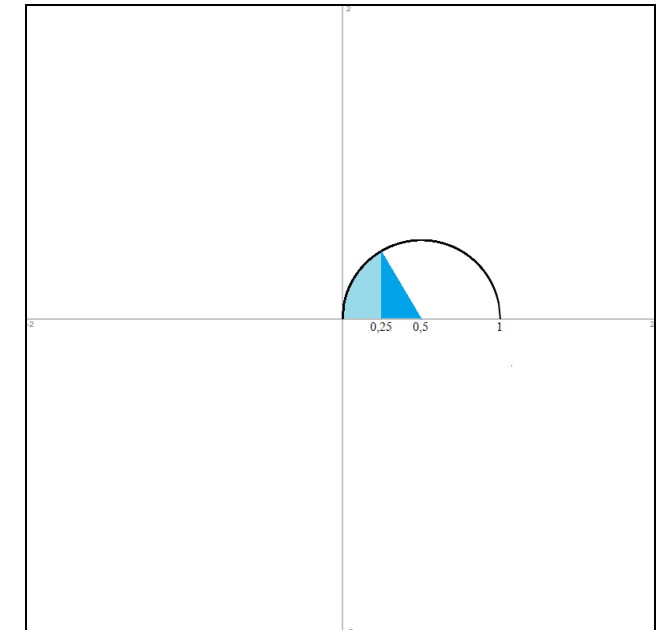
Die Anwendung der binomischen Reihe (**) und deren Integration ergeben:

$$\begin{aligned} \pi &= 24 \int_0^{0,25} \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} \cdot dx + \frac{3}{4}\sqrt{3} = \pi = 24 \int_0^{0,25} \sqrt{x} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \dots\right) \cdot dx + \frac{3}{4}\sqrt{3} = 24 \int_0^{0,25} \left(x^{0,5} - \frac{1}{2}x^{1,5} - \frac{1}{8}x^{2,5} - \frac{1}{16}x^{3,5} - \frac{5}{128}x^{4,5} - \dots\right) \cdot dx + \frac{3}{4}\sqrt{3} = \\ &= 24 \left[\frac{2}{3}x^{1,5} - \frac{1}{5}x^{2,5} - \frac{1}{28}x^{3,5} - \frac{1}{72}x^{4,5} - \frac{5}{704}x^{5,5} - \dots \right]_0^{0,25} + \frac{3}{4}\sqrt{3} = 24 \left(\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{1,5} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2,5} - \frac{1}{28} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3,5} - \frac{1}{72} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{4,5} - \frac{5}{704} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5,5} - \dots \right) + \frac{3}{4}\sqrt{3} = 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{40} - \frac{1}{896} - \frac{1}{9216} - \frac{5}{360448} - \dots \right) + \frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 3,140858412. \end{aligned}$$

Die Kreiszahl π ist damit auf zwei Nachkommastellen genau bestimmt. Die Reihe

$$\pi = \frac{3}{4}\sqrt{3} + 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{40} - \frac{1}{896} - \frac{1}{9216} - \frac{5}{360448} - \dots \right) = \frac{3}{4}\sqrt{3} + 6 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\frac{1}{2}}{i} \cdot \frac{1}{(2i+3) \cdot 4^i}$$

heißt Newton-Reihe für die Kreiszahl π .



Literaturhinweise: BUHLMANN, M., Mathematik > Analysis > Folgen > Näherung für Kreiszahl > Regelmäßige Vielecke, Umfang (www.michael-buhlmann.de/PDF_Texte/mbhp_analysis_naeherung_pi_1_pdf.pdf); BUHLMANN, M., Mathematik > Analysis > Folgen > Näherung für Kreiszahl > Regelmäßige Vielecke, Fläche (www.michael-buhlmann.de/PDF_Texte/mbhp_analysis_naeherung_pi_2_pdf.pdf); Lexikon der Mathematik: Newton-Reihe für π (www.spektrum.de/lexikon/mathematik/newton-reihe-fuer/7353); HERRMANN, D., Mathematik der Neuzeit: Geschichte der Mathematik in Europa von Vieta bis Euler, Berlin 2022, S.347-357; https://de.wikipedia.org/wiki/Binomische_Reihe (Binomische Reihe); [https://de.wikipedia.org/wiki/Kreiszahl_\(Pi\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Kreiszahl_(Pi)); Veritasium: Die Entdeckung, die die Geschichte von Pi verändert hat, Wie kann man π berechnen? Newton's revolutionäre Idee (Videos auf youtube).