

Eine Abbildung $\{a_n\}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: $n \rightarrow a_n$ oder $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, a_n das n -te Folgenglied. Mit $a_n = h(n)$ definiert h die Funktionsvorschrift der Folge. $\{a_n\}$ heißt konvergent, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g , wenn (für jedes $\varepsilon > 0$) in jeder noch so kleinen (ε -) Umgebung um g (dem offenen Intervall $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$) ab einem gewissen n ($= n(\varepsilon)$) alle Folgenglieder liegen; dann gilt: $g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Nicht konvergente Folgen heißen divergent.

Mit $a_n = h(n)$ liegt eine explizite Folgenrechtsvorschrift vor, mit $a_n = h(a_{n-k}, \dots, a_{n-1})$ eine rekursive Folge mit vorgegebenem a_1, a_2, \dots, a_k (rekursive Folge k -ter Ordnung). Das Berechnen der Folgenglieder a_n rekursiver Folgen heißt Iteration. Das anschließend dargestellte Newtonverfahren ist eine rekursive Folge 1. Ordnung $a_n = h(a_{n-1})$ mit vorgegebenem a_1 .

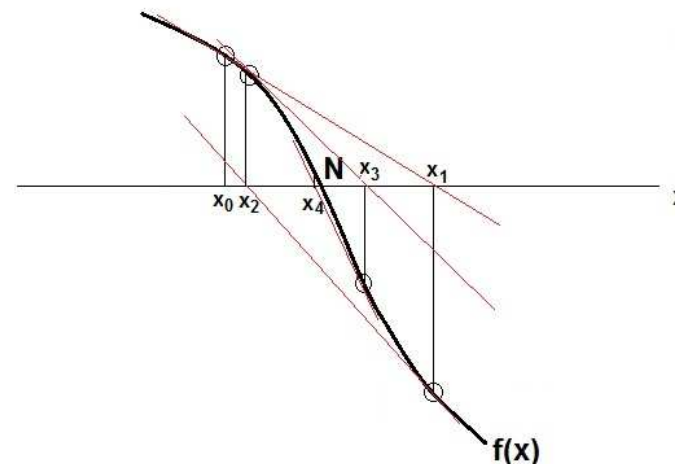
Newtonverfahren: Zu einer differenzierbaren Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ bestimmt man numerisch eine Nullstelle x_N mit $f(x_N) = 0$, indem man das Newtonverfahren anwendet, das für einen vorgegebenen (Anfangs-) Wert die Funktion $f(x)$ durch eine Tangente annähert, die Nullstelle der Tangente bestimmt und dieses Verfahren wiederholt (Iteration). Es entsteht dadurch eine Folge von reellen x -Werten x_0 (Anfangswert), x_1, x_2, \dots vermöge der Iterationsgleichung (für $n = 0, 1, 2, \dots$):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

($f'(x_n) \neq 0$). Die Folge x_1, x_2, \dots konvergiert dann bei geeignetem Anfangswert x_0 im Allgemeinen gegen die gesuchte Nullstelle x_N der Funktion $f(x)$, also $x_n \rightarrow x_N$ ($n \rightarrow \infty$). Der Anfangswert x_0 ergibt sich dabei z.B. als Wert in einem Intervall $[a; b]$ mit Vorzeichenwechsel der Funktion, also mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ (d.h.: $f(a) > 0, f(b) < 0$ oder $f(a) < 0, f(b) > 0$). Stellen mit $f'(x) = 0$ (waagerechte Tangenten bei der Funktion $f(x)$) beeinflussen die Iteration des Newtonverfahrens negativ, das Newtonverfahren kann divergent werden.

Begründet werden kann das Newtonverfahren wie folgt: Zu einem Punkt x_0 kann die Tangente im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ als eine Näherung zur Funktion betrachtet werden. Es gilt dabei die Tangentenformel:

$$t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Bei hinreichend geeignetem x_0 kann die Nullstelle der Tangente als Näherung der Nullstelle der Funktion $f(x)$ gelten. Die Nullstelle der Tangente bestimmt sich aber mit:

$$0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

so dass das Auflösen der vorstehenden Gleichung nach x ergibt:

$$0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow 0 = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)x_0 - f(x_0) = f'(x_0)x \Leftrightarrow x = \frac{f'(x_0)x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Die Stelle $x_1 = x$ liegt dann im Allgemeinen näher an der Nullstelle der Funktion. Wiederholt man mit x_1 die Bestimmung der Tangenten-nullstelle, erhält man die Näherung x_2 usw. Es gilt damit die oben angegebene Iteration des Newtonverfahrens.

Beispiel 1: Zu $f(x) = x^3 - 8$ ergibt sich – wie bekannt – die Nullstelle $x_N = 2$ bzw. $N(2|0)$. Es wird nun diese Nullstelle mit dem Newtonverfahren bestimmt, wobei hier ausführlich die entsprechenden Tangentengleichungen und die Glieder der rekursiven Folge als Tangentennullstellen tabellarisch dargestellt werden:

Newtonverfahren: $f(x) = x^3 - 8$, $f'(x) = 3x^2$, $x_0 = 1$

Iteration n =	$x_{n-1} =$	$f(x_{n-1}) =$	$f'(x_{n-1}) =$	Tangente $y = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) + f(x_{n-1})$	$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	Abweichung $ x_n - x_{n-1} =$	Nullstelle
1	1	-7	3	$y = 3x - 10$	3.3333333333333335	2.3333333333333335	
2	3.3333333333333335	29.037037037037045	33.333333333333336	$y = 33.33333333333336x - 82.074074$	2.4622222222222222	0.8711111111111114	
3	2.4622222222222222	6.92731645541838	18.187614814814814	$y = 18.187614814814814x - 37.854633$	2.081341247671579	0.3808809745506432	
4	2.081341247671579	1.0163315496105625	12.995944167777253	$y = 12.995944167777253x - 26.032663$	2.003137499141287	0.07820374853029177	
5	2.003137499141287	0.03770908398584538	12.037679521398031	$y = 12.037679521398031x - 24.075418$	2.000004911675504	0.0031325874657830432	
6	2.000004911675504	0.00005894025079733467	12.000058940178423	$y = 12.000058940178423x - 24.000118$	2.0000000000120623	0.00000491166344174232	
7	2.0000000000120623	1.447482134153688e-10	12.000000000144748	$y = 12.000000000144748x - 24$	2	1.20623511179474e-11	
							f(2) = 0

Beispiel 2: Zu der Funktion $f(x) = x^3 + e^{-0,5x}$ ist näherungsweise der Wendepunkt nahe 0 zu bestimmen. Es gilt für die Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 0,5e^{-0,5x}$, $f''(x) = 6x + 0,25e^{-0,5x}$. Die 2. Ableitung ist dann zur Bestimmung des Wendepunktes gleich 0 zu setzen, jedoch ist die Gleichung $6x + 0,25e^{-0,5x} = 0$ algebraisch nicht lösbar. Es sei daher die Funktion im Newtonverfahren: $\Phi(x) = f''(x) = 6x + 0,25e^{-0,5x}$ definiert und abgeleitet: $\Phi'(x) = 6 - 0,125e^{-0,5x}$, so dass als Iterationsgleichung gilt: $x_{n+1} = x_n - \frac{\Phi(x_n)}{\Phi'(x_n)} = x_n - \frac{6x_n + 0,25e^{-0,5x_n}}{6 - 0,125e^{-0,5x_n}}$. Damit ergibt sich die Iterationstabelle:

Newtonverfahren: $f(x) = 6x + 0,25e^{-0,5x}$, $f'(x) = 6 - 0,125e^{-0,5x}$, $x_0 = 0$

Iteration $n =$	$x_{n-1} =$	$f(x_{n-1}) =$	$f'(x_{n-1}) =$	Tangente $y = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) + f(x_{n-1})$	$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	Abweichung $ x_n - x_{n-1} =$	Nullstelle
1	0	0,25	5,875	$y = 5,875x + 0,25$	-0.0425531914893617	0.0425531914893617	
2	-0.0425531914893617	0.000056990158677161506	5.872311930452576	$y = 5.872311930452576x + 0.249943$	0.04256289638231563	0.000009704892953932287	
3	-0.04256289638231563	3.0065949729873864e-12	5.87231131085155	$y = 5.87231131085155x + 0.249943$	0.04256289638282763	5.119932255936988e-13	
							$f(-0.04256289638282763) = 0$

Beispiel 3: Zur Bestimmung von Schnittstellen von zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist das Newtonverfahren über die Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x)$ zu nehmen; Schnittpunkte der Funktionen sind nämlich Nullstellen der Differenzfunktion. Es seien gegeben: $f(x) = 4 \cdot \sin x$, $g(x) = e^{-x}$. Die Differenzfunktion lautet: $d(x) = f(x) - g(x) = 4 \cdot \sin x - e^{-x}$, deren Ableitung heißt: $d'(x) = 4 \cdot \cos x + e^{-x}$. Es gibt unendlich viele Schnittstellen der beiden Funktionen, es sollen daher die ersten Schnittstellen mit positivem x -Wert gemäß der Iteration $x_{n+1} = x_n - \frac{d(x_n)}{d'(x_n)} = x_n - \frac{4 \sin x_n - e^{-x_n}}{4 \cos x_n + e^{-x_n}}$ bestimmt werden:

Newtonverfahren: $f(x) = 4\sin(x)e^{-x}$, $f'(x) = 4\cos(x) + e^{-x}$

$x_0 = 0$

Iteration n =	$x_n = x_n - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	Nullstelle
	0	
1	0.2	
2	0.2050756372225279	
3	0.20508004453594702	
4	0.20508004453929163	
		f(0.20508004453929163)=0

$x_0 = 3$

Iteration n =	$x_n = x_n - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	Nullstelle
	3	
1	3.1316288712473836	
2	3.1306703206294406	
3	3.1306703107826172	
4	3.1306703107826172	
		f(3.1306703107826172)=0

$x_0 = 6$

Iteration n =	$x_n = x_n - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	Nullstelle
	6	
1	6.291463476533594	
2	6.283651762867617	
3	6.283651950073052	
4	6.283651950073052	
		f(6.283651950073052)=0

Beispiel 4: Besondere Werte wie z.B. $\ln 2$ bestimmt man, indem das Problem in eine entsprechende Gleichung einkleidet, hier: $e^x = 2$. Der Gleichung entspricht die Nullstelle der Funktion $f(x) = e^x - 2$. Die Iteration im Newtonverfahren lautet:

Newtonverfahren: $f(x) = e^x - 2$, $f'(x) = e^x$, $x_0 = 0$

Iteration n =	$x_n = x_n - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	Nullstelle
	0	
1	1	
2	0.7357588823428847	
3	0.6940422999189153	
4	0.6931475810597714	
5	0.6931471805600254	
6	0.6931471805599453	
		f(0.6931471805599453) = 0

Also ist: $\ln 2 = 0.6931471805599453$.

Beispiel 5: Es ist ein Näherungswert für die reelle Zahl $\sqrt{2}$ zu bestimmen. Um das Newtonverfahren anzuwenden, definiert man die Parabelfunktion $f(x) = x^2 - 2$, die offensichtlich bei $x_N = \sqrt{2}$ eine Nullstelle hat. Wegen $f'(x) = 2x$ ergibt sich die Iterationsfolge:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \quad (*)$$

und weiter die Iterationstabelle:

Newtonverfahren: $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, $x_0 = 1$

Iteration n =	$x_n = x_n - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	Nullstelle
	1	
1	1.5	
2	1.4166666666666667	
3	1.4142156862745098	
4	1.4142135623746898	
5	1.4142135623730951	
		f(1.4142135623730951) = 0

Es ist damit: $\sqrt{2} = 1.4142135623730951$.

Allgemein gilt – ähnlich (*) – für die Bestimmung von Quadratwurzeln \sqrt{a} , $a > 0$, das schon aus der menschlichen Antike bekannte Heron-Verfahren:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}, \quad x_0 = a \quad (**)$$

Ein verallgemeinertes Heron-Verfahren zur Bestimmung von allgemeinen Wurzeln $\sqrt[r]{a}$, $a > 0$, r natürliche Zahl, ergibt sich mit $f(x) = x^r - a$, $f'(x) = rx^{r-1}$ und der Iterationsfolge:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^r - a}{rx_n^{r-1}} = x_n - \frac{x_n}{r} + \frac{a}{rx_n^{r-1}} = \frac{(r-1)x_n}{r} + \frac{a}{rx_n^{r-1}} \quad \text{als: } x_{n+1} = \frac{(r-1)x_n}{r} + \frac{a}{rx_n^{r-1}}, \quad x_0 = a \quad (***)$$

So lässt sich vermöge (***) die Wurzel $\sqrt[3]{5040} = 3.3800151591412963$ bestimmen mit:

Iteration zur Bestimmung von $\sqrt[7]{5040}$: $x_{n+1} = 6x_n/7 + 5040/7/x_n^6$, $x_0 = 100$

Schritt n =	Näherung zu $\sqrt[7]{5040}$ $x_n =$	Schritt n =	Näherung zu $\sqrt[7]{5040}$ $x_n =$	Schritt n =	Näherung zu $\sqrt[7]{5040}$ $x_n =$	Schritt n =	Näherung zu $\sqrt[7]{5040}$ $x_n =$
0	100	8	29.135715886070237	16	8.490054715687121	24	3.3817990774579787
1	85.7142857150057	9	24.973471936493848	17	7.279112270526817	25	3.380017979741903
2	73.46938775753473	10	21.405836056389493	18	6.24407927433462	26	3.380015159148358
3	62.97376093960796	11	18.34786696100089	19	5.364216432345142	27	3.380015159141297
4	53.977509388351315	12	15.726761981476002	20	4.62811981886154	28	3.380015159141296
5	46.26643664769773	13	13.480129286315934	21	4.040226258180499	29	3.3800151591412963
6	39.656945771433406	14	11.554516527509845	22	3.628589334337566	30	3.3800151591412963
7	33.99166798919025	15	9.904173876481193	23	3.425651304976211		