Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Polynome > Horner-Schema

Das Horner-Schema gilt für Polynome, also für Funktionen von der Form:

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

mit den reellen Zahlen $a_0, \ldots a_n$ und $n\varepsilon\mathbf{N}$ als Grad des Polynoms. Mit dem Horner-Schema lässt sich

a) der Wert des Polynoms und seiner Ableitungen an einer Stelle x_0 berechnen, also: $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ usw.,
b) über die Bestimmung von Nullstellen $x_1, x_2, \ldots$ eine Reduzierung des Polynoms bis hin zur Zerlegung der Funktion in Linear- und quadratische Faktoren durchführen, also gemäß der Faktorzerlegung: $f(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2) \ldots$,
c) das Polynom um eine Stelle x_0 entwickeln, also als Polynom mit Potenzen $(x-x_0)^i$ $(i=1,\ldots n)$ bringen: $f(x) = r_n(x-x_0)^n + r_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \ldots + r_1(x-x_0) + r_0$.

Grundlage für das Horner-Schema ist dabei die Identität (*) der nachstehenden Polynomterme:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = ((\ldots(a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-3})x + \ldots + a_2)x + a_1)x + a_0 \quad (*)$$

Die Identität (*) führt auf das

Horner-Schema

	a_n	a_{n-1} x_0b_{n-1}	a_{n-2} x_0b_{n-2}	…	a_1 x_0b_1	a_0 x_0b_0
x_0	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} =$ $a_{n-1} + x_0b_{n-1} =$ $a_{n-1} + x_0a_n$	$b_{n-3} =$ $a_{n-2} + x_0b_{n-2} =$ $a_{n-2} + x_0a_{n-1} + x_0^2a_n$	b_1	$b_0 =$ $a_1 + x_0b_1 =$ $a_1 + x_0a_2 + x_0^2a_3$ $+ \ldots + x_0^{n-1}a_n$	$r_0 =$ $a_0 + x_0b_0 =$ $a_0 + x_0a_1 + x_0^2a_2$ $+ \ldots + x_0^na_n$

mit den Koeffizienten des Polynoms $a_0, a_1, \ldots a_n$, der Stelle x_0, $r_0 = f(x_0)$ als Rest und im Fall $r_0 = 0$ den Zahlen $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ als Koeffizienten des reduzierten Polynoms $f_1(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0$. Im Horner-Schema wird also wie folgt gerechnet:

I. Die Spalte j des Schemas $(j=0,\ldots n)$ enthält in Zeile 1 den Koeffizienten a_{n-j} des Polynoms f(x).
II. Für die Spalte 0 des Schemas ergibt sich die Zahl b_{n-1} in Zeile 3 als Koeffizient a_n des Polynoms.
III. In der Spalte j des Schemas $(j=1,\ldots n)$ errechnet man die Zahl in Zeile 2, indem man die Stelle x_0 mit dem Wert der Vorgängerspalte in Zeile 3, mit b_{n-j+1} multipliziert. Die Summe der Werte in Zeile 1 und Zeile 2 ergibt die Zahl in Zeile 3, d.h. b_{n-j}.

Aus dem Horner-Schema folgt noch die Identität (**):

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x-x_0)(b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0) + r_0 \quad (**)$$

(**) ist dann dafür verantwortlich, dass wiederholtes Anwenden des Horner-Schemas die Berechnungen der oben genannten Punkte a) bis c) ermöglicht.

Anwendungen und Beispiele:

a) Funktionswerte, Werte der Ableitungen: Für das Polynom $f(x) = x^3 - 10x^2 + 25$ soll an der Stelle $x_0 = -2$ der Wert der Funktion sowie der 1., 2. und 3. Ableitung berechnet werden. Die Koeffizienten des Polynoms sind: 1, -10, 0, 25, als Horner-Schema ergibt sich:

	1	-10	0	25
		(-2) 1· = $\boxed{-2}$	(-2) (-12)· = $\boxed{24}$	(-2) 24 = $\boxed{-48}$
-2	$\boxed{1}$	-10 – 2 = $\boxed{-12}$	0 + 24 = $\boxed{24}$	$\boxed{-23}$ = f(-2)
		(-2) 1· = $\boxed{-2}$	(-2) (-14) = $\boxed{28}$	
-2	$\boxed{1}$	-12 – 2 = $\boxed{-14}$	24 + 28 = $\boxed{52}$ = f′(-2)	
		(-2) 1· = $\boxed{-2}$		
-2	$\boxed{1}$	-14 – 2 = $\boxed{-16}$ = f′′(-2)/2 => f′′(-2) = 2·(-16) = -32		
		(-2) 1· = $\boxed{-2}$		
-2	$\boxed{1}$ = f′′′(-2)/6 => f′′′(-2) = 6·1 = 6			

Die doppelt umrahmten Diagonalelemente des Horner-Schemas $r_0 = -23$, $r_1 = 52$, $r_2 = -16$ und $r_3 = 1$ geben Funktionswert und Ableitungswerte des Polynoms f(x) an der Stelle x_0 an vermöge der Beziehung (***):

$$f(x_0) = r_0,\ f^{(i)}(x_0) = i!\cdot r_i\ (i=1,\dots n)$$

mit $i! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i$ (i Fakultät), 0! = 1.

b) Zerlegung eines Polynoms, Nullstellenbestimmung: Jedes Polynom lässt sich in ein Produkt aus linearen und quadratischen Faktoren $p_1(x)$, $p_2(x)$, … $p_m(x)$ zerlegen, so dass folgt:

$$p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot\ldots\cdot p_m(x) = 0 \Leftrightarrow p_1(x) = 0 \vee p_2(x) = 0 \vee \ldots p_m(x) = 0$$

Durch das Horner-Schema lassen sich Nullstellen und damit eine Zerlegung des Polynoms bestimmen. Das kubische Polynom $f(x) = 2x^3 + 3x^2 – 23x –12$ besitzt die Nullstelle $x_1 = 3$, so dass das nachstehende Horner-Schema zu einem reduzierten Polynom $f_1(x)$ führt:

	2	3	-23	-12
		6	27	12
3	2	9	4	0

Das reduzierte Polynom lautet also: $f_1(x) = 2x^2 + 9x + 4$. Aus $f_1(x) = 0$ erhalten wir mit Mitternachts- oder p-q-Formel die weiteren Nullstellen $x_2 = -0{,}5$ und $x_3 = -4$. Die Zerlegung des Polynoms f(x) lautet damit:

$$f(x) = (x–3)(2x^2 + 9x + 4) = 2(x–3)(x+0{,}5)(x+4).$$

c) Entwicklung von Polynomen: Für ein $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ heißt die Darstellung $f(x) = r_n(x-x_0)^n + r_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \ldots + r_1(x-x_0) + r_0$ die Entwicklung der Funktion um eine Stelle x_0. Die Koeffizienten r_i (i=0,…n) erhalten wir (u.a.) aus dem Horner-Schema. Das Horner-Schema im obigen Beispiel a) führt damit das Polynom $f(x) = x^3 – 10x^2 + 25$ über in die Darstellung $f(x) = \boxed{1}(x+2)^3 \boxed{– 16}(x+2)^2 \boxed{+52}(x+2) \boxed{– 48}$. Ausrechnen bestätigt die Identität beider Darstellungen. Aus der Beziehung (***) folgt noch der Entwicklungssatz für Polynome um eine Stelle x_0:

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \ldots + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + f(x_0)$$

Literaturhinweise: dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München [3]2003, S.58-63 (Polynomgleichungen, Faktorzerlegung von Polynomen); dtv-Atlas zur Mathematik. Tafeln und Texte, v. F. REINHARDT u. H. SOEDER, Bd.2 (= dtv 3008), München 1977, S.317 (Horner-Schema); NICKEL, H., KETTWIG, G., BEINHOFF, H., PAULI, W., KREUL, H., LEUPOLD, W., Algebra und Geometrie für Ingenieure, Thun [15]1988, S.203-217 (Horner-Schema und dessen Anwendungen); PAPULA, L., Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Wiesbaden [9]2006, S.79 (Horner-Schema)

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 10.2012