

Mathematik > Analysis > Polynome > Horner-Schema

Das Horner-Schema gilt für Polynome, also für Funktionen von der Form:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit den reellen Zahlen a_0, \dots, a_n und $n \in \mathbf{N}$ als Grad des Polynoms. Mit dem Horner-Schema lässt sich

- a) der Wert des Polynoms und seiner Ableitungen an einer Stelle x_0 berechnen, also: $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ usw.,
- b) über die Bestimmung von Nullstellen x_1, x_2, \dots eine Reduzierung des Polynoms bis hin zur Zerlegung der Funktion in Linear- und quadratische Faktoren durchführen, also gemäß der Faktorzerlegung: $f(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2) \dots$,
- c) das Polynom um eine Stelle x_0 entwickeln, also als Polynom mit Potenzen $(x-x_0)^i$ ($i=1, \dots, n$) bringen: $f(x) = r_n(x-x_0)^n + r_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \dots + r_1(x-x_0) + r_0$.

Grundlage für das Horner-Schema ist dabei die Identität (*) der nachstehenden Polynomterme:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = ((\dots(a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-3})x + \dots + a_2)x + a_1)x + a_0 \quad (*)$$

Die Identität (*) führt auf das

| Horner-Schema | | | | | | |
|---------------|-----------------|---|---|-------|--|--|
| | a_n | a_{n-1} | a_{n-2} | ... | a_1 | a_0 |
| | | $x_0 b_{n-1}$ | $x_0 b_{n-2}$ | | $x_0 b_1$ | $x_0 b_0$ |
| x_0 | $b_{n-1} = a_n$ | $b_{n-2} =$ $a_{n-1} + x_0 b_{n-1} =$ $a_{n-1} + x_0 a_n$ | $b_{n-3} =$ $a_{n-2} + x_0 b_{n-2} =$ $a_{n-2} + x_0 a_{n-1} + x_0^2 a_n$ | b_1 | $b_0 =$ $a_1 + x_0 b_1 =$ $a_1 + x_0 a_2 + x_0^2 a_3$ $+ \dots + x_0^{n-1} a_n$ | $r_0 =$ $a_0 + x_0 b_0 =$ $a_0 + x_0 a_1 + x_0^2 a_2$ $+ \dots + x_0^n a_n$ |

mit den Koeffizienten des Polynoms a_0, a_1, \dots, a_n , der Stelle x_0 , $r_0 = f(x_0)$ als Rest und im Fall $r_0 = 0$ den Zahlen b_0, b_1, \dots, b_{n-1} als Koeffizienten des reduzierten Polynoms $f_1(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$. Im Horner-Schema wird also wie folgt gerechnet:

- I. Die Spalte j des Schemas ($j=0, \dots, n$) enthält in Zeile 1 den Koeffizienten a_{n-j} des Polynoms $f(x)$.
- II. Für die Spalte 0 des Schemas ergibt sich die Zahl b_{n-1} in Zeile 3 als Koeffizient a_n des Polynoms.
- III. In der Spalte j des Schemas ($j=1, \dots, n$) errechnet man die Zahl in Zeile 2, indem man die Stelle x_0 mit dem Wert der Vorgängerspalte in Zeile 3, mit b_{n-j+1} multipliziert. Die Summe der Werte in Zeile 1 und Zeile 2 ergibt die Zahl in Zeile 3, d.h. b_{n-j} .

Aus dem Horner-Schema folgt noch die Identität (**):

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (x-x_0)(b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0) + r_0 \quad (**)$$

(**) ist dann dafür verantwortlich, dass wiederholtes Anwenden des Horner-Schemas die Berechnungen der oben genannten Punkte a) bis c) ermöglicht.

Anwendungen und Beispiele:

a) Funktionswerte, Werte der Ableitungen: Für das Polynom $f(x) = x^3 - 10x^2 + 25$ soll an der Stelle $x_0 = -2$ der Wert der Funktion sowie der 1., 2. und 3. Ableitung berechnet werden. Die Koeffizienten des Polynoms sind: 1, -10, 0, 25, als Horner-Schema ergibt sich:

| | | | | |
|----|---|---------------------|-------------------------|---|
| | 1 | -10 | 0 | 25 |
| | | $(-2) \cdot 1 = -2$ | $(-2) \cdot (-12) = 24$ | $(-2) \cdot 24 = -48$ |
| -2 | 1 | $-10 - 2 = -12$ | $0 + 24 = 24$ | $-23 = f(-2)$ |
| | | $(-2) \cdot 1 = -2$ | $(-2) \cdot (-14) = 28$ | |
| -2 | 1 | $-12 - 2 = -14$ | $24 + 28 = 52$ | $52 = f'(-2)$ |
| | | $(-2) \cdot 1 = -2$ | | |
| -2 | 1 | $-14 - 2 = -16$ | | $-16 = f''(-2)/2 \Rightarrow f''(-2) = 2 \cdot (-16) = -32$ |
| | | $(-2) \cdot 1 = -2$ | | |
| -2 | 1 | | | $-16 = f'''(-2)/6 \Rightarrow f'''(-2) = 6 \cdot 1 = 6$ |

Die doppelt umrahmten Diagonalelemente des Horner-Schemas $r_0 = -23$, $r_1 = 52$, $r_2 = -16$ und $r_3 = 1$ geben Funktionswert und Ableitungswerte des Polynoms $f(x)$ an der Stelle x_0 an vermöge der Beziehung (***):

$$f(x_0) = r_0, f^{(i)}(x_0) = i! \cdot r_i \quad (i=1, \dots, n)$$

mit $i! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i$ (i Fakultät), $0! = 1$.

b) Zerlegung eines Polynoms, Nullstellenbestimmung: Jedes Polynom lässt sich in ein Produkt aus linearen und quadratischen Faktoren $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... $p_m(x)$ zerlegen, so dass folgt:

$$p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \dots \cdot p_m(x) = 0 \Leftrightarrow p_1(x) = 0 \vee p_2(x) = 0 \vee \dots \vee p_m(x) = 0$$

Durch das Horner-Schema lassen sich Nullstellen und damit eine Zerlegung des Polynoms bestimmen. Das kubische Polynom $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 23x - 12$ besitzt die Nullstelle $x_1 = 3$, so dass das nachstehende Horner-Schema zu einem reduzierten Polynom $f_1(x)$ führt:

| | | | | |
|---|---|---|-----|-----|
| | 2 | 3 | -23 | -12 |
| | | 6 | 27 | 12 |
| 3 | 2 | 9 | 4 | 0 |

Das reduzierte Polynom lautet also: $f_1(x) = 2x^2 + 9x + 4$. Aus $f_1(x) = 0$ erhalten wir mit Mitternachts- oder p-q-Formel die weiteren Nullstellen $x_2 = -0,5$ und $x_3 = -4$. Die Zerlegung des Polynoms $f(x)$ lautet damit:

$$f(x) = (x-3)(2x^2 + 9x + 4) = 2(x-3)(x+0,5)(x+4).$$

c) Entwicklung von Polynomen: Für ein $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ heißt die Darstellung $f(x) = r_n(x-x_0)^n + r_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \dots + r_1(x-x_0) + r_0$ die Entwicklung der Funktion um eine Stelle x_0 . Die Koeffizienten r_i ($i=0, \dots, n$) erhalten wir (u.a.) aus dem Horner-Schema. Das Horner-Schema im obigen Beispiel a) führt damit das Polynom $f(x) = x^3 - 10x^2 + 25$ über in die Darstellung $f(x) = 1(x+2)^3 - 16(x+2)^2 + 52(x+2) - 48$. Ausrechnen bestätigt die Identität beider Darstellungen. Aus der Beziehung (***) folgt noch der Entwicklungssatz für Polynome um eine Stelle x_0 :

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1} + \dots + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + f(x_0)$$

Literaturhinweise: dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München ³2003, S.58-63 (Polynomgleichungen, Faktorzerlegung von Polynomen); dtv-Atlas zur Mathematik. Tafeln und Texte, v. F. REINHARDT u. H. SOEDER, Bd.2 (= dtv 3008), München 1977, S.317 (Horner-Schema); NICKEL, H., KETTWIG, G., BEINHOFF, H., PAULI, W., KREUL, H., LEUPOLD, W., Algebra und Geometrie für Ingenieure, Thun ¹⁵1988, S.203-217 (Horner-Schema und dessen Anwendungen); PAPULA, L., Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Wiesbaden ⁹2006, S.79 (Horner-Schema)