Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Summenformeln

Es gelten für Summen von Potenzen von natürlichen Zahlen:

Summenformeln
$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1+1+1+..+1 = n$
$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+..+n = \frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1+4+9+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1+8+27+64+...+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

<u>Beweise</u>:

Die Formeln können bewiesen werden durch den allgemeinen (an Stammfunktionen von Integralen erinnernden) Ansatz:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + ... + a_1 n = \sum_{i=1}^{k+1} a_i n^i$$

für natürliche Exponenten k und reelle Koeffizienten a_1, … a_{k+1}. Die Koeffizienten errechnen sich mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems von Partialsummen für n = 1, … k+1:

$$\sum_{i=1}^{1} i^k = 1 = a_{k+1} + a_k + ... + a_1 = \sum_{i=1}^{k+1} a_i \quad \text{(n=1)}$$

$$\sum_{i=1}^{2} i^k = 1+2^k = a_{k+1}2^{k+1} + a_k 2^k + ... + 2a_1 = \sum_{i=1}^{k+1} a_i 2^i \quad \text{(n=2)}$$

$$\sum_{i=1}^{3} i^k = 1+2^k+3^k = a_{k+1}3^{k+1} + a_k 3^k + ... + 3a_1 = \sum_{i=1}^{k+1} a_i 3^i \quad \text{(n=3)}$$

…

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^k = a_{k+1}(k+1)^{k+1} + a_k (k+1)^k + ... + (k+1)a_1 = \sum_{i=1}^{k+1} a_i (k+1)^i \quad \text{(n=k+1)}$$

a) Der Beweis der Gaußformel für die ersten n natürlichen Zahlen gelingt dann wie folgt: Zunächst ergibt sich der Ansatz:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+..+n = a_2 n^2 + a_1 n,$$

so dass a_1, a_2 zu bestimmen sind. Das lineare Gleichungssystem ermittelt sich als:

$1 = a_1 + a_2$
$3 = 2a_1 + 4a_2$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems errechnet sich nachstehend:

Anfangstableau:

a_1	a_2		*R.S:*
1	1	|	1
2	4	|	3

1. Schritt: 1*(*2*) - 2*(*1*) /

1	1	|	1
0	2	|	1

mit: a_2 = 0,5, a_1 = 0,5. Die Formel lautet also:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+..+n = 0{,}5n^2 + 0{,}5n = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Der Beweis der Summenformel für die ersten n natürlichen Quadratzahlen ergibt sich zunächst gemäß dem Ansatz:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1+4+9+...+n^2 = a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n.$$

Die Partialsummenfolge $S_1 = 1$, $S_2 = 5$, $S_3 = 14$ bildet die Grundlage des linearen Gleichungssystems:

$1 = a_3 + a_2 + a_1$
$5 = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1$
$14 = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt mit:

Anfangstableau:

a_1	a_2	a_3		R.S.
1	1	1	|	1
2	4	8	|	5
3	9	27	|	14

1. Schritt: 1*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*3*) - 3*(*1*) /

1	1	1	|	1
0	2	6	|	3
0	6	24	|	11

2. Schritt: 1*(*3*) - 3*(*2*) /

1	1	1	|	1
0	2	6	|	3
0	0	6	|	2

die Lösungen: $a_3 = 1/3$, $a_2 = 1/2$, $a_1 = 1/6$. Also gilt die Formel:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1+4+9+...+n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

c) Wir berechnen die Summe: $\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1+16+81+...+n^4$. Der Ansatz lautet:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1+16+81+...+n^4 = a_5n^5 + a_4n^4 + a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n,$$

das lineare Gleichungssystem:

$1 = a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$
$17 = 32a_5 + 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1$
$98 = 243a_5 + 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 3a_1$
$354 = 1024a_5 + 256a_4 + 64a_3 + 16a_2 + 4a_1$
$979 = 3125a_5 + 625a_4 + 125a_3 + 25a_2 + 5a_1$

Die Lösungen des Gleichungssystems sind: $a_5 = 1/5$, $a_4 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, $a_2 = 0$, $a_1 = -1/30$. Die gesuchte Formel lautet damit:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1+16+81+...+n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n}{30}(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - n) =$$

$$\frac{n(n+1)}{30}(6n^3 + 9n^2 + n - 1) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Die Umformungen der Formel ergeben sich mit Ausklammern und Polynomdivisionen.