Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Symmetrie von Funktionen

Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung des Koordinatensystems

Reellwertige Funktionen f: D_f -> **R** lassen sich vermöge x -> f(x) = y, xεD_f, yεW_f (D_f = Definitionsbereich, W_f = Wertebereich) als Kurve von Punkten (x|y) in einem kartesischen x-y-Koordinatensysten darstellen (Graph der Funktion).

Eine Funktion f: D_f -> **R** heißt dann achsensymmetrisch zur y-Achse des Koordinatensystems (y-achsensymmetrisch, gerade), wenn

$$f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \epsilon D_f$$

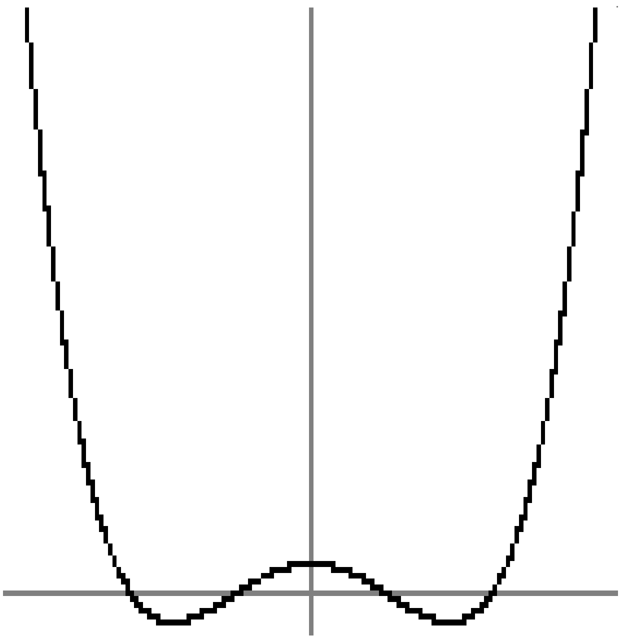
gilt. Sie heißt punktsymmetrisch zum Ursprung O(0|0) des Koordinatensystems (O-punktsymmetrisch, ungerade), wenn

$$f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \epsilon D_f$$

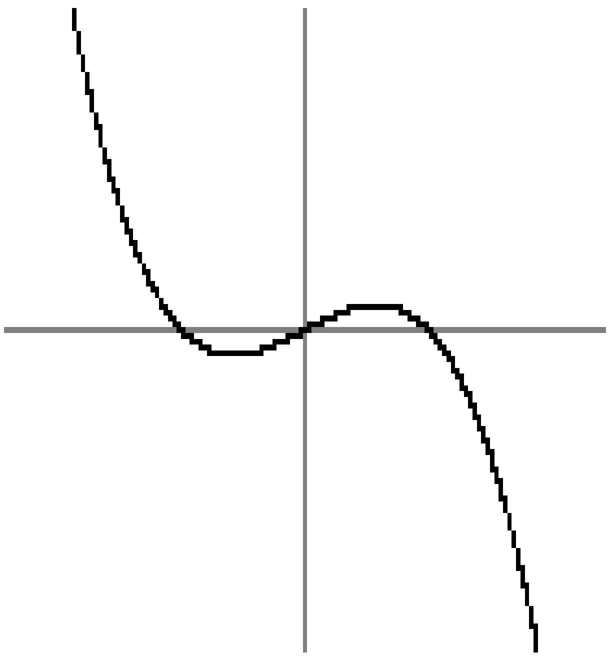
gilt.

Beispiele:

a) $f(x) = 0{,}1x^4-2x^2+5$ (y-achsensymmetrisch)



b) $f(x) = -0{,}5x^3 + 4x$ (O-punktsymmetrisch)



c) Für die ganz rationale Funktion $f(x) = 0{,}1x^4–2x^2+5$ lässt sich die y-Achsensymmetrie wie folgt nachweisen:

$$f(-x) = 0{,}1(-x)^4-2(-x)^2+5 = 0{,}1x^4-2x^2+5 = f(x)$$

(Minuszeichen in den Basen von Potenzen fallen bei geraden Hochzahlen [0, 2, 4] weg).

d) Die gebrochen rationale Funktion $f(x) = x - \frac{10}{x}$ ist ungerade. Die Punktsymmetrie der Funktion zum Koordinatenursprung ergibt sich aus:

$$f(-x) = (-x) - \frac{10}{(-x)} = -x + \frac{10}{x} = -\left(x - \frac{10}{x}\right) = -f(x)$$

(Minuszeichen in den Basen von Potenzen bleiben bei ungeraden Hochzahlen [-1, 1] erhalten).

Folgerungen

Die obigen Beispiele geben Anlass zu folgenden Feststellungen:

a) Eine ganz rationale Funktion mit Potenzen von geraden Hochzahlen (0, 2, 4, …) ist y-achsensymmetrisch.
b) Eine ganz rationale Funktion mit Potenzen von ungeraden Hochzahlen (1, 3, 5, …) ist O-punktsymmetrisch.
c) Für ganz rationale Funktionen mit Potenzen gleichzeitig von geraden und ungeraden Hochzahlen ist keine Symmetrie erkennbar.
d) Eine Funktion als Summe von Vielfachen von Potenzen mit (auch negativen) geraden Exponenten (…, -4, -2, 0, 2, 4, …) ist y-achsensymmetrisch.
e) Eine Funktion als Summe von Vielfachen von Potenzen mit (auch negativen) ungeraden Exponenten (…, -3, -1, 1, 3, 5, …) ist O-punktsymmetrisch.

Die Feststellungen ergeben sich aus dem folgenden Satz:

a) Vielfache und Summen von y-achsensymmetrischen Funktionen sind y-achsensymmetrisch.
b) Vielfache und Summen von O-punktsymmetrischen Funktionen sind O-punktsymmetrisch.
c) Gemischte Summen aus achsensymmetrischen und punktsymmetrischen Funktionen sind weder y-achsensymmetrisch noch O-punktsymmetrisch.

Beweis von b): Es seien $u(x)$, $v(x)$ O-punktsymmetrische Funktionen mit $u(-x) = -u(x)$, $v(-x) = -v(x)$. Dann gilt für die Vielfachenfunktion $f(x) = c\cdot u(x)$: $f(-x) = c\cdot u(-x) = c\cdot(-u(x)) = -c\cdot u(x) = -f(x)$, also O-Punktsymmetrie, und für die Summenfunktion $f(x) = u(x) + v(x)$: $f(-x) = u(-x) + v(-x) = -u(x) - v(x) = -[u(x) + v(x)] = -f(x)$, also O-Punktsymmetrie.

Weiter gilt für zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ und deren Produkt $f(x) = u(x)\cdot v(x)$ bzw. Quotient $f(x) = u(x)/v(x)$ der Satz:

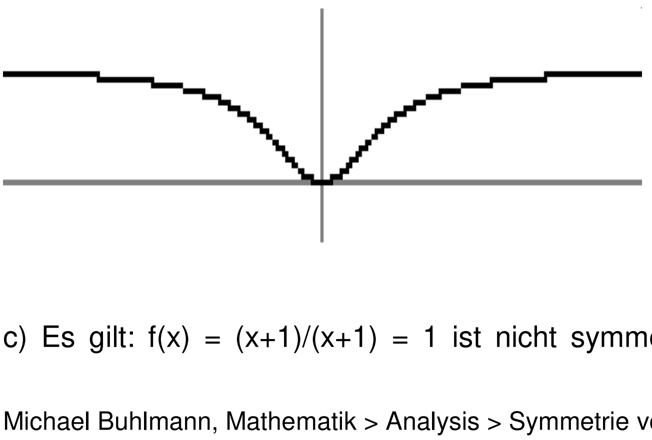
a) $u(x)$ y-achsensymmetrisch, $v(x)$ y-achsensymmetrisch => $f(x)$ y-achsensymmetrisch
b) $u(x)$ O-punktsymmetrisch, $v(x)$ y-achsensymmetrisch => $f(x)$ O-punktsymmetrisch
c) $u(x)$ y-achsensymmetrisch, $v(x)$ O-punktsymmetrisch => $f(x)$ O-punktsymmetrisch
d) $u(x)$ O-punktsymmetrisch, $v(x)$ O-punktsymmetrisch => $f(x)$ y-achsensymmetrisch

Beweis von d): Es seien $u(x)$, $v(x)$ O-punktsymmetrische Funktionen mit $u(-x) = -u(x)$, $v(-x) = -v(x)$. Dann gilt für das Produkt $f(x) = u(x)\cdot v(x)$: $f(-x) = u(-x)\cdot v(-x) = (-u(x))\cdot(-v(x)) = u(x)\cdot v(x) = f(x)$, also y-Achsensymmetrie. Gleiches ergibt sich für den Quotienten $f(x) = u(x)/v(x)$: $f(-x) = u(-x)/v(-x) = (-u(x))/(-v(x)) = u(x)/v(x) = f(x)$.

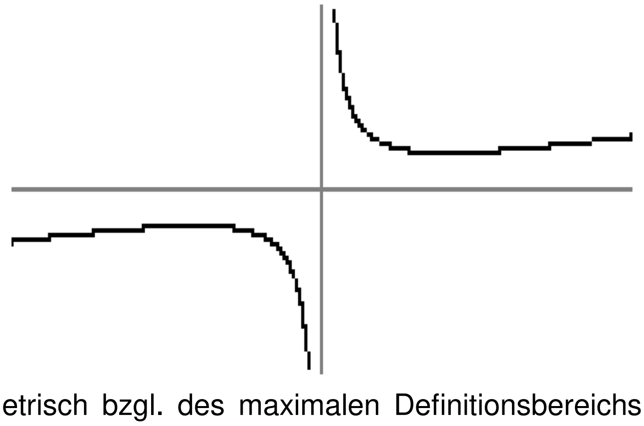
Das durch die obigen mathematischen Gesetzmäßigkeiten formulierte Konzept der Ermittlung von Achsen- und Punktsymmetrie lässt sich damit auf Produkte von ganz rationalen Funktionen und auf gebrochen rationale Funktionen, also auf Brüche von ganz rationalen Funktionen übertragen. Bei gebrochen rationalen Funktionen ist auf die „Symmetrie" des maximalen Definitionsbereichs zu achten.

Beispiele:

a) $f(x) = 10x^2/(1+x^2)$ (y-achsensymmetrisch bei y-achsensymmetrischen Zähler $10x^2$ und Nenner $1+x^2$)



b) $f(x) = (x^2+4)/x$ (O-punktsymmetrisch bei y-achsensymmetrischen Zähler x^2+4, O-punktsymmetrischen Nenner x)



c) Es gilt: $f(x) = (x+1)/(x+1) = 1$ ist nicht symmetrisch bzgl. des maximalen Definitionsbereichs

D_f = **R**\{-1} (nicht symmetrische Definitionsmenge).

Für <u>trigonometrische Funktionen</u> gilt:

a) Die Sinusfunktion f(x) = sin(x) ist O-punktsymmetrisch.
b) Die Kosinusfunktion f(x) = cos(x) ist y-achsensymmetrisch.
c) Die Tangensfunktion f(x) = tan(x) ist O-punktsymmetrisch.

Die <u>Exponentialfunktion</u> $f(x) = e^x$ ist selbst nicht symmetrisch, jedoch sind Exponentialfunktionen mit y-achsensymmetrischen Exponenten y-achsensymmetrisch und gewisse Summen von Exponentialfunktionen wie $f(x) = e^x + e^{-x}$ y-achsensymmetrisch oder wie $f(x) = e^x - e^{-x}$ O-punktsymmetrisch.

Es gelten noch die mathematischen <u>Aussagen</u>:

a) Für jede Funktion w(x) ist die Funktion f(x) = w(x) + w(-x) symmetrisch zur y-Achse des Koordinatensystems.
b) Für jede Funktion w(x) ist die Funktion f(x) = w(x) – w(-x) symmetrisch zum Ursprung O des Koordinatensystems.

<u>Beweis</u> von a): Mit f(x) = w(x) + w(-x) gilt: f(-x) = w(-x) + w(-(-x)) = w(-x) + w(x) = w(x) + w(-x) = f(x), also die y-Achsensymmetrie von f(x).
Beweis von b): Mit f(x) = w(x) – w(-x) gilt: f(-x) = w(-x) – w(-(-x)) = w(-x) – w(x) = -w(x) + w(-x) = -(w(x) – w(-x)) = -f(x), also die O-Punktsymmetrie von f(x).

Daher lässt sich jede Funktion f(x) in eindeutiger Weise in einen <u>geraden und ungeraden Anteil</u> $f_g(x)$ und $f_u(x)$ aufteilen gemäß:

$$f_g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2},\ f_u(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \Rightarrow f(x) = f_g(x) + f_u(x).$$

Für Funktionen f(x) = u(v(x)), die aus einer <u>Hintereinanderschaltung von Funktionen</u> entstehen, gilt noch:

a) u(x) beliebig, v(x) y-achsensymmetrisch => f(x) = u(v(x)) y-achsensymmetrisch
b) u(x), v(x) O-punktsymmetrisch => f(x) = u(v(x)) O-punktsymmetrisch

<u>Differentiation und Integration symmetrischer Funktionen</u>

Symmetrieeigenschaften von Funktionen spielen auch bei <u>Ab- und Aufleitungen</u> eine Rolle. Es gilt der <u>Satz</u>:

a) Die Ableitung f'(x) einer y-achsensymmetrischen Funktion f(x) ist O-punktsymmetrisch.
b) Die Ableitung f'(x) einer O-punktsymmetrischen Funktion f(x) ist y-achsensymmetrisch.

<u>Beweis</u> von a): Es ist wegen der vorausgesetzten y-Achsensymmetrie der Funktion f(x): f(-x) = f(x). Dann gilt hinsichtlich der Ableitung auch nach der Kettenregel

$$f(x) \to f'(x),\ f(-x) \to (f(-x))' = f'(-x)\cdot(-1) = -f'(-x) \Rightarrow -f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f'(-x) = -f'(x),$$

d.h.: die Ableitungsfunktion f'(x) ist O-punktsymmetrisch.
Beweis von b): Es ist wegen der vorausgesetzten O-Punktsymmetrie der Funktion f(x): f(-x) = -f(x). Dann gilt hinsichtlich der Ableitung auch nach der Kettenregel

$$-f(x) \to -f'(x),\ f(-x) \to (f(-x))' = f'(-x)\cdot(-1) = -f'(-x) \Rightarrow -f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x),$$

d.h.: die Ableitungsfunktion f'(x) ist y-achsensymmetrisch.

Ergänzt wird der eben dargelegte Sachverhalt noch durch den <u>Satz</u>:

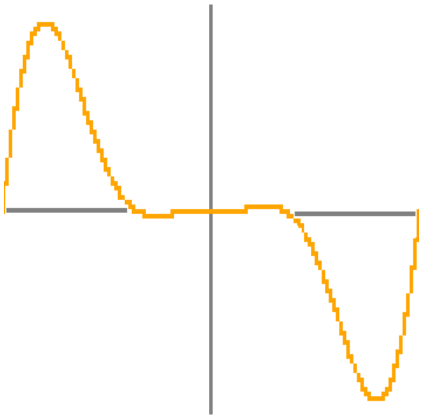
a) Für eine O-punktsymmetrische Funktion f(x) ist jede Stammfunktion F(x) y-achsensymmetrisch.
b) Für eine y-achsensymmetrische Funktion f(x) existiert es eine O-punktsymmetrische Stammfunktion mit F(0) = 0.

<u>Hinweis</u> zu b): Die Existenz einer Stammfunktion F(x) durch den Koordinatenursprung ist gesichert, wenn man die Stammfunktion als Integralfunktion $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ definiert.

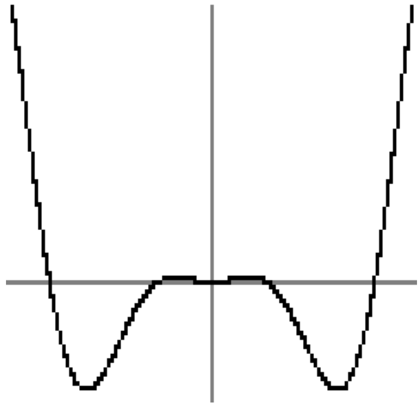
Beispiel:

Zur y-achsensymmetrischen Funktion $f(x) = x^2\cos(x)$ ergibt sich:

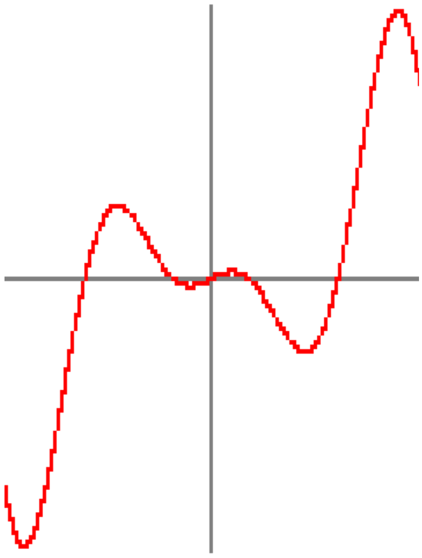
F(x) (mit F(0)=0, O-punktsymmetrisch):



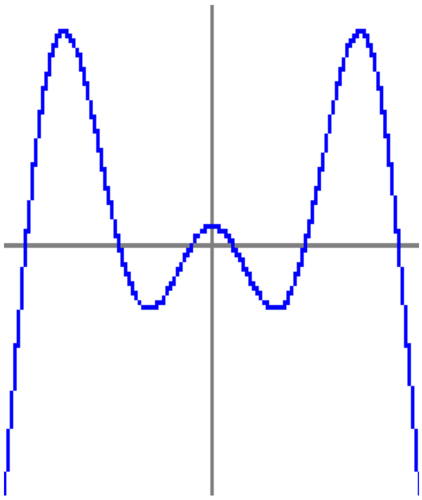
$f(x) = x^2\cos(x)$ (y-achsensymmetrisch):



f‘(x) (O-punktsymmetrisch):



f‘‘(x) (y-achsensymmetrisch):



Kurvendiskussion

Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion f(x) die folgende Vorgehensweise:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: f(x)
I. Ableitungen: f'(x), f''(x), f'''(x)
II. Nullstellen (Anzahl maximal n; Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), … (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel)
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal n-1; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IV. Wendepunkte (Anzahl maximal n-2; Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))
V. Symmetrie: a) Achsensymmetrie (zur y-Achse): f(-x) = f(x) b) Punktsymmetrie (zum Ursprung): f(-x) = -f(x) c) f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw. f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.

Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

Die Kurvendiskussion gerät also einfacher, weil auf Grund von y-Achsensymmetrie oder O-Punktsymmetrie der Funktion bzw. von deren Ableitungen gilt:

a) f(x) y-achsensymmetrisch => f(-x) = f(x), f'(-x) = -f'(x), f''(-x) = f''(x)
b) f(x) O-punktsymmetrisch => f(-x) = -f(x), f'(-x) = f'(x), f''(-x) = -f''(x)
c) f(x) y-achsensymmetrisch => Nullstellen bei N(±x_N|0), Extrempunkte als Hochpunkte bzw. Tiefpunkte H/T(±x_E|f(x_E)), Extrempunkt H/T(0|f(0)), Wendepunkte bei W(±x_W|f(x_W))
d) f(x) O-punktsymmetrisch => Nullstellen bei N(±x_N|0), Extrempunkte als Hochpunkt H(x_E|f(x_E)) bzw. Tiefpunkt T(-x_E|-f(x_E)), Wendepunkte bei W(±x_W|±f(x_W))

Bestimmungsaufgaben für ganz rationale Funktionen

Im Rahmen von Bestimmungsaufgaben für ganz rationale Funktionen werden die Koeffizienten des gesuchten Funktionsterms auf Grund gegebener Eigenschaften der Funktion ermittelt. Hierbei spielt auch die Symmetrie der zu bestimmenden Funktion f(x) eine Rolle gemäß der Vorgehensweise:

Funktion 2. Grades (Symmetrie zur y-Achse) (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades (Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades (Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))
$f(x) = ax^2 + c$ $f'(x) = 2ax$	$f(x) = ax^3 + cx$ $f'(x) = 3ax^2 + c$ $f''(x) = 6ax$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$ $f''(x) = 12ax^2 + 2c$
2 Unbekannte a, c-> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	2 Unbekannte a, c -> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	3 Unbekannte a, c, e -> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen
Lineare Gleichungen vom Typ:		
$f(x_1) = ax_1^2 + c = y_1$ $f'(x_2) = 2ax_2 = y_2$	$f(x_1) = ax_1^3 + cx_1 = y_1$ $f'(x_2) = 3ax_2^2 + c = y_2$ $f''(x_3) = 6ax_3 = y_3$	$f(x_1) = ax_1^4 + cx_1^2 + e = y_1$ $f'(x_2) = 4ax_2^3 + 2cx_2 = y_2$ $f''(x_3) = 12ax_3^2 + 2c = y_3$
für bestimmte x- und y-Werte		
Aufstellen des linearen Gleichungssystems: Gleichungen mit Unbekannten a, c, … gemäß den Funktionseigenschaften: Punkt P(x_1|y_1):	f(x_1) = y_1	

Nullstelle x_0 bzw. $N(x_0\|0)$:	$f(x_0) = 0$
Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt:	$f(0) = 0$
y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0\|y_0)$:	$f(0) = y_0$
Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$
Steigung m in x_1:	$f'(x_1) = m$
Berührpunkt x_1 mit der x-Achse:	$f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$
Ursprung O(0|0) als Berührpunkt:	$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$
Tangente y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$
Normale y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$
Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$
Hoch-/Tiefpunkt x_E:	$f'(x_E) = 0$
Hoch-/Tiefpunkt $H/T(x_E\|y_{€})$:	$f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$
Krümmung k in x_1:	$f''(x_1) = k$
Wendepunkt x_W:	$f''(x_W) = 0$
Wendepunkt $W(x_W\|y_W)$:	$f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$
Wendetangente y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$
Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$
Sattelpunkt x_S:	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$
Sattelpunkt $S(x_S\|y_S)$::	$f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$

Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, c, … ->

Aufstellen der Funktionsgleichung:

$f(x) = ax^2 + c$	$f(x) = ax^3 + cx$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Bestimmungsaufgabe für symmetrische ganz rationale Funktionen (2.-4. Grades)

Verallgemeinerung des Symmetriebegriffs

Der bisherige Symmetriebegriff wird nun verallgemeinert. Es ergeben sich die Definitionen:

Eine Funktion f: D_f -> **R** heißt achsensymmetrisch zur (senkrechten) Achse $x = x_0$, wenn

$$f(x_0-x) = f(x_0+x) \text{ für alle } x \in D_f$$

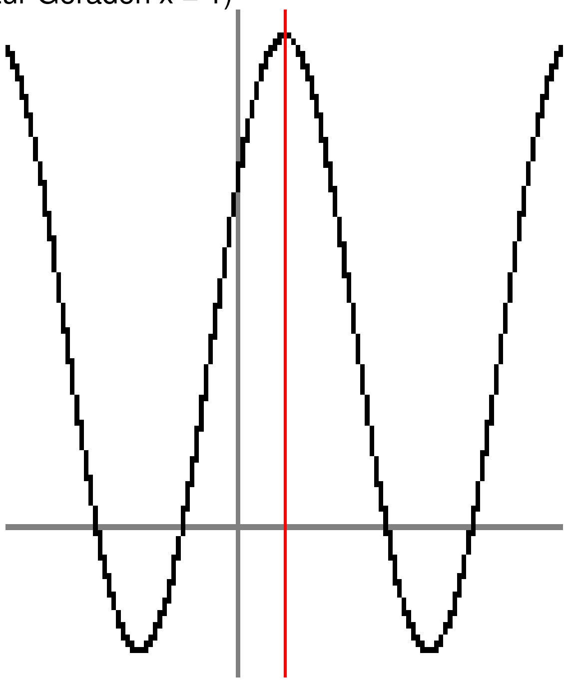
gilt. Sie heißt punktsymmetrisch zum Punkt $Z(x_0|y_0)$, wenn

$$y_0 - f(x_0-x) = f(x_0+x) - y_0 \text{ bzw. } \frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2} = y_0 \text{ für alle } x \in D_f$$

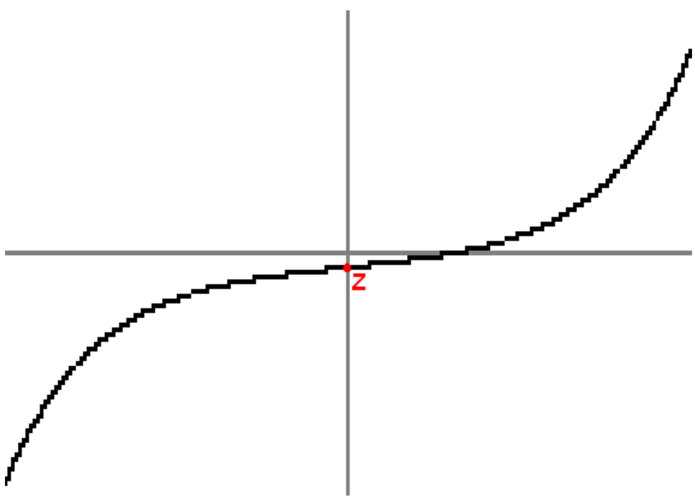
gilt.

Beispiele:

a) $f(x) = 5\cdot\cos(x-1) + 3$ (achsensymmetrisch zur Geraden x = 1)



b) $f(x) = e^{2x} - e^{-2x} - 3$ (punktsymmetrisch zum Punkt Z(0|-3))



Hinsichtlich trigonometrischer Funktionen ergibt sich dann:

a) Die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ ist punktsymmetrisch zu jeder ihrer Nullstellen (Wendepunkte) $N(k\pi|0)$, $k\epsilon\mathbf{Z}$, und achsensymmetrisch zu jeder Achse $x = (2k+1)\pi/2$, , $k\epsilon\mathbf{Z}$.
b) Die Kosinusfunktion $f(x) = \cos(x)$ ist achsensymmetrisch zu jeder Achse $x = k\pi$, $k\epsilon\mathbf{Z}$, und punktsymmetrisch zu jeder ihrer Nullstellen (Wendepunkte) $N((2k+1)\pi/2|0)$, $k\epsilon\mathbf{Z}$.

Beispiele:

a) Die Sinusfunktion $f(x) = 4\cdot\sin(x) - 3$, entstanden aus der Sinuskurve $y = \sin(x)$ durch Streckung entlang der y-Achse um den Faktor 4 und durch Verschiebung entlang der y-Achse um 3 nach unten, ist u.a. punktsymmetrisch zum Punkt $Z(\pi|-3)$, denn es gilt mit Hilfe der Periodizität der Sinusfunktion (Periode $p = 2\pi$):

$$-3 - f(\pi\text{-}x) = -3 - [4\cdot\sin(\pi\text{-}x)-3] = -3 - [-4\cdot\sin(-\pi+x)-3] = -3 - [-4\cdot\sin(\pi+x)-3] =$$
$$-3 + 4\cdot\sin(\pi+x) +3 = [4\cdot\sin(\pi+x)-3] + 3 = f(\pi+x) - (-3)$$

b) Die Parabel $f(x) = x^2 - 4x +5$ ist symmetrisch zur Achse $x = 2$, auf der der Scheitelpunkt der Parabel $S(2|1)$ liegt. Denn:

$$f(2\text{-}x) = (2\text{-}x)^2 - 4(2\text{-}x) + 5 = 4\text{-}4x+x^2 - 8 + 4x + 5 = x^2 + 1$$
$$f(2+x) = (2+x)^2 - 4(2+x) + 5 = 4+4x+x^2 - 8 - 4x + 5 = x^2 + 1,$$

woraus $f(2\text{-}x) = f(2+x)$ und damit Achsensymmetrie folgt.

Allgemein ergibt sich hinsichtlich ganz rationaler Funktionen:

a) Eine Parabel 2. Grades $f(x) = a(x\text{-}d)^2 + c$ (Scheitelform) mit Scheitelpunkt $S(d|c)$ ist achsensymmetrisch zur Achse $x = d$.
b) Eine ganz rationale Funktion 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt $W(-b/(3a)|f(-b/(3a)))$.

Hinweis zu b): Bekanntlich errechnet sich der Wendepunkt von $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit den Ableitungen: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$, $f'''(x) = 6$ und wegen: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow 6ax = -2b \Leftrightarrow x = -b/(3a)$ mit $f'''(-b/(3a)) = 6 \neq 0$.

Weiter gilt der Satz für Taylorpolynome:

a) Ganz rationale Funktionen n. Grades $f(x)$ sind achsensymmetrisch zur Achse $y = a$, wenn es ein Taylorpolynom $T_n(x) = f(x)$ gibt, dessen Summanden $(x\text{-}a)^k$ nur gerade Hochzahlen besitzt.
b) Ganz rationale Funktionen n. Grades $f(x)$ sind punktsymmetrisch zum Symmetriepunkt $Z(x_0|y_0)$, wenn es ein Taylorpolynom $T_n(x) = f(x)$ gibt, so dass der Term $T_n(x) - y_0$ nur Summanden $(x\text{-}\ x_0)^k$ mit ungeraden Hochzahlen besitzt.

Zu einer beliebig oft differenzierbaren Funktion f: $D_f \to \mathbf{R}$ mit $y = f(x)$ und einem sog. Entwicklungsmittelpunkt $x_0\varepsilon D_f$ bilden die Taylorpolynome Näherungen an die Funktion $f(x)$ in einer Umgebung um x_0. Das Taylorpolynom n. Ordnung $T_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) ist von der Form:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

mit: $k! = 1\cdot2\cdot\ldots\cdot k$, $0! = 1$ ($1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$). Das Taylorpolynom $T_n(x)$ ist mit der ganz rationalen Funktion n. Grades $f(x)$ identisch (Horner-Schema).

Beispiel:

Die Parabel 3. Grades $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ ist punktsymmetrisch zu $Z(-1|1)$. Das Taylorpolynom 3. Grades $T_3(x)$ bestimmt sich nämlich als: $T_3(x) = (x+1)^3 - 3(x+1) +1$, so dass $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = (x+1)^3 - 3(x+1) +1 = T_3(x)$ gilt und der Term $T_3(x) - 1 = (x+1)^3 - 3(x+1)$ nur Summanden mit ungeraden Exponenten enthält, also punktsymmetrisch zum Ursprung ist (vgl. damit die Funktion $y = x^3-3x$ und deren Verschiebung um 1 nach links und um 1 nach oben). Nach dem oben Gesagten muss das Symmetriezentrum Z mit dem Wendepunkt W der ganz rationalen Funktion 3. Grades übereinstimmen. In der Tat ist mit $f'(x) = 3x^2 + 6x$, $f''(x) = 6x + 6$, $f'''(x) = 6$: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6x = -6 \Leftrightarrow x = -1$ und weiter: $f''(-1) = 0$, $f'''(-1) = 6 \neq 0$, $f(-1) = (-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 - 1 = 1$, so dass bei $W(-1|1) = Z(-1|1)$ der Wendepunkt der Funktion vorliegt.

Literatur:

Gerade und ungerade Funktionen (de.wikipedia.org/wiki/Gerade_und_ungerade_Funktionen; Aufruf: 22.03.2022); PAPULA, LOTHAR, Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Wiesbaden [9]2006, S.69 (Symmetrie)
