Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Wachstum

Explizite und rekursive Folgen

Eine Abbildung $\{a_n\}$: **N** -> **R**, die jeder natürlichen Zahl n = 0, 1, 2, … eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: n -> a_n oder $\{a_n\}_{n\varepsilon\mathbf{N}}$, a_n das n-te Folgenglied. Mit a_n = h(n) definiert h die Funktionsvorschrift der Folge. Mit a_n = h(n) liegt eine explizite Folgenvorschrift vor, mit a_n = h(a_{n-k}, …, a_{n-1}) eine rekursive Folge mit vorgegebenem a_0, a_1, … a_k (rekursive Folge k-ter Ordnung). Das Berechnen der Folgenglieder a_n rekursiver Folgen heißt Iteration. Die hier beschriebenen Verfahren sind rekursive Folgen 1. Ordnung a_n = h(a_{n-1}) mit vorgegebenem a_0.

Wachstum

Wachstum wird hier definiert als die Zu- oder Abnahme (Wachstum, Zerfall) einer bestimmten mathematisch messbaren Größe, charakterisierbar über die Größe als Bestand und die Zu- oder Abnahme als Änderungsrate (Wachstumsrate), beginnend mit einem vorgegebenen Anfangswert (Anfangsbestand). Wachstum setzt insbesondere (aber nicht nur) einen zeitlichen Verlauf von Bestandsänderung voraus. Die Modellierung von Wachstumsprozessen geschieht in der Mathematik (Analysis) über Funktionen, häufig aber auch iterativ, d.h. durch explizit oder rekursiv definierte Folgen B(n), n є **N**, mit Anfangswert B(0) = a. Zu unterscheiden sind folgende mathematische Wachstumsvorgänge:

- Lineares Wachstum
- Exponentielles Wachstum
- Beschränktes Wachstum
- Logistisches Wachstum

neben anderen, beliebigen Wachstumsprozessen.

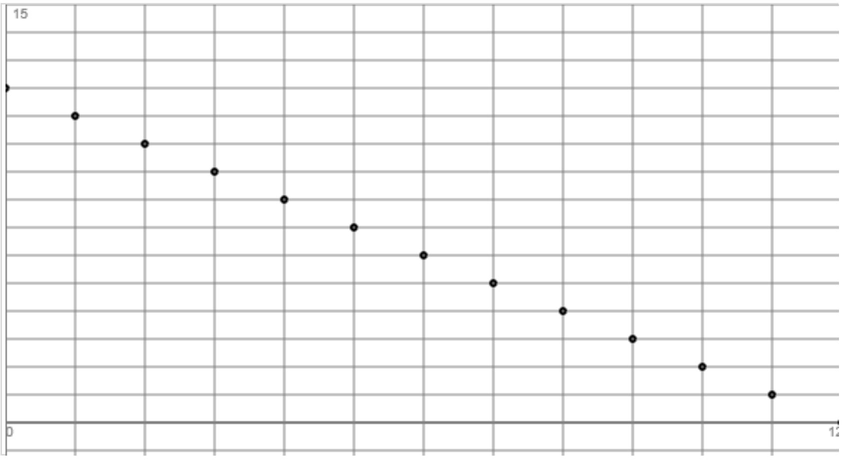
Lineares Wachstum (Iterationen)

Lineares Wachstum (diskret)			
Wachstumsfunktion	$B(n+1)=B(n)+m$	m>0: Zunahme	m<0: Abnahme
Anfangswert	$B(0)=c$		
Auswertung	$B(1)=c+m$		
iterativ	$B(2)=c+2mn$	…	
explizit		$B(n)=c+nm$	
Bestimmung	$c=B(0)$	$m=B(n+1)-B(n)$	$m=\dfrac{B(n+p)-B(n)}{p}$
$(n_1\|c_1)$, $(n_2\|c_2)$ $n_1 < n_2$ $p = n_2 - n_1$	$B(n_1)=c_1$ $B(n_2)=c_2$	$m=\dfrac{B(n_2)-B(n_1)}{n_2-n_1}$	$c=B(n_1)-n_1m$ $c=B(n_2)-n_2m$
			n, n_1, n_2, p natürliche Zahlen
Lineares Wachstum (diskret)			

Lineares Wachstum

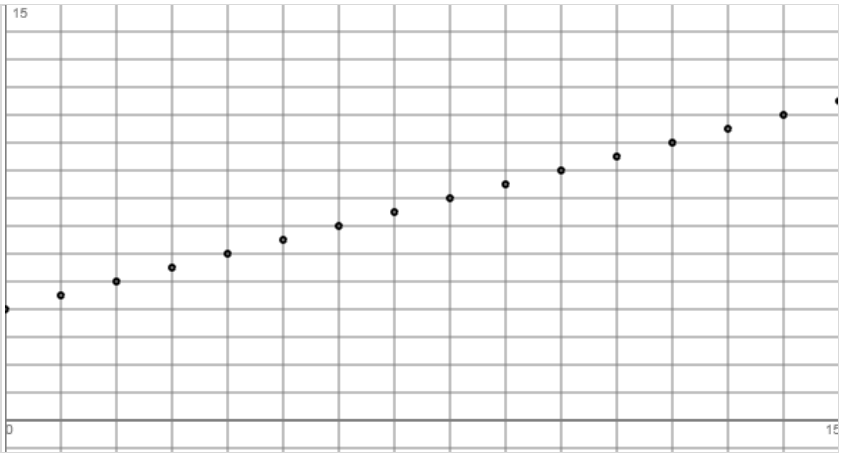
Beispiele: a) Eine 12 cm hohe Kerze brennt mit einer Geschwindigkeit von 1 cm pro Stunde ab. Die lineare Abnahme B(n) errechnet sich rekursiv mit B(0) = 12 und B(n+1) = B(n) – 1, explizit als: B(n) = 12 – n. Es ergeben sich Wertetabelle und Graph der Folge B(n):

n	B(n)
0	12
1	11
2	10
3	9
4	8
5	7
6	6
7	5
8	4
9	3
10	2
11	1
12	0



b) Für ein lineares Wachstum gilt: B(n) = 4 +0,5n, also rekursiv: B(0) = 4, B(n+1) = B(n) + 0,5. Die speziellen Werte B(3), B(12), B(15) sind der folgenden Wertetabelle zu entnehmen:

n	B(n)
0	4
1	4.5
2	5
3	5.5
4	6
5	6.5
10	9
12	10
15	11.5



Bei linearem Wachstum ändert sich die Differenz B(n+1) – B(n) = 0,5 nie, jedoch der Quotient B(n+1)/B(n) mit B(1)/B(0) = 1,125, B(2)/B(1) = 1,111, B(3)/B(2) = 1,1, B(4)/B(3) = 1,091 usw.

Exponentielles Wachstum (Iterationen)

Exponentielles Wachstum (diskret)			
Wachstumsfunktion	$B(n+1)=q\cdot B(n)$	q>1: Wachstum	0<q<1: Zerfall
Anfangswert	$B(0)=c$		
Auswertung	$B(1)=cq$	$B(2)=cq^2$	…
iterativ	$B(n)=cq^n$		
explizit		$B(n)=ce^{kn}$	$k=\ln q$
Bestimmung	$c=B(0)$	$q=\frac{B(n+1)}{B(n)}$	$q=\sqrt[p]{\frac{B(n+p)}{B(n)}}$
$(n_1\|c_1)$, $(n_2\|c_2)$ $n_1 < n_2$ $p = n_2 - n_1$	$B(n_1)=c_1$ $B(n_2)=c_2$	$q=\sqrt[p_1]{\frac{B(n_2)}{B(n_1)}}$	$c=\frac{B(n_1)}{q^{n_1}}$
			n, n_1, n_2, p natürliche Zahlen
Exponentielles Wachstum (diskret)			

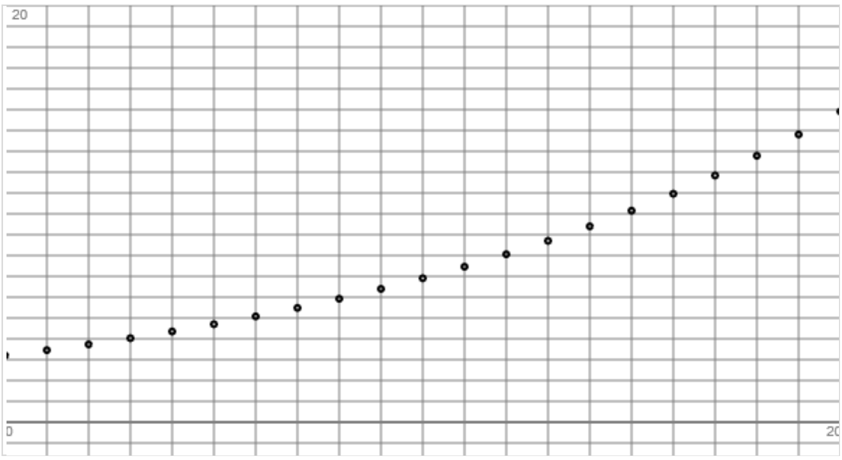
Exponentielles Wachstum

Exponentielles Wachstum (diskret)			
Wachstumsfunktion	$B(n+1)=B(n)+p\cdot B(n)=(1+p)B(n)$		p>0: Wachstum p<0: Zerfall
Anfangswert	$B(0)=c$		
Auswertung	$B(1)=c(1+p)$	$B(2)=c(1+p)^2$	…
iterativ	$B(n)=c(1+p)^n$	$B(n)=cq^n$	$q=1+p$
explizit	$B(n)=ce^{kn}$	$k=\ln(1+p)$	$k=\ln q$
Bestimmung	$c=B(0)$	$q=\frac{B(n+1)}{B(n)}$	$q=\sqrt[p]{\frac{B(n+p)}{B(n)}}$
$(n_1\|c_1)$, $(n_2\|c_2)$ $n_1 < n_2$ $p = n_2 - n_1$	$B(n_1)=c_1$ $B(n_2)=c_2$	$q=\sqrt[p_1]{\frac{B(n_2)}{B(n_1)}}$	$c=\frac{B(n_1)}{k^{n_1}}$
		$p=q-1$	
			n, n_1, n_2, p natürliche Zahlen
Exponentielles Wachstum (diskret)			

Exponentielles Wachstum

Beispiele: a) Eine Bakterienkultur kann sich unbeschränkt ausbreiten; zu Anfang ist eine Fläche von 3,2 cm^2 von den Bakterien bedeckt, pro Stunde wächst die Bakterienkultur konstant um 8 Prozent. Der Wachstumsfaktor ist damit: k = 1 + 8/100 = 1,08, das exponentielle Wachstum bestimmt sich explizit als: $B(n) = 3{,}2\cdot 1{,}08^n$, rekursiv als: $B(n+1) = 1{,}08\cdot B(n)$, $B(0) = 3{,}2$.

n =	B(n) =
0	3.2
1	3.456
2	3.7325
3	4.0311
4	4.3536
5	4.7018
6	5.078
7	5.4842
8	5.923
9	6.3968
10	6.9086
11	7.4612
12	8.0581
13	8.7028
14	9.399
15	10.1509
16	10.963
17	11.8401
18	12.7873
19	13.8102
20	14.9151



b) Wenn ein Kapital von € (Euro) 5000,- über mehrere Jahre zu einem Zinssatz von 1,1 % angelegt wird und Zinsen werden mit verzinst werden, so gilt die exponentielle Wachstumsformel $K(n) = 5000\cdot 1{,}011^n$ mit Anfangskapital K(0) = 5000. Es ergibt sich die folgende tabellarische Übersicht über die ersten 10 Jahre:

Grunddaten: Anfangskapital K_0 = 5000.00 €, Endkapital K_{10} = 5578.04 €, Zinsen Z = 578.04 €, prozentualer Zuwachs $p_{Zuwachs}$ = 11.56 %, Zinssatz p = 1.10 %, Laufzeit n = 10 Jahre. Zinsplan:

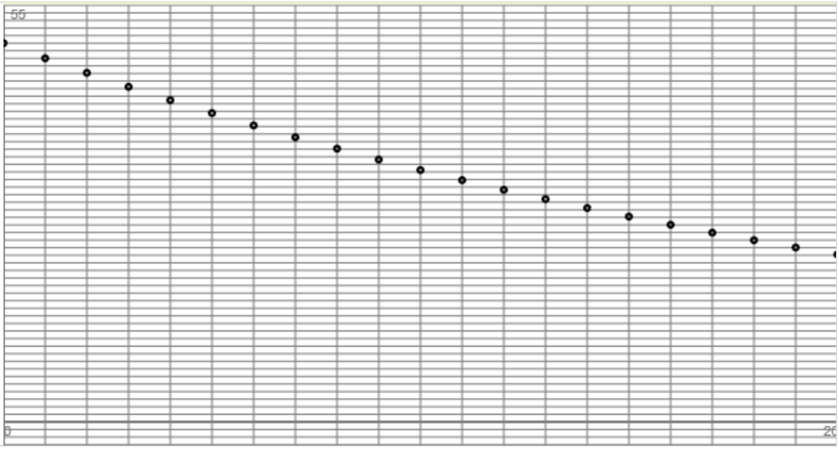
	Anfangskapital K_0 (€):	**Zinssatz** p (%):	
	5000.00	**1.10**	
Jahr n	**Kapital** K_n (Jahresende, €)	**Jahreszinsen** z_n (€)	**Jahreszinsen** kumuliert (€)
1	5055.00	55.00	55.00
2	5110.60	55.60	110.60
3	5166.82	56.22	166.82
4	5223.66	56.84	223.66
5	5281.12	57.46	281.12
6	5339.21	58.09	339.21

7	5397.94	58.73	397.94
8	5457.32	59.38	457.32
9	5517.35	60.03	517.35
10	**5578.04**	60.69	578.04

Typisch für exponentielles Wachstum ist, dass die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Kapitalstände konstant sind, also: K(1)/K(0) = K(2)/K(1) = K(3)/K(2) = 1,011 usw. gilt, während die Jahreszinsen durch den Zinseszins anwachsen.

c) Eine radioaktive Substanz der Masse 50 mg (Milligramm) zerfällt gemäß der Rekursion: B(n+1) = 0,96·B(n) mit n als Zeiteinheiten in Tagen. Explizit lautet die Zerfallsvorschrift: $B(n) = 50 \cdot 0{,}96^n$.

n =	**B(n) =**
0	50
1	48
2	46.08
3	44.2368
4	42.4673
5	40.7686
6	39.1379
7	37.5724
8	36.0695
9	34.6267
10	33.2416
11	31.912
12	30.6355
13	29.4101
14	28.2337
15	27.1043
16	26.0201
17	24.9793
18	23.9802
19	23.021
20	22.1001



Die prozentuale Abnahme des Zerfallsprozesses beträgt wegen: 0,96 = 1 – 4/100 4 % pro Tag. Die Halbwertzeit, also die Zeit, bei der nur noch die Hälfte der radioaktiven Substanz übrig ist, errechnet sich aus der Gleichung: B(n) = B(0)/2 vermöge:

$50 \cdot 0{,}96^n = 25 \Leftrightarrow 0{,}96^n = 0{,}5 \Leftrightarrow n = \log_{0,96} 0{,}5 = 16{,}98 \approx 17$.

Nach 17 Tagen sind noch 25 mg der Substanz vorhanden, nach weiteren 17 Tagen 12,5 mg usw.:

HWZ: n	0	17	34	51	68	85	102
B(n)	50	25	12,5	6,25	3,625	1,8125	0,90625

Exponentielles Wachstum liegt also vor, wenn sich die Änderung des Wachstums (Zunahme, Abnahme) als proportional zum Wachstumswert (Bestand) verhält.

Beschränktes Wachstum (Iterationen)

Beschränktes Wachstum liegt vor, wenn die Veränderung des Wachstums proportional zum (Bestands-) Rest (Manko) bis zu einer (oberen oder unteren) Grenze S ist.

Beschränktes Wachstum (diskret)			
Wachstumsfunktion	$B(n+1) = B(n) + c \cdot (S - B(n))$		$0<c<1$
Anfangswert	$B(0) = a$		
Auswertung	$B(1) = B(0) + c(S - B(0))$ $B(1) = a + c(S - a)$		
iterativ	$B(2) = B(1) + c(S - B(1))$		…
explizit	$B(n) = S - c_1 e^{-kn}$		$k = -\ln(1-c)$
	$S = \frac{B(1) - B(0)}{c} + B(0)$		$k = -\ln\frac{S - B(1)}{S - B(0)}$
	$c_1 = S - B(0)$	$c_1 = S - a$	
Bestimmung	$a = B(0)$	$S = \frac{B(1) - B(0)}{c} + B(0)$	
		$c = \frac{B(1) - B(0)}{S - B(0)}$	
		$B(0) = \frac{B(1) - cS}{1 - c}$	
		$S = \frac{B(n+1) - B(n)}{c} + B(n)$	
		$c = \frac{B(n+1) - B(n)}{S - B(n)}$	
		$B(n) = \frac{B(n+1) - cS}{1 - c}$	
			n natürliche Zahl
Beschränktes Wachstum (diskret)			

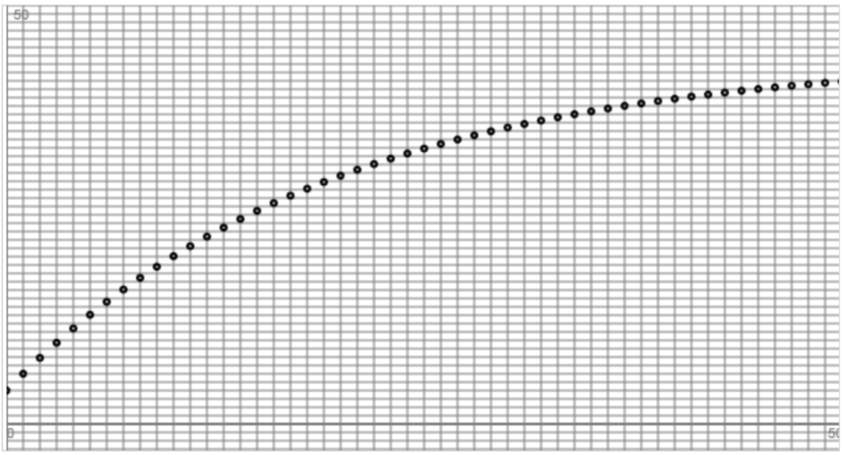
Beschränktes Wachstum

Beispiele: a) Für ein beschränktes Wachstum mit Schranke S = 44 sind die Anfangswerte B(0) = 4 und B(1) = 6 gegeben. Der Proportionalitätsfaktor bestimmt sich dann wegen der Iterationsvorschrift B(n+1) = B(n) + c(S–B(n)) als:

B(1) = B(0) + c(S–B(0)) ⇔ 6 = 4 + c(44–4) ⇔ 6 = 4 + 40c ⇔ 2 = 40c ⇔ 1/20 = 0,05 = c.

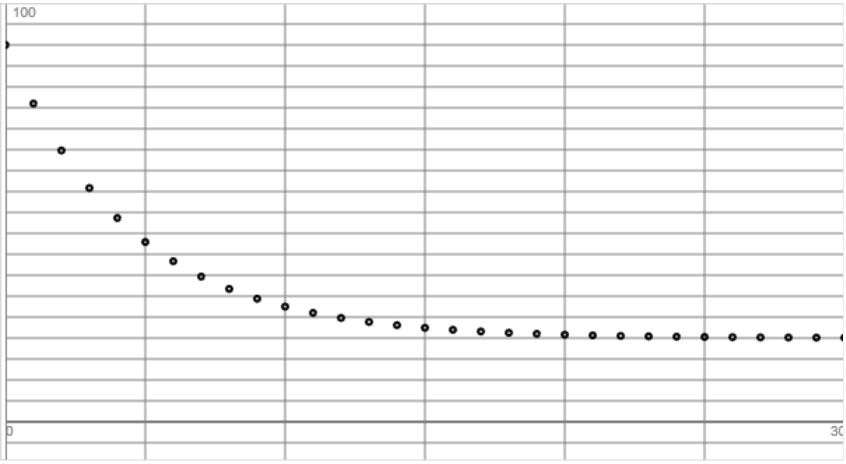
Die Iteration lautet damit: B(n+1) = B(n) + 0,05(44–B(n)), B(0) = 4 und ergibt die nachstehende Folge von Werten B(0), B(1), B(2), …:

n =	B(n) =
0	4
1	6
2	7.9
3	9.705
4	11.4198
5	13.0488
6	14.5963
7	16.0665
8	17.4632
9	18.79
10	20.0505
11	21.248
12	22.3856
13	23.4663
14	24.493
15	25.4684
16	26.3949
17	27.2752
18	28.1114
19	28.9059
20	29.6606
21	30.3775
22	31.0587
23	31.7057
24	32.3204
25	32.9044
26	33.4592
27	33.9862
28	34.4869
29	34.9626
30	35.4144
35	37.3567
40	38.8595
45	40.0224
50	40.922
55	41.6185
60	42.1572
65	42.5741
70	42.8967



b) Eine Tasse Kakao kühlt vermöge der Iteration B(n+1) = B(n) + 0,2·(20–B(n)), B(0) = 90 °C auf Zimmertemperatur 20 °C ab (n als Anzahl der Minuten). Die beschränkte Abnahme verläuft wie folgt:

n =	B(n) =
0	90
1	76
2	64.8
3	55.84
4	48.672
5	42.9376
6	38.3501
7	34.6801
8	31.7441
9	29.3952
10	27.5162
11	26.013
12	24.8104
13	23.8483
14	23.0786
15	22.4629
16	21.9703
17	21.5763
18	21.261
19	21.0088
20	20.807
21	20.6456
22	20.5165
23	20.4132
24	20.3306
25	20.2645
26	20.2116
27	20.1692
28	20.1354
29	20.1083
30	20.0867



Logistisches Wachstum (Iterationen)

Logistisches Wachstum liegt vor, wenn der Wachstumsprozess die Veränderung des Wachstums proportional zum Produkt aus Wachstumswert und Rest (Manko) ist bei oberer Schranke S.

Logistisches Wachstum (diskret)			
Wachstumsfunktion	$B(n+1) = B(n) + c \cdot B(n) \cdot (S - B(n))$		0<c (≤ $\frac{1}{S}$)
Anfangswert	$B(0) = a$		a>0
Auswertung	$B(1) = B(0) + cB(0)(S - B(0))$ $B(1) = a + ca(S - a)$		
iterativ	$B(2) = B(1) + cB(1)(S - B(1))$		…
explizit	$B(n) = \frac{aS}{a + (S-a)e^{-Skn}}$		$k = -\ln \frac{B(0)(S - B(1))}{B(1)(S - B(0))}$
Bestimmung	$a = B(0)$	$S = \frac{B(1) - B(0)}{c \cdot B(0)} + B(0)$	
		$c = \frac{B(1) - B(0)}{B(0)(S - B(0))}$	
		$B(0) = \frac{1}{2c} + \frac{S}{2} - \frac{\sqrt{(1+cS)^2 - 4cB(1)}}{2c}$	
			n natürliche Zahl
Logistisches Wachstum (diskret)			

Logistisches Wachstum

Anmerkung: Ein gleichmäßiges logistisches Wachstum hin zur Grenze S ist nur dann möglich, wenn c ≤ 1/S gilt.

Beispiele: a) Logistisches Wachstum der Form B(n+1) = B(n) + c·B(n)·(S–B(n)) sei gegeben mit B(0) = 100, B(1) = 120 und S = 900. Dann ist c zu bestimmen mit:

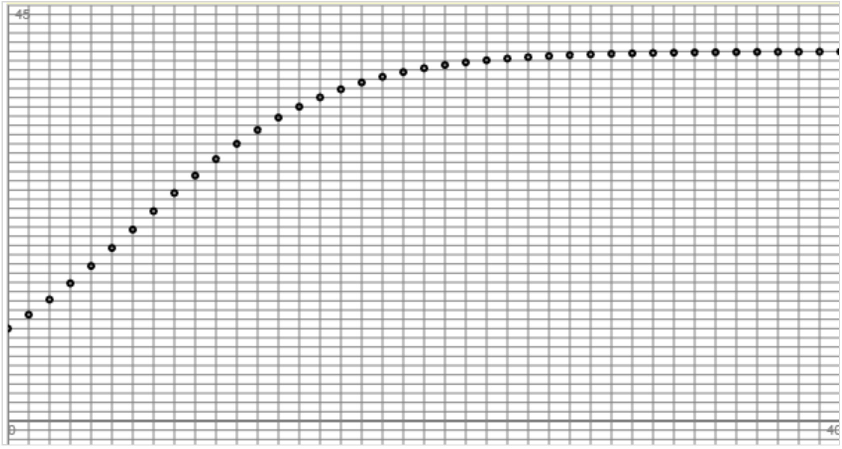
B(1) = B(0) + c·B(0)·(S–B(0)) ⇔ 120 = 100 + c·100·(900-100) ⇔ 120 = 100 + c·100·900 ⇔ 120 = 100 + 90000c ⇔ 20 = 90000c ⇔ c = 20/90000 = 2/9000.

Die Iteration des logistischen Wachstums lautet damit: B(n+1) = B(n) + 2·B(n)·(900–B(n))/9000, B(0) = 100.

b) Es gelte die Iterationsvorschrift: B(n+1) = B(n) + 0,005·B(n)·(40–B(n)), B(0) = 10. Es ist c = 0,005 < 1/40 = 0,025 = 1/S mit S = 40, so dass logistisches Wachstum gewährleistet ist. Die Auswertung der Iteration ergibt:

n =	B(n) =
0	10
1	11.5
2	13.1388
3	14.9034
4	16.7735
5	18.7214
6	20.7133
7	22.7107
8	24.674
9	26.5647
10	28.3493

11	30.0007
12	31.5006
13	32.8393
14	34.0151
15	35.033
16	35.903
17	36.6385
18	37.2543
19	37.7657
20	38.1876
25	39.3828
30	39.7951
35	39.9326
40	39.9779



Funktionen

In den linearen, exponentiellen, beschränkten und logistischen Wachstumsprozessen werden nun die Iterationen von rekursiv definierten Folgen durch differenzierbare Funktionen $y = f(t)$ ersetzt. Wir nehmen damit u.a. die expliziten Folgenvorschriften des linearen und exponentiellen Wachstums auf, und auch beim beschränkten und logistischen Wachstum ist eine explizite Darstellung rekursiv-iterativer Prozesse mittels Funktionen möglich. Exponentialfunktionen sind vom Typ $f(t) = cq^t$ mit positiver Basis $q>0$. Exponentialfunktionen zur Basis e als Eulerscher Zahl (e = 2,71828…) heißen natürliche Exponentialfunktionen. Es ist nun üblich, Funktionen des exponentiellen, beschränkten und logistischen Wachstums mit Hilfe der natürlichen Exponentialfunktionen darzustellen-

Lineares Wachstum (Funktionen)

Die explizite Darstellung $B(n) = a + nd$ der linearen Iteration lässt sich sofort in eine Geradengleichung $f(t) = dt + a$ überführen; Geradensteigung ist d, y-Achsenabschnitt ist $B(0) = a$.

Exponentielles Wachstum (Funktionen)

Die explizite Darstellung $B(n) = ak^n$ der exponentiellen Iteration ergibt mit $k = q$ die Exponentialfunktion $f(t) = cq^t$, die sich wiederum als natürliche Exponentialfunktion $f(t) = ce^{kt}$ mit $k = \ln(q)$ ausdrücken lässt.

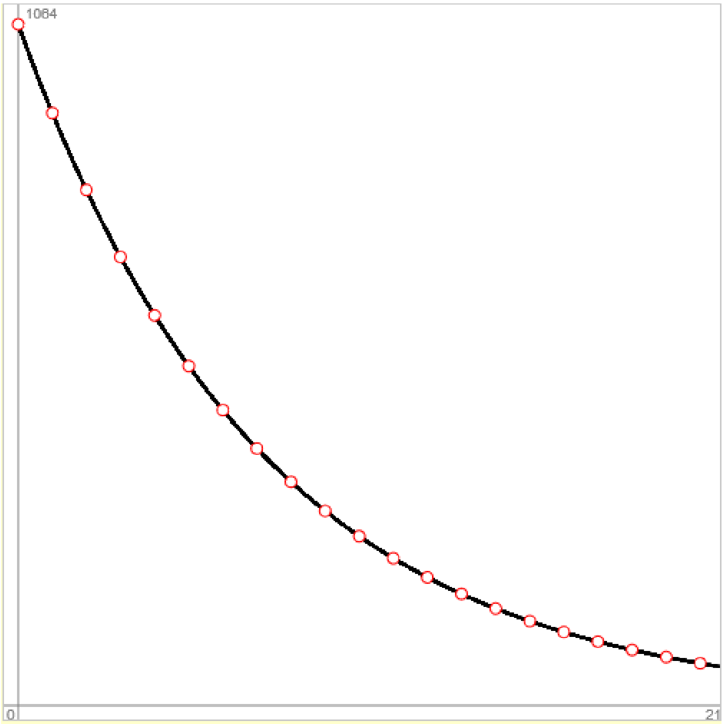
Exponentielles Wachstum (stetig, differenzierbar)			
Differenzialgleichung	$f'(t) = k \cdot f(t)$	k Proportionalitätsfaktor	
Wachstumsfunktion	$f(t) = ce^{kt}$	k>0: Wachstum	k<0: Zerfall
Änderungsrate	$f'(t) = cke^{kt}$		
Anfangswert	$f(0) = c$		
Verdopplungszeit Halbwertszeit		$T_V = \frac{\ln 2}{k}$	$T_H = \frac{-\ln 2}{k}$
		$k = \frac{\ln 2}{T_V}$	$k = \frac{-\ln 2}{T_H}$
Auswertung	$y_0 = f(t_0)$	$y_0 = ce^{kt_0}$	y_0 Bestand
	$y_1 = f'(t_0)$	$y_1 = cke^{kt_0}$	y_1 Bestandsänderung
	$f(t_0) = y_0$	$t_0 = \frac{\ln \frac{y_0}{c}}{k}$	t_0 Zeit o.a.
	$f'(t_1) = y_1$	$t_1 = \frac{\ln \frac{y_1}{ck}}{k}$	t_1 Zeit o.a.
Bestimmung	$c = f(0)$	$f(t_0) = y_0$	$k = \frac{\ln y_0 - \ln c}{t_0}$
$(t_1\|y_1)$, $(t_2\|y_2)$	$f(t_1) = y_1$ $f(t_2) = y_2$	$k = \frac{\ln y_1 - \ln y_2}{t_1 - t_2}$	$c = \frac{y_1}{e^{kt_1}}$
Basiswechsel	$f(t) = cq^t \leftrightarrow f(t) = ce^{kt}$		$k = \ln q$
Exponentielles Wachstum (stetig, differenzierbar)			

Exponentielles Wachstum

Beispiele: a) Der Luftdruck auf dem Planeten Erde beträgt in Meereshöhe durchschnittlich 1013 hPa (Hektopascal), um pro Kilometer (km) Höhe über den Meeresspiegel um 13 % (Prozent) abzunehmen. Die den Luftdruck anzeigende Funktion $f(x) = cq^x$ ergibt sich somit als: $f(x) = 1013 \cdot 0{,}87^x$ (x: km, f(x): hPa), die entsprechende natürliche Exponentialfunktion $f(x) = ce^{kx}$ ergibt sich mit $k = \ln(0{,}87) = -0{,}1393$ als: $f(x) = 1013 \cdot e^{-0{,}1393x}$:

x =	f(x) = 1013*0.87^n	Prozentwert
0	1013	100%
1	881.31	87%
2	766.7397	75.69%
3	667.0635	65.8503%
4	580.3453	57.2898%
5	504.9004	49.8421%
6	439.2633	43.3626%
7	382.1591	37.7255%
8	332.4784	32.8212%

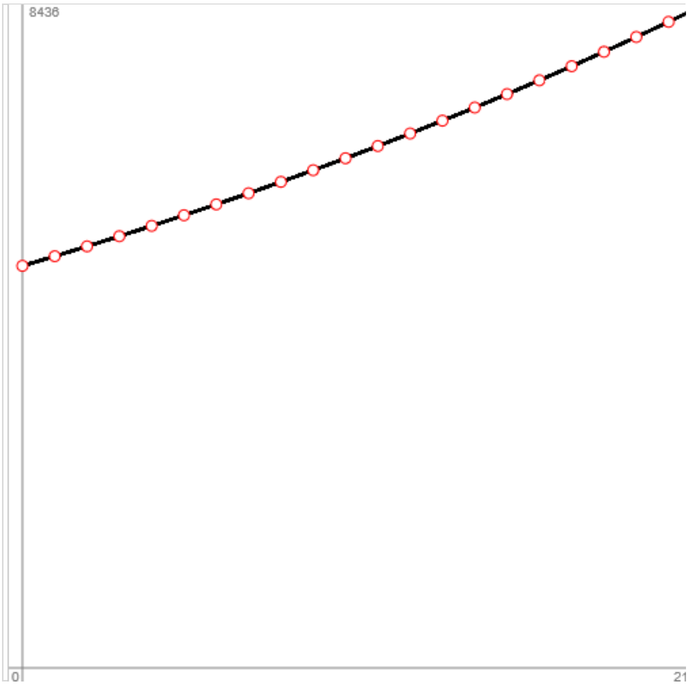
9	289.2562	28.5544%
10	251.6529	24.8423%
11	218.938	21.6128%
12	190.4761	18.8032%
13	165.7142	16.3588%
14	144.1714	14.2321%
15	125.4291	12.3819%
16	109.1233	10.7723%
17	94.9373	9.3719%
18	82.5954	8.1535%
19	71.858	7.0936%
20	62.5165	6.1714%



b) Eine Finanzanlage von € 5000,- verzinst sich durchschnittlich zu 2,4 % (Prozent) im Jahr. Die Wachstumsfunktion lautet bei f(t) = 8000, p = 2,4 % (Zinssatz) und q = 1+p/100 = 1,024 (Zinsfaktor) : $f(t) = 5000 \cdot 1{,}024^t$:

t =	**f(t)** = 5000*1.024^n	**Prozentwert**
0	5000	100%
1	5120	102.4%
2	5242.88	104.8576%
3	5368.7091	107.3742%
4	5497.5581	109.9512%
5	5629.4995	112.59%
6	5764.6075	115.2922%
7	5902.9581	118.0592%
8	6044.6291	120.8926%
9	6189.7002	123.794%
10	6338.253	126.7651%
11	6490.3711	129.8074%
12	6646.14	132.9228%
13	6805.6473	136.1129%
14	6968.9829	139.3797%
15	7136.2385	142.7248%
16	7307.5082	146.1502%

17	7482.8884	149.6578%
18	7662.4777	153.2496%
19	7846.3772	156.9275%
20	8034.6902	160.6938%



Beschränktes Wachstum (Funktionen)

Die implizit-iterative Vorschrift beim beschränkten Wachstum lautet:

B(n+1) = B(n) + k(S–B(n)) ⇔ B(n+1) – B(n) = c(S–B(n)) (*).

Setzt man in (*) B(n) = f(t) und h = 1, so ergibt sich:

f(t+h) – f(t) = k(S-f(t)) ⇔ $\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = k(S-f(t))$ (**).

Bei variabler Größe h folgt mit dem Grenzübergang h -> 0 in (**) gemäß der Differenzialrechnung:

f'(t) = k(S-f(t)) (***)

womit – siehe unten – aus der Differentialgleichung (***) die beschränkte Wachstumsfunktion f(t) = S–ce^{-kt} folgt. Die Differentialgleichung (***) zeigt noch, dass die Änderungsrate des Wachstumsprozesses proportional zum Manko, als der Differenz von Schranke und Funktionswert ist. Die Konstante c gibt dann das Manko bei Beobachtungsbeginn t=0 an.

Beschränktes Wachstum (stetig, differenzierbar)			
Differenzialgleichung	$f'(t) = k \cdot (S - f(t))$	k Proportionalitätsfaktor k>0	S Schranke
Wachstumsfunktion	$f(t) = S - ce^{-kt}$	c<0: Zerfall	c>0: Wachstum
Änderungsrate	$f'(t) = cke^{-kt}$		
Anfangswert	$f(0) = a$ $f(0) = S - c$	$c = S - a$ $c = S - f(0)$	$S = a + c$ $S = f(0) + c$

	$f(0)=0$ a = 0	$c=S$	$f(t)=S(1-e^{-kt})$
Auswertung	$y_0=f(t_0)$	$y_0=S-ce^{-kt_0}$	y_0 Bestand
	$y_1=f'(t_0)$	$y_1=cke^{-kt_0}$	y_1 Bestandsänderung
	$f(t_0)=y_0$	$t_0=-\frac{\ln\frac{S-y_0}{c}}{k}$	t_0 Zeit o.a.
	$f'(t_1)=y_1$	$t_1=-\frac{\ln\frac{y_1}{ck}}{k}$	t_1 Zeit o.a.
Bestimmung	$c=S-f(0)$	$f(t)\to S$ (t->∞)	
	$f(t_0)=y_0$	$S=y_0+ce^{-kt_0}$	$c=(S-y_0)e^{kt_0}$
		$k=-\frac{\ln\frac{S-y_0}{c}}{t_0}$	
$(t_1\|y_1)$, $(t_2\|y_2)$	$f(t_1)=y_1$ $f(t_2)=y_2$	$k=\frac{\ln y_1-\ln y_2}{t_1-t_2}$	$c=\frac{y_1}{e^{kt_1}}$
Beschränktes Wachstum (stetig, differenzierbar)			

<u>Beispiele</u>: a) Seerosen siedeln auf einem 600 m² großen Teich. Zu Anfang einer Vegetationsperiode bedecken die Seerosen eine Oberfläche von 20 m², nach einer Woche von 60 m². Es liegt damit beschränktes Wachstum vor, wobei f(0) = 20, f(1) = 60 bei S = 600 und c = 600 – 20 = 580 gilt. Wir haben also: $f(t) = 600 – 580e^{-kt}$ und haben nun noch k zu bestimmen. Wegen f(1) = 60 folgt:

$f(1) = 60 = 600 – 580e^{-k} \Leftrightarrow 580e^{-k} = 540 \Leftrightarrow e^{-k} = 0,931 \Leftrightarrow -k = \ln(0,931) \Leftrightarrow k = 0,0715$.

Damit lautet die Wachstumsfunktion: $f(t) = 600 – 580e^{-0,0715t}$. Sie hat das Aussehen:

Nach 10 Wochen ist wegen $f(10) = 600 – 580e^{-0,715}$ eine Oberfläche von 316,15 m^2 bedeckt; 500 m^2 Oberfläche sind bedeckt, wenn f(t) = 500 ist, also:

$f(t) = 600 – 580e^{-0,0715t} = 500 \Leftrightarrow 580e^{-0,0715t} = 100 \Leftrightarrow e^{-0,0715t} = 0,1724 \Leftrightarrow -0,0715t = \ln(0,1724) \Leftrightarrow$
t = 24,59 Wochen.

b) Ein Heißgetränk hat zu Beobachtungsbeginn eine Temperatur von 90° C, nach 10 Minuten von 65° C, die Zimmertemperatur beträgt 20° C. Die beschränkte Wachstumsfunktion der Temperaturabnahme ist $f(t) = S–ce^{-kt}$ mit S = 20, f(0) = 95, c = S–f(0) = 20–95 = -75, so dass $f(t) = 20+75e^{-kt}$ folgt. Der Proportionalitätsfaktor k bestimmt sich aus f(10) = 65 als:

$f(10) = 20+75e^{-k\cdot 10} = 65 \Leftrightarrow 75e^{-k\cdot 10} = 45 \Leftrightarrow e^{-k\cdot 10} = 0,6 \Leftrightarrow -10k = \ln(0,6) \Leftrightarrow k = 0,0511.$

Die Funktion lautet damit: $f(t) = 20+75e^{-0.0511t}$.

Die Ableitung von f(t) lautet nach Summen-, Faktor- und Kettenregel: $f'(t) = 75\cdot(-0,0511)\, e^{-0.0511t} = -3,833\, e^{-0.0511t}$, so dass als maximale Temperaturabnahme f'(0) = -3,833 °C/Minute folgt und die Temperaturabnahme zum Zeitpunkt t = 10 bei einer Temperatur von f(10) = 65 °C gleich dem Ableitungswert f'(10) = -2,3 °C/Minute ist.

Logistisches Wachstum (Funktionen)

Logistisches Wachstum liegt vor, wenn der Wachstumsprozess der Differenzialgleichung

$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (S - f(t))$ (*)

genügt, also bei k>0 die Veränderung des Wachstums proportional zum Produkt aus Wachstumswert und Rest ist bei reeller oberer Schranke S. Die Lösung der Differenzialgleichung (*) ist dann:

$$f(t) = \frac{a \cdot S}{a + [S-a] \cdot e^{-Skt}},$$

wobei die Gültigkeit von (*) für $f(t) = \frac{a \cdot S}{a + [S-a] \cdot e^{-Skt}}$ aus den nachstehenden Überlegungen folgt: Es gilt nämlich für f(t) noch die Darstellung: $f(t) = a \cdot S \cdot (a + [S-a]e^{-Skt})^{-1}$;
die Ableitung von f(t) ist nach der Kettenregel:

$$f'(t) = -aS(a + [S-a]e^{-Skt})^{-2} \cdot [S-a]e^{-Skt} \cdot (-Sk) = \frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S-a]e^{-Skt}}{(a + [S-a]e^{-Skt})^2};$$

Einsetzen von f(t) und f'(t) in die Differenzialgleichung (*) ergibt:

$$k\cdot f(t)\cdot(S-f(t))=k\cdot\frac{a\cdot S}{a+[S-a]e^{-Skt}}\cdot\left(S-\frac{a\cdot S}{a+[S-a]e^{-Skt}}\right)=$$

$$k\cdot\frac{a\cdot S}{a+[S-a]e^{-Skt}}\cdot\left(\frac{S\cdot(a+[S-a]e^{-Skt})-a\cdot S}{a+[S-a]e^{-Skt}}\right)=$$

$$k\cdot\frac{a\cdot S}{a+[S-a]e^{-Skt}}\cdot\left(\frac{S[S-a]e^{-Skt}}{a+[S-a]e^{-Skt}}\right)=\frac{a\cdot S^2\cdot k\cdot[S-a]e^{-Skt}}{(a+[S-a]e^{-Skt})^2}=f'(t)$$

und damit die Lösbarkeit der Differenzialgleichung (*) für f(t).

Logistisches Wachstum (stetig, differenzierbar)			
Differenzialgleichung	$f'(t)=k\cdot f(t)\cdot(S-f(t))$		k Proportionalitätsfaktor 0<k$_l$≤$\frac{1}{S}$ S Schranke S>a Anfangswert a>0
Wachstumsfunktion	$f(t)=\frac{aS}{a+(S-a)e^{-Skt}}$		
Änderungsrate	$f'(t)=\frac{a\cdot S^2\cdot k\cdot[S-a]e^{-Skt}}{(a+[S-a]e^{-Skt})^2}$		
Anfangswert	$f(0)=a$	$c=S-a$	$S=a+c$
Auswertung	$y_0=f(t_0)$	$y_0=S-ce^{-kt_0}$	y_0 Bestand
	$y_1=f'(t_0)$ $y_1=\frac{a\cdot S^2\cdot k\cdot[S-a]e^{-Skt_0}}{(a+[S-a]e^{-Skt_0})^2}$		y_1 Bestandsänderung
	$f(t_0)=y_0$	$t_0=-\frac{\ln\frac{a(S-y_0)}{y_0(S-a)}}{Sk}$	t_0 Zeit o.a.
Bestimmung	$a=f(0)$	$a=S-c$	$f(t)\to S$ (t->∞)
	$f(t_0)=y_0$	$k=-\frac{\ln\frac{a(S-y_0)}{y_0(S-a)}}{St_0}$	$a=-\frac{Sy_0e^{-Skt_0}}{S-y_0+y_0e^{-Skt_0}}$
Logistisches Wachstum (stetig, differenzierbar)			

Logistisches Wachstum

Beispiel: Die Wachstumsfunktion $f(t)=\frac{40}{2+18e^{-0,2t}}$ mit a = 2, S = 20 und k = 0,01 beschreibt ein logistisches Wachstum. Es gilt: f(0) = 2 = a, f(t) -> 20 = S für t -> ∞ und weiter: f(21) = 17,62 oder:
f(t) = 15 ⇔ $\frac{40}{2+18e^{-0,2t}}$ = 15 ⇔ 40 = 15(2+18e$^{-0,2t}$) ⇔ 2,67 = 2 + 18e$^{-0,2t}$ ⇔ 0,67 = 18e$^{-0,2t}$ ⇔
e$^{-0,2t}$ = 0,0372 ⇔ -0,2t = ln(0,0372) ⇔ t = 16,45.

Die Wachstumsfunktion $f(t)=\frac{40}{2+18e^{-0,2t}}$ hat das Aussehen:

Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen sind Gleichungen, die eine Funktion y = f(x) und deren Ableitungen y'(x), y''(x) … sowie weitere von x abhängige Terme enthalten können. Die Differentialgleichungen sind durch Integration nach der Funktion f(x) aufzulösen (explizite, implizite Darstellung). Es sind dabei Integrationskonstanten und unter Umständen Anfangsbedingungen zu beachten. Die Ordnung n einer Differenzialgleichung gibt die höchste vorkommende Ableitung $y^{(n)}(x)$ wider, der Grad gibt den Exponenten k an, mit dem die höchste Ableitung vorkommt, also: $(y^{(n)}(x))^k$. Wir schreiben noch für die Ableitungen:

$$y'=\frac{dy}{dx} \text{ usw.}$$

Wir betrachten lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung der Form:

$$y'+ay=b \quad (*)$$

mit reellen Zahlen a, b. Aus der Differenzialgleichung (*) ergeben sich als Lösungen die Wachstumsfunktionen des linearen, exponentiellen und beschränkten Wachstums wie folgt:

1. Fall: a = 0. Aus $y'=b$ folgt durch Integration: $y=\int bdx+c=bx+c$. Nun steht die Funktion (Gerade) y = f(x) = bx + c für lineares Wachstum von der Form y = mx + c.
2. Fall: a ≠ 0, b = 0. Es ergibt sich hier die homogene Differenzialgleichung $y'+ay=0$. Wir formen um (Trennung der Variablen):

$$y'+ay=0 \quad | \; y'=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}+ay=0 \quad | -ay=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-ay \quad | \cdot dx \text{ (Trennung der Variablen)}$$

$$dy=-aydx \quad | :y$$

$$\frac{dy}{y}=-adx \quad | \text{ (Integration)}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-a\int dx+C_1 \quad | \text{ (Integrale ausrechnen)}$$

$$\ln y=-ax+C_1 \quad | \text{ (Exponieren)}$$

$$y=e^{-ax+C_1} \quad | \text{ (Potenzgesetze)}$$

$$y=e^{-ax}\cdot e^{C_1} \quad | \; (c=e^{C_1})$$

$$y=ce^{-ax}$$

mit c > 0. $y=ce^{-ax}$ steht dann für exponentielles Wachstum von der Form $y=f(x)=ce^{kx}$ (k = -a).

<u>3. Fall</u>: a ≠ 0, b ≠ 0. Wir haben die inhomogene lineare Differenzialgleichung $y'+ay=b$. Die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung $y'+ay=0$ ergibt sich laut dem 2. Fall als $y=ce^{-ax}$. Wir suchen nun noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung und nehmen y wegen y‘ = 0 als Konstante an, also: $0+ay=b$ und damit: $ay=b$ und: $y=\frac{b}{a}$. Als Summe der allgemeinen und der speziellen Lösung erhalten wir dann: $y=ce^{-ax}+\frac{b}{a}$ und damit eine Funktion vom Typ $y=S-c_1e^{-kx}$ ($S=\frac{b}{a}$, k = a, c_1 = -c) für das beschränkte Wachstum.

Die Differenzialgleichung $y'+ay=b$ führt damit jeweils auf eine Funktionenschar. Berücksichtigen wir die Anfangsbedingung y(0) = c_0, so ergibt sich die eindeutig bestimmte Funktion y = mx + c_0 bei linearem Wachstum bzw. $y=c_0e^{-ax}$ bei exponentiellem Wachstum. Aus der Anfangsbedingung y(0) = S – c_0 folgt bei beschränktem Wachstum die Funktion $y=S-c_0e^{-kx}$.

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de, 04.2017, 01.2020