Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Logistisches Wachstum

Wachstum

Wachstum wird hier definiert als die Zu- oder Abnahme (Wachstum, Zerfall) einer bestimmten mathematisch messbaren Größe, charakterisierbar über die Größe als Bestand und die Zu- oder Abnahme als Änderungsrate (Wachstumsrate), beginnend mit einem vorgegebenen Anfangswert (Anfangsbestand). Wachstum setzt insbesondere (aber nicht nur) einen zeitlichen Verlauf von Bestandsänderung voraus. Die Modellierung von Wachstumsprozessen geschieht in der Mathematik (Analysis) über reelle Funktionen f(t) in der Zeit t für reelle t≥0 mit t=0 als Anfangszeitpunkt. Zu unterscheiden sind folgende mathematische Wachstumsvorgänge:

- Lineares Wachstum
- Exponentielles Wachstum
- Beschränktes Wachstum
- Logistisches Wachstum

neben anderen, beliebigen Wachstumsprozessen.
Die Funktion f(t) gibt den Bestand einer Größe in der Zeit t an, ihre Ableitung f'(t) die Änderungsrate oder Wachstumsgeschwindigkeit. Dabei genügen die Änderungsraten bei sog. exponentiellen, beschränkten und logistischen Wachstumsprozessen gewissen Proportionalitäten im Zusammenhang mit Exponentialfunktionen zur Basis e, d.h. im Zusammenhang mit der natürlichen Exponentialfunktionen $y = e^t$ mit e als Eulerscher Zahl (e = 2,71828…).
Bei exponentiellem Wachstum ist dabei die Änderungsrate f'(t) proportional zum Bestand f(t). Es gibt also eine Proportionalitätskonstante k mit f'(t) = kf(t), so dass als Bestandsfunktion $f(t) = ce^{kt}$ folgt; Anfangswert (Anfangsbedingung) ist hierbei: f(0) = c. Bei beschränktem Wachstum ist die Änderungsrate f'(t) proportional zum Manko S-f(t), d.h. zur Differenz von Schranke S und Funktionswert f(t). Auch hier führt eine Proportionalitätskonstante k auf: f'(t) = k(S-f(t)) und damit auf die Bestandsfunktion $f(t) = S–ce^{-kt}$ mit Anfangswert f(0) = S-c.

Logistisches Wachstum

Logistisches Wachstum liegt vor, wenn der Wachstumsprozess der Differenzialgleichung

f'(t) = kf(t)(S-f(t))

genügt, also bei Proportionalitätskonstante k>0 die Veränderung des Wachstums f'(t) sowohl proportional zum Bestand f(t) als auch zum Manko S-f(t) mit Schranke S ist. Das logistische Wachstum „vereinigt" also exponentielles und beschränktes Wachstum in sich. Die Lösung der Differenzialgleichung ist dann bei Anfangswert f(0) = a mit 0<a<S:

$$f(t) = \frac{a \cdot S}{a + [S-a] \cdot e^{-Skt}},$$

wobei die Gültigkeit für $f(t) = \frac{a \cdot S}{a + [S-a] \cdot e^{-Skt}}$ mit 0<f(t)<S aus den nachstehenden Überlegungen folgt:

a) Es gilt für f(t) noch die Darstellung: $f(t) = a \cdot S \cdot (a + [S-a]e^{-Skt})^{-1}$; die Ableitung von f(t) ist nach der Kettenregel:

$$f'(t) = -aS(a+[S-a]e^{-Skt})^{-2} \cdot [S-a]e^{-Skt} \cdot (-Sk) = \frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S-a]e^{-Skt}}{(a+[S-a]e^{-Skt})^2};$$

Einsetzen von f(t) und f'(t) in die Differenzialgleichung (*) ergibt:

$$k \cdot f(t) \cdot (S - f(t)) = k \cdot \frac{a \cdot S}{a+[S-a]e^{-Skt}} \cdot \left(S - \frac{a \cdot S}{a+[S-a]e^{-Skt}} \right) =$$

$$k \cdot \frac{a \cdot S}{a+[S-a]e^{-Skt}} \cdot \left(\frac{S \cdot (a+[S-a]e^{-Skt}) - a \cdot S}{a+[S-a]e^{-Skt}} \right) =$$

$$k \cdot \frac{a \cdot S}{a+[S-a]e^{-Skt}} \cdot \left(\frac{S[S-a]e^{-Skt}}{a+[S-a]e^{-Skt}} \right) = \frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S-a]e^{-Skt}}{(a+[S-a]e^{-Skt})^2} = f'(t)$$

und damit die Lösbarkeit der Differenzialgleichung für f(t).

b) Durch Integration der Differentialgleichung lässt sich f(t) direkt erhalten. Es gilt nämlich:

f'(t) = kf(t)(S-f(t)) ⇔ $\frac{f'(t)}{f(t)(S-f(t))}$ = k ⇔

$$\frac{f'(t)}{f(t)(S-f(t))} = \frac{\frac{1}{S} \cdot f'(t) \cdot S}{f(t)(S-f(t))} = \frac{\frac{1}{S} \cdot f'(t) \cdot (S - f(t) + f(t))}{f(t)(S-f(t))} =$$

$$\frac{\frac{1}{S} \cdot f'(t) \cdot (S-f(t)) + \frac{1}{S} \cdot f'(t) \cdot f(t)}{f(t)(S-f(t))} = \frac{\frac{1}{S} \cdot f'(t) \cdot (S-f(t))}{f(t)(S-f(t))} + \frac{\frac{1}{S} \cdot f'(t) \cdot f(t)}{f(t)(S-f(t))} =$$

$$\frac{\frac{1}{S} \cdot f'(t)}{f(t)} + \frac{\frac{1}{S} \cdot f'(t)}{(S-f(t))} = \frac{f'(t)}{Sf(t)} + \frac{f'(t)}{S(S-f(t))} = k$$

und haben damit die Voraussetzungen für das Integrieren geschaffen. Auf der Grundlage der Integrationsregel:

$$\int \frac{h'(t)}{a+bh(t)} dt = \frac{1}{b} \ln|a+bh(t)|$$

folgt nämlich:

$\frac{f'(t)}{Sf(t)} + \frac{f'(t)}{S(S-f(t))}$ = k =>

$\frac{1}{S} \ln|f(t)| - \frac{1}{S} \ln|S - f(t)|$ = kt + C =>

$\ln|f(t)| - \ln|S - f(t)|$ = Skt +SC =>

$\ln|S - f(t)| - \ln|f(t)|$ = -Skt –SC =>

$\ln\left|\frac{S - f(t)}{f(t)}\right|$ = -Skt –SC

mit Integrationskonstante C und u.a. nach den Logarithmengesetzen. Exponieren der Gleichung ergibt:

$$\frac{S-f(t)}{f(t)}=e^{-Skt-SC} \Leftrightarrow \frac{S}{f(t)}-\frac{f(t)}{f(t)}=e^{-Skt-SC} \Leftrightarrow \frac{S}{f(t)}-1=e^{-Skt-SC} \Leftrightarrow \frac{S}{f(t)}=e^{-Skt-SC}+1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{f(t)}=\frac{e^{-Skt-SC}+1}{S} \Leftrightarrow f(t)=\frac{S}{e^{-Skt-SC}+1}.$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung f(0) = a folgt weiter:

$$f(0)=\frac{S}{e^{-Sk\cdot 0-SC}+1}=a \Leftrightarrow \frac{S}{e^{-SC}+1}=a \Leftrightarrow \frac{S}{a}=e^{-SC}+1 \Leftrightarrow e^{-SC}=\frac{S}{a}-1$$

und durch Einsetzen von $e^{-SC}=\frac{S}{a}-1$:

$$f(t)=\frac{S}{e^{-Skt-SC}+1}=\frac{S}{e^{-Skt}e^{-SC}+1}=\frac{S}{e^{-Skt}\left(\frac{S}{a}-1\right)+1}=\frac{aS}{a\left(e^{-Skt}\left(\frac{S}{a}-1\right)+1\right)}=$$
$$\frac{aS}{ae^{-Skt}\left(\frac{S}{a}-1\right)+a}=\frac{aS}{e^{-Skt}(S-a)+a}=\frac{aS}{a+[S-a]e^{-Skt}}$$

das Gewünschte.

<u>Eigenschaften</u>

Anders als beim exponentiellen und beschränkten Wachstum verfügt die logistische Wachstumsfunktion $f(t)=\frac{a\cdot S}{a+[S-a]\cdot e^{-Skt}}$ über einen <u>Wendepunkt</u> (als [positive] Stelle t mit maximaler Änderungsrate f‘(t)). Aus der weiter oben erwähnten 1. Ableitung $f'(t)=\frac{a\cdot S^2\cdot k\cdot[S-a]e^{-Skt}}{(a+[S-a]e^{-Skt})^2}=\left(a\cdot S^2\cdot k\cdot[S-a]e^{-Skt}\right)\left(a+[S-a]e^{-Skt}\right)^{-2}$ lässt sich mit der Produkt- und Kettenregel die 2. Ableitung bilden und vereinfachen:

$$f''(t)=-Sk\cdot\left(a\cdot S^2\cdot k\cdot[S-a]e^{-Skt}\right)\left(a+[S-a]e^{-Skt}\right)^{-2}+$$
$$\left(a\cdot S^2\cdot k\cdot[S-a]e^{-Skt}\right)(-2)\left(a+[S-a]e^{-Skt}\right)^{-3}\left(-Sk\cdot[S-a]e^{-Skt}\right)=$$
$$\left(a\cdot S^2\cdot k\cdot[S-a]e^{-Skt}\right)\left(a+[S-a]e^{-Skt}\right)^{-2}\left[-Sk+2Sk\cdot[S-a]e^{-Skt}\left(a+[S-a]e^{-Skt}\right)^{-1}\right]=$$
$$\frac{a\cdot S^2\cdot k\cdot[S-a]e^{-Skt}}{\left(a+[S-a]e^{-Skt}\right)^2}\left[-Sk+\frac{2Sk\cdot[S-a]e^{-Skt}}{a+[S-a]e^{-Skt}}\right]=$$
$$\frac{a\cdot S^2\cdot k\cdot[S-a]e^{-Skt}}{\left(a+[S-a]e^{-Skt}\right)^2}\left[\frac{-Sk\left(a+[S-a]e^{-Skt}\right)}{a+[S-a]e^{-Skt}}+\frac{2Sk\cdot[S-a]e^{-Skt}}{a+[S-a]e^{-Skt}}\right]=$$
$$\frac{a\cdot S^2\cdot k\cdot[S-a]e^{-Skt}}{\left(a+[S-a]e^{-Skt}\right)^2}\cdot\frac{-Sk\left(a+[S-a]e^{-Skt}\right)}{a+[S-a]e^{-Skt}}=$$
$$\frac{a\cdot S^2\cdot k\cdot[S-a]e^{-Skt}}{\left(a+[S-a]e^{-Skt}\right)^2}\cdot\frac{2Sk\cdot[S-a]e^{-Skt}-Sk[S-a]e^{-Skt}-Ska}{a+[S-a]e^{-Skt}}=$$
$$\frac{a\cdot S^2\cdot k\cdot[S-a]e^{-Skt}}{\left(a+[S-a]e^{-Skt}\right)^2}\cdot\frac{Sk\cdot[S-a]e^{-Skt}-Ska}{a+[S-a]e^{-Skt}}=\frac{a\cdot S^3\cdot k^2\cdot[S-a]e^{-Skt}}{\left(a+[S-a]e^{-Skt}\right)^2}\cdot\frac{[S-a]e^{-Skt}-a}{a+[S-a]e^{-Skt}}.$$

Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt die Wendestelle:

f''(t) = 0 ⇔ $\frac{a\cdot S^3\cdot k^2\cdot[S-a]e^{-Skt}}{\left(a+[S-a]e^{-Skt}\right)^2}\cdot\frac{[S-a]e^{-Skt}-a}{a+[S-a]e^{-Skt}}$ = 0 ⇔ $[S-a]e^{-Skt}-a$ = 0 ⇔

$[S-a]e^{-Skt}=a$ ⇔ $e^{-Skt}=\frac{a}{S-a}$ ⇔ -Skt = $\ln\left(\frac{a}{S-a}\right)$ ⇔ t = $\frac{\ln\left(\frac{a}{S-a}\right)}{-Sk}$.

An der Stelle t besitzt die Funktion des logistischen Wachstums f(t) einen Wendepunkt, wie mit Hilfe der 3. Ableitung oder des Vorzeichenswechsels der 2. Ableitung nachzuprüfen ist. Der Wert t ist positiv, wenn

$\frac{a}{S-a}$ < 1 ⇔ a < S-a ⇔ 2a < S ⇔ a < S/2

ist. Außerdem gilt:

$$f\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{S-a}\right)}{-Sk}\right)=\frac{a\cdot S}{a+[S-a]\cdot e^{-Sk\cdot\frac{\ln\left(\frac{a}{S-a}\right)}{-Sk}}}=\frac{a\cdot S}{a+[S-a]\cdot e^{\ln\left(\frac{a}{S-a}\right)}}=\frac{a\cdot S}{a+[S-a]\cdot\frac{a}{S-a}}=\frac{aS}{2a}=\frac{S}{2},$$

so dass der Wendepunkt genau den halben Wert der Schranke S als Funktionswert hat. Am Wendepunkt ist die Steigung der Funktion f(t), also die Änderungsrate bzw. Wachstumsgeschwindigkeit f'(t), am größten; links vom Wendepunkt steigt die Wachstumsgeschwindigkeit f'(t) (Linkskrümmung), rechts davon fällt sie (Rechtskrümmung). Die Änderungsrate f'(t) ist immer positiv, das Wachstum f(t) immer monoton steigend.

Die Funktion des logistischen Wachstums f(t) besitzt zudem die Schranke S als waagerechte Asymptote, d.h. es gilt:

t -> +∞: f(t) -> S.

Wir fassen die <u>Eigenschaften</u> des logistischen Wachstums noch wie folgt in der nachstehenden Tabelle zusammen:

Logistisches Wachstum			
Differenzialgleichung	$f'(t)=k\cdot f(t)\cdot(S-f(t))$		k Proportionalitätsfaktor S Schranke: S>a a Anfangswert: a>0 0<a<S
Wachstumsfunktion	$f(t)=\frac{aS}{a+(S-a)e^{-Skt}}$		f(t)>0 (positive Bestandsfunktion f(t))
Änderungsrate	$f'(t)=\frac{a\cdot S^2\cdot k\cdot[S-a]e^{-Skt}}{(a+[S-a]e^{-Skt})^2}$		f'(t)>0 (streng monoton steigende Bestandsfunktion f(t))
Anfangswert	$f(0)=a$		
Auswertung	$y_0=f(t_0)$	$y_0=\frac{aS}{a+(S-a)e^{-Skt_0}}$	y_0 Bestand
	$y_1=f'(t_0)$		y_1 Bestandsänderung

	$y_1 = \frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S-a]e^{-Skt_0}}{(a+[S-a]e^{-Skt_0})^2}$		
	$f(t_0) = y_0$	$t_0 = -\frac{\ln \frac{a(S-y_0)}{y_0(S-a)}}{Sk}$	t_0 Zeit o.a.
Bestimmung	$a = f(0)$		$f(t) \to S$ (t->+∞)
	$f(t_0) = y_0$	$k = -\frac{\ln \frac{a(S-y_0)}{y_0(S-a)}}{St_0}$	$a = -\frac{Sy_0 e^{-Skt_0}}{S - y_0 + y_0 e^{-Skt_0}}$
Wendepunkt	W($\frac{\ln\left(\frac{a}{S-a}\right)}{-Sk} \mid \frac{S}{2}$)		t-Koordinate des Wendepunkts $t_W > 0$, falls a<S/2
Logistisches Wachstum			

Logistisches Wachstum

Beispiele

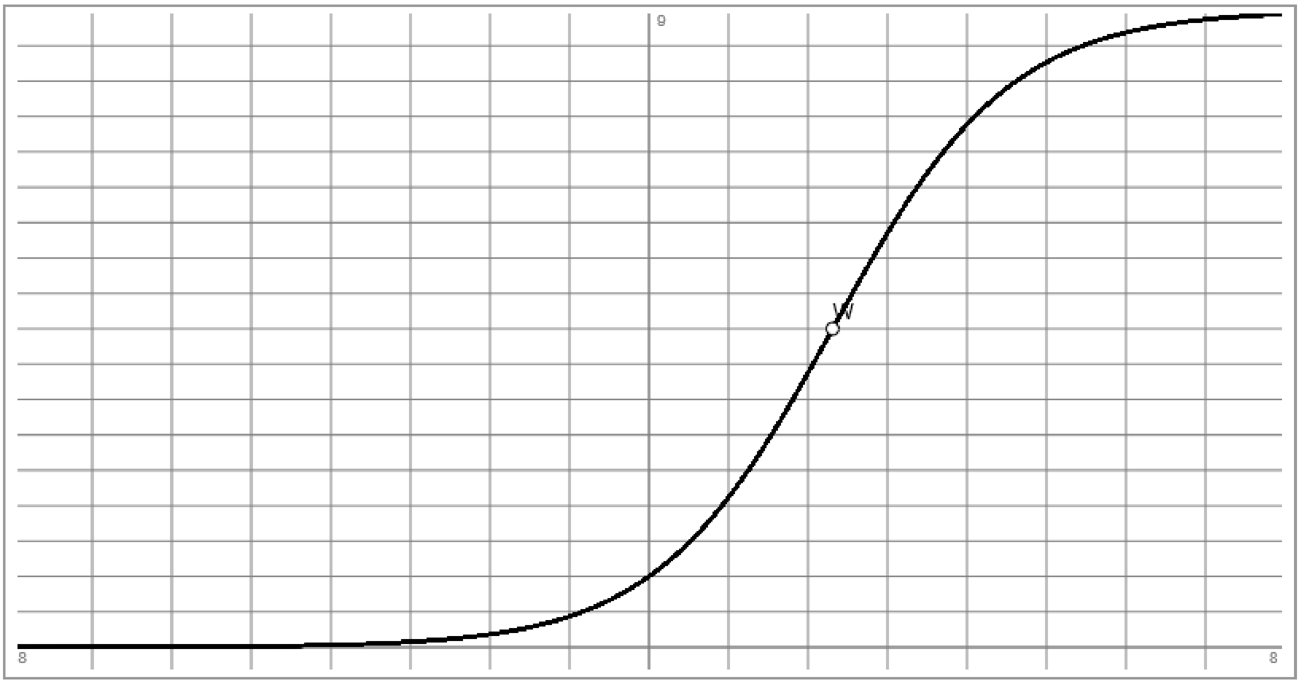
a) Betrachtet wird die auf allen reellen Zahlen definierte Funktion $f(x) = \frac{9}{1+8e^{-0.9x}}$ mit a = 1, S = 9 und k = 0,1. Für f(x) gilt: f(0) =1; x -> -∞: f(x) -> 0; x -> +∞: f(x) -> 9 = S mit den zwei waagerechten Asymptoten y = 0 und y = 9; Wendepunkt W(2,31|4,5) mit 4,5 = 9/2 = S/2; steigende Monotonie.

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-8	0.0008	0	0	
-7.5	0.0013	0	0	
-7	0.0021	0	0	
-6.5	0.0032	0	0	
-6	0.0051	0	0	
-5.5	0.008	0.01	0.01	
-5	0.0125	0.01	0.01	
-4.5	0.0196	0.02	0.02	
-4	0.0306	0.03	0.02	
-3.5	0.048	0.04	0.04	
-3	0.075	0.07	0.06	
-2.5	0.117	0.1	0.09	
-2	0.1822	0.16	0.14	
-1.5	0.2825	0.25	0.21	
-1	0.4353	0.37	0.3	
-0.5	0.6644	0.55	0.42	
0	1	0.8	0.56	Schnittpunkt $S_y(0\|1)$
0.5	1.4752	1.11	0.67	
1	2.1164	1.46	0.69	
1.5	2.9279	1.78	0.56	
2	3.8753	1.99	0.25	
2.31	4.499	2.02	0	Wendepunkt W(2.31|4.5)
2.5	4.8828	2.01	-0.15	
3	5.8531	1.84	-0.5	

3.5	6.7023	1.54	-0.68	
4	7.3856	1.19	-0.69	
4.5	7.899	0.87	-0.59	
5	8.2654	0.61	-0.46	
5.5	8.5173	0.41	-0.33	
6	8.6861	0.27	-0.23	
6.5	8.7973	0.18	-0.15	
7	8.8697	0.12	-0.1	
7.5	8.9165	0.07	-0.07	
8	8.9466	0.05	-0.04	

Graph:



b) Die Wachstumsfunktion $f(t) = \frac{40}{2+18e^{-0,2t}}$ mit a = 2, S = 20 und k = 0,01 beschreibt ein logistisches Wachstum. Es gilt: f(0) = 2 = a, f(t) -> 20 = S für t -> +∞ und weiter: f(21) = 17,62 sowie:

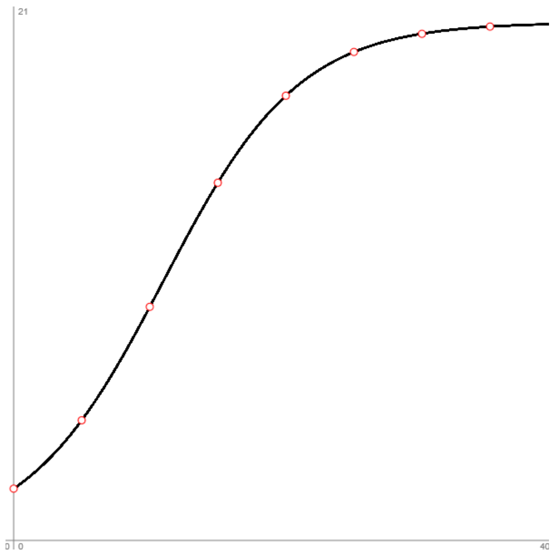
f(t) = 15 ⇔ $\frac{40}{2+18e^{-0,2t}}$ = 15 ⇔ 40 = 15(2+18e$^{-0,2t}$) ⇔ 2,67 = 2 + 18e$^{-0,2t}$ ⇔ 0,67 = 18e$^{-0,2t}$ ⇔

e$^{-0,2t}$ = 0,0372 ⇔ -0,2t = ln(0,0372) ⇔ t = 16,45. Die Wachstumsfunktion $f(t) = \frac{40}{2+18e^{-0,2t}}$ hat als Wertetabelle und Graph:

Wertetabelle:

t	**f(t)**	**f'(t)** = 0.01*f(t)*(20-f(t))
0	2	0.36
5	4.6394	0.7126
10	9.0171	0.9903
15	13.8114	0.8547
20	17.1697	0.4859
25	18.8565	0.2156
30	19.5636	0.0854
35	19.8372	0.0323
40	19.9398	0.012

Graph:

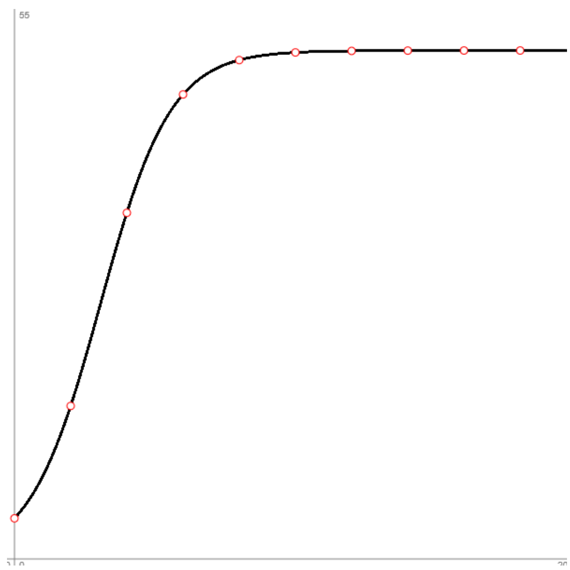


c) Gegeben ist die logistische Wachstumsfunktion $f(t) = \frac{200}{4 + 46e^{-0,8t}}$. Dem Funktionsterm von f(t) ist sofort zu entnehmen, dass der Anfangswert a = 4 ist. Wegen aS = 200 folgt: S = 200/4 = 50 als Schranke, wegen Sk = 0,8 ergibt sich: k = 0,8/50 = 0,016. Wertetabelle und Graph der Funktion f(t) sind:

Wertetabelle:

t	**f(t)**	**f'(t)** = 0.016*f(t)*(50-f(t))
0	4	2.944
2	15.052	8.4166
4	34.0422	8.6918
6	45.677	3.1594
8	49.0625	0.7359
10	49.8079	0.1531
12	49.9611	0.0311
14	49.9921	0.0063
16	49.9984	0.0013
18	49.9997	0.0003
20	49.9999	0.0001

Graph:

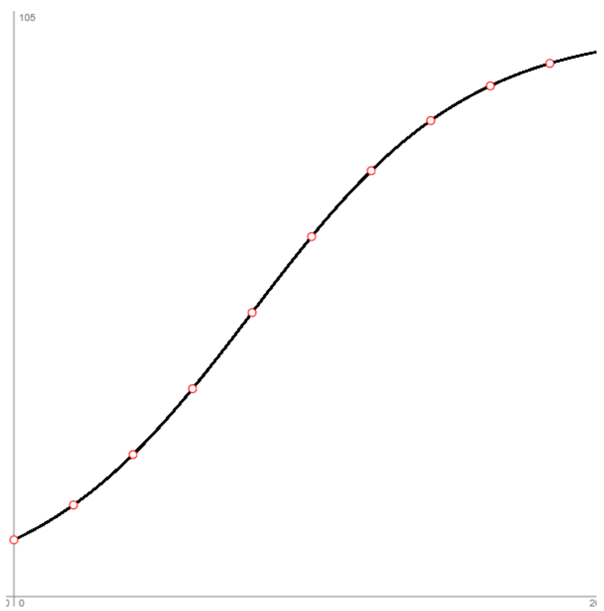


d) Eine logistische Wachstumsfunktion $f(t)=\frac{a\cdot S}{a+[S-a]\cdot e^{-Skt}}$ besitzt den Anfangswert f(0) = 10 und den Wendepunkt W(8|50). Aus dem Anfangswert f(0) = 10 folgt: a = 10, wegen S/2 = 50 auf Grund des Wendepunktes folgt: S = 100. Die t-Koordinate des Wendepunktes ergibt wegen: 8 = $\frac{\ln\left(\frac{a}{S-a}\right)}{-Sk}$ bei a = 10 und S = 100: 8 = $\frac{\ln\left(\frac{10}{100-10}\right)}{-100k}$ ⇔ k = $\frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{-100\cdot 8}$ = 0,00275. Die Funktion lautet somit: $f(t)=\frac{100}{10+90\cdot e^{-0,275t}}$. Wertetabelle und Graph der Funktion f(t) sind:

Wertetabelle:

t	**f(t)**	**f'(t)** = 0.00275*f(t)*(100-f(t))
0	10	2.475
2	16.1484	3.7237
4	25.026	5.1598
6	36.6509	6.385
8	50.0694	6.875
10	63.4779	6.3755
12	75.078	5.1455
14	83.9266	3.7097
16	90.0498	2.464
18	94.007	1.5493
20	96.4524	0.941

Graph:



e) Das Wachstum von Seerosen in einem 5000 Quadratmeter großen See folgt erfolgt logistisch gemäß der nachstehenden Tabelle:

t [Tage]	0	20	40	60	80
y [qm]	200	1680	4300	4900	4990

Mit S = 5000 und a = f(0) = 200 ist nur noch k zu bestimmen. Nun ist f(40) = 4300, so dass folgt:

$$f(40) = \frac{1000000}{200+4800\cdot e^{-5000k\cdot 40}} = 4300 \Leftrightarrow \frac{1000000}{200+4800\cdot e^{-200000k}} = 4300 \Leftrightarrow$$

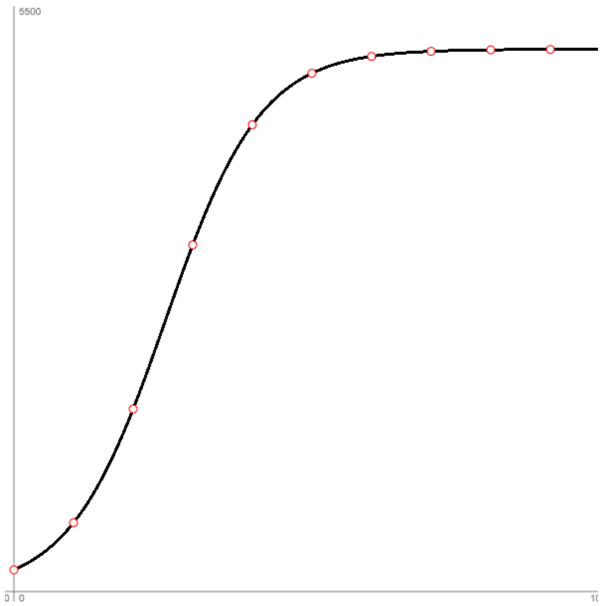
$$\frac{1000000}{4300} = 200+4800\cdot e^{-200000k} \Leftrightarrow 32{,}558 = 4800e^{-200000k} \Leftrightarrow 0{,}06783 = e^{-200000k} \Leftrightarrow$$

$-5 = -200000k \Leftrightarrow k = 0{,}000025$.

Die Wachstumsfunktion lautet also: $f(t) = \frac{1000000}{200+4800\cdot e^{-0{,}125t}}$ mit Wertetabelle und Graph:

Wertetabelle:		
t	**f(t)**	**f'(t)** = 0.000025*f(t)*(5000-f(t))
0	200	24
10	634.8307	69.2786
20	1683.479	139.5823
30	3196.0606	144.1375
40	4303.9974	74.8898
50	4778.603	26.4492
60	4934.4993	8.0803
70	4981.0567	2.3589
80	4994.5579	0.6795
90	4998.4396	0.195
100	4999.5528	0.0559

Graph:



Mit S = 5000 und einer linearen Regression über die Variablen t und y* = $\ln\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{S}\right)$ ergibt sich

als zweite Möglichkeit der Funktionsbestimmung auf Grundlage der erweiterten Tabelle:

t [Tage]	0	20	40	60	80
y [qm]	200	1680	4300	4900	4990
y*	-5,34	-7,84	-10,33	-12,41	-14,73

vermöge:

Tabelle, Auswertung:

Daten:							
i	**t_i**	**y_i^***	**t_i-t^-**	**$(t_i-t^-)^2$**	**y_i^*-y^-**	**$(y_i^*-y^-)^2$**	**$(t_i-t^-)*(y_i^*-y^-)$**
1	0	-5.34	-40	1600	4.79	22.9441	-191.6
2	20	-7.84	-20	400	2.29	5.2441	-45.8

3	40	-10.33	0	0	-0.2	0.04	0
4	60	-12.41	20	400	-2.28	5.1984	-45.6
5	80	-14.73	40	1600	-4.6	21.16	-184
Auswertung:							
S_t, S_y =	200	-50.65					
$\bar{t}$, $\bar{y^*}$ =	40	-10.13					
Q_t, Q_y =				4000		54.5866	
Σ_t, σ_y =				28.2843		3.3041	
Q_{ty} =							-467
r =	-0.9994						
m =	-0.1167						
b =	-5.46						

Regressionsgerade:

y* = mt + b = -0.1167t - 5.46

die Ausgleichsgerade: y* = -0,1167t – 5,46. Aus dieser Ausgleichsgeraden lässt sich wegen:

$$y = \frac{a \cdot S}{a + [S-a] \cdot e^{-Skt}} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{a + [S-a] \cdot e^{-Skt}}{aS} = \frac{1}{S} + \frac{[S-a] \cdot e^{-Skt}}{aS} \Leftrightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{S} = \frac{[S-a] \cdot e^{-Skt}}{aS} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{S}\right) = \ln\left(\frac{[S-a] \cdot e^{-Skt}}{aS}\right) = \ln\left(\frac{S-a}{aS}\right) + \ln\left(e^{-Skt}\right) = -Skt + \ln\left(\frac{S-a}{aS}\right) \Leftrightarrow$$

$$y^* = \ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{S}\right) = -Skt + \ln\left(\frac{S-a}{aS}\right) = mt + b$$

und auf Grund eines Koeffizientenvergleichs: m = -Sk, b = $\ln\left(\frac{S-a}{aS}\right)$ ermitteln, so dass

m = -Sk => k = $-\frac{m}{S}$

b = $\ln\left(\frac{S-a}{aS}\right)$ => e^b = $\frac{S-a}{aS}$ => aSe^b = S–a => a+aSe^b = S => a(1+Se^b) = S => a = $\frac{S}{1+Se^b}$

gilt. Hieraus folgt: k = -(-0,1167)/5000 = 0,00002334, a = 5000/(1+5000$e^{-5,46}$) = 224,5. Die logistische Wachstumsfunktion lautet hier: $f(t) = \frac{1122500}{224{,}5 + 4775{,}5 \cdot e^{-0{,}1167t}}$.

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de, 06.2020