

Wachstum

Wachstum wird hier definiert als die Zu- oder Abnahme (Wachstum, Zerfall) einer bestimmten mathematisch messbaren Größe, charakterisierbar über die Größe als Bestand und die Zu- oder Abnahme als Änderungsrate (Wachstumsrate), beginnend mit einem vorgegebenen Anfangswert (Anfangsbestand). Wachstum setzt insbesondere (aber nicht nur) einen zeitlichen Verlauf von Bestandsänderung voraus. Die Modellierung von Wachstumsprozessen geschieht in der Mathematik (Analysis) über reelle Funktionen $f(t)$ in der Zeit t für reelle $t \geq 0$ mit $t=0$ als Anfangszeitpunkt. Zu unterscheiden sind folgende mathematische Wachstumsvorgänge:

- Lineares Wachstum
- Exponentielles Wachstum
- Beschränktes Wachstum
- Logistisches Wachstum

neben anderen, beliebigen Wachstumsprozessen.

Die Funktion $f(t)$ gibt den Bestand einer Größe in der Zeit t an, ihre Ableitung $f'(t)$ die Änderungsrate oder Wachstumsgeschwindigkeit. Dabei genügen die Änderungsraten bei sog. exponentiellen, beschränkten und logistischen Wachstumsprozessen gewissen Proportionalitäten im Zusammenhang mit Exponentialfunktionen zur Basis e , d.h. im Zusammenhang mit der natürlichen Exponentialfunktionen $y = e^t$ mit e als Eulerscher Zahl ($e = 2,71828\dots$).

Bei exponentiellem Wachstum ist dabei die Änderungsrate $f'(t)$ proportional zum Bestand $f(t)$. Es gibt also eine Proportionalitätskonstante k mit $f'(t) = kf(t)$, so dass als Bestandsfunktion $f(t) = ce^{kt}$ folgt; Anfangswert (Anfangsbedingung) ist hierbei: $f(0) = c$. Bei beschränktem Wachstum ist die Änderungsrate $f'(t)$ proportional zum Manko $S-f(t)$, d.h. zur Differenz von Schranke S und Funktionswert $f(t)$. Auch hier führt eine Proportionalitätskonstante k auf: $f'(t) = k(S-f(t))$ und damit auf die Bestandsfunktion $f(t) = S - ce^{-kt}$ mit Anfangswert $f(0) = S-c$.

Logistisches Wachstum

Logistisches Wachstum liegt vor, wenn der Wachstumsprozess der Differenzialgleichung $f'(t) = kf(t)(S-f(t))$

genügt, also bei Proportionalitätskonstante $k > 0$ die Veränderung des Wachstums $f'(t)$ sowohl proportional zum Bestand $f(t)$ als auch zum Manko $S-f(t)$ mit Schranke S ist. Das logistische Wachstum „vereinigt“ also exponentielles und beschränktes Wachstum in sich. Die Lösung der Differenzialgleichung ist dann bei Anfangswert $f(0) = a$ mit $0 < a < S$:

$$f(t) = \frac{a \cdot S}{a + [S - a] \cdot e^{-Skt}},$$

wobei die Gültigkeit für $f(t) = \frac{a \cdot S}{a + [S - a] \cdot e^{-Skt}}$ mit $0 < f(t) < S$ aus den nachstehenden Überlegungen folgt:

a) Es gilt für $f(t)$ noch die Darstellung: $f(t) = a \cdot S \cdot (a + [S - a]e^{-Skt})^{-1}$; die Ableitung von $f(t)$ ist nach der Kettenregel:

$$f'(t) = -aS(a + [S - a]e^{-Skt})^{-2} \cdot [S - a]e^{-Skt} \cdot (-Sk) = \frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S - a]e^{-Skt}}{(a + [S - a]e^{-Skt})^2};$$

Einsetzen von f(t) und f'(t) in die Differentialgleichung (*) ergibt:

$$k \cdot f(t) \cdot (S - f(t)) = k \cdot \frac{a \cdot S}{a + [S - a]e^{-Skt}} \cdot \left(S - \frac{a \cdot S}{a + [S - a]e^{-Skt}} \right) =$$

$$k \cdot \frac{a \cdot S}{a + [S - a]e^{-Skt}} \cdot \left(\frac{S \cdot (a + [S - a]e^{-Skt}) - a \cdot S}{a + [S - a]e^{-Skt}} \right) =$$

$$k \cdot \frac{a \cdot S}{a + [S - a]e^{-Skt}} \cdot \left(\frac{S[S - a]e^{-Skt}}{a + [S - a]e^{-Skt}} \right) = \frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S - a]e^{-Skt}}{(a + [S - a]e^{-Skt})^2} = f'(t)$$

und damit die Lösbarkeit der Differentialgleichung für f(t).

b) Durch Integration der Differentialgleichung lässt sich f(t) direkt erhalten. Es gilt nämlich:

$$f'(t) = kf(t)(S-f(t)) \Leftrightarrow \frac{f'(t)}{f(t)(S-f(t))} = k \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)(S-f(t))} = \frac{\frac{1}{S} \cdot f'(t) \cdot S}{f(t)(S-f(t))} = \frac{\frac{1}{S} \cdot f'(t) \cdot (S-f(t) + f(t))}{f(t)(S-f(t))} =$$

$$\frac{\frac{1}{S} \cdot f'(t) \cdot (S-f(t)) + \frac{1}{S} \cdot f'(t) \cdot f(t)}{f(t)(S-f(t))} = \frac{\frac{1}{S} \cdot f'(t) \cdot (S-f(t))}{f(t)(S-f(t))} + \frac{\frac{1}{S} \cdot f'(t) \cdot f(t)}{f(t)(S-f(t))} =$$

$$\frac{\frac{1}{S} \cdot f'(t)}{f(t)} + \frac{\frac{1}{S} \cdot f'(t)}{(S-f(t))} = \frac{f'(t)}{Sf(t)} + \frac{f'(t)}{S(S-f(t))} = k$$

und haben damit die Voraussetzungen für das Integrieren geschaffen. Auf der Grundlage der Integrationsregel:

$$\int \frac{h'(t)}{a + bh(t)} dt = \frac{1}{b} \ln|a + bh(t)|$$

folgt nämlich:

$$\frac{f'(t)}{Sf(t)} + \frac{f'(t)}{S(S-f(t))} = k \Rightarrow$$

$$\frac{1}{S} \ln|f(t)| - \frac{1}{S} \ln|S-f(t)| = kt + C \Rightarrow$$

$$\ln|f(t)| - \ln|S-f(t)| = Skt + SC \Rightarrow$$

$$\ln|S-f(t)| - \ln|f(t)| = -Skt - SC \Rightarrow$$

$$\ln \left| \frac{S-f(t)}{f(t)} \right| = -Skt - SC$$

mit Integrationskonstante C und u.a. nach den Logarithmengesetzen. Exponieren der Gleichung ergibt:

$$\frac{S - f(t)}{f(t)} = e^{-Skt - SC} \Leftrightarrow \frac{S}{f(t)} - \frac{f(t)}{f(t)} = e^{-Skt - SC} \Leftrightarrow \frac{S}{f(t)} - 1 = e^{-Skt - SC} \Leftrightarrow \frac{S}{f(t)} = e^{-Skt - SC} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{e^{-Skt - SC} + 1}{S} \Leftrightarrow f(t) = \frac{S}{e^{-Skt - SC} + 1}.$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $f(0) = a$ folgt weiter:

$$f(0) = \frac{S}{e^{-Sk \cdot 0 - SC} + 1} = a \Leftrightarrow \frac{S}{e^{-SC} + 1} = a \Leftrightarrow \frac{S}{a} = e^{-SC} + 1 \Leftrightarrow e^{-SC} = \frac{S}{a} - 1$$

und durch Einsetzen von $e^{-SC} = \frac{S}{a} - 1$:

$$f(t) = \frac{S}{e^{-Skt - SC} + 1} = \frac{S}{e^{-Skt} e^{-SC} + 1} = \frac{S}{e^{-Skt} \left(\frac{S}{a} - 1 \right) + 1} = \frac{aS}{a \left(e^{-Skt} \left(\frac{S}{a} - 1 \right) + 1 \right)} =$$

$$\frac{aS}{ae^{-Skt} \left(\frac{S}{a} - 1 \right) + a} = \frac{aS}{e^{-Skt} (S - a) + a} = \frac{aS}{a + [S - a]e^{-Skt}}$$

das Gewünschte.

Eigenschaften

Anders als beim exponentiellen und beschränkten Wachstum verfügt die logistische

Wachstumsfunktion $f(t) = \frac{a \cdot S}{a + [S - a] \cdot e^{-Skt}}$ über einen Wendepunkt (als [positive] Stelle t

mit maximaler Änderungsrate $f'(t)$). Aus der weiter oben erwähnten 1. Ableitung

$$f'(t) = \frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S - a] e^{-Skt}}{(a + [S - a] e^{-Skt})^2} = (a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S - a] e^{-Skt}) (a + [S - a] e^{-Skt})^{-2}$$
 lässt sich mit der

Produkt- und Kettenregel die 2. Ableitung bilden und vereinfachen:

$$f''(t) = -Sk \cdot (a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S - a] e^{-Skt}) (a + [S - a] e^{-Skt})^{-2} +$$

$$(a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S - a] e^{-Skt}) (-2) (a + [S - a] e^{-Skt})^{-3} (-Sk \cdot [S - a] e^{-Skt}) =$$

$$(a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S - a] e^{-Skt}) (a + [S - a] e^{-Skt})^{-2} [-Sk + 2Sk \cdot [S - a] e^{-Skt} (a + [S - a] e^{-Skt})^{-1}] =$$

$$\frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S - a] e^{-Skt}}{(a + [S - a] e^{-Skt})^2} \left[-Sk + \frac{2Sk \cdot [S - a] e^{-Skt}}{a + [S - a] e^{-Skt}} \right] =$$

$$\frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S - a] e^{-Skt}}{(a + [S - a] e^{-Skt})^2} \left[\frac{-Sk(a + [S - a] e^{-Skt})}{a + [S - a] e^{-Skt}} + \frac{2Sk \cdot [S - a] e^{-Skt}}{a + [S - a] e^{-Skt}} \right] =$$

$$\frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S - a] e^{-Skt}}{(a + [S - a] e^{-Skt})^2} \cdot \frac{-Sk(a + [S - a] e^{-Skt})}{a + [S - a] e^{-Skt}} =$$

$$\frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S - a] e^{-Skt}}{(a + [S - a] e^{-Skt})^2} \cdot \frac{2Sk \cdot [S - a] e^{-Skt} - Sk[S - a] e^{-Skt} - Ska}{a + [S - a] e^{-Skt}} =$$

$$\frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S - a] e^{-Skt}}{(a + [S - a] e^{-Skt})^2} \cdot \frac{Sk \cdot [S - a] e^{-Skt} - Ska}{a + [S - a] e^{-Skt}} = \frac{a \cdot S^3 \cdot k^2 \cdot [S - a] e^{-Skt}}{(a + [S - a] e^{-Skt})^2} \cdot \frac{[S - a] e^{-Skt} - a}{a + [S - a] e^{-Skt}}.$$

Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt die Wendestelle:

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{a \cdot S^3 \cdot k^2 \cdot [S - a] e^{-Skt}}{(a + [S - a] e^{-Skt})^2} \cdot \frac{[S - a] e^{-Skt} - a}{a + [S - a] e^{-Skt}} = 0 \Leftrightarrow [S - a] e^{-Skt} - a = 0 \Leftrightarrow$$

$$[S - a] e^{-Skt} = a \Leftrightarrow e^{-Skt} = \frac{a}{S - a} \Leftrightarrow -Skt = \ln\left(\frac{a}{S - a}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{a}{S - a}\right)}{-Sk}$$

An der Stelle t besitzt die Funktion des logistischen Wachstums f(t) einen Wendepunkt, wie mit Hilfe der 3. Ableitung oder des Vorzeichenswechsels der 2. Ableitung nachzuprüfen ist. Der Wert t ist positiv, wenn

$$\frac{a}{S - a} < 1 \Leftrightarrow a < S - a \Leftrightarrow 2a < S \Leftrightarrow a < S/2$$

ist. Außerdem gilt:

$$f\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{S - a}\right)}{-Sk}\right) = \frac{a \cdot S}{a + [S - a] \cdot e^{-Sk \cdot \frac{\ln\left(\frac{a}{S - a}\right)}{-Sk}}} = \frac{a \cdot S}{a + [S - a] \cdot e^{\ln\left(\frac{a}{S - a}\right)}} = \frac{a \cdot S}{a + [S - a] \cdot \frac{a}{S - a}} = \frac{aS}{2a} = \frac{S}{2},$$

so dass der Wendepunkt genau den halben Wert der Schranke S als Funktionswert hat. Am Wendepunkt ist die Steigung der Funktion f(t), also die Änderungsrate bzw. Wachstumsgeschwindigkeit f'(t), am größten; links vom Wendepunkt steigt die Wachstumsgeschwindigkeit f'(t) (Linkskrümmung), rechts davon fällt sie (Rechtskrümmung). Die Änderungsrate f'(t) ist immer positiv, das Wachstum f(t) immer monoton steigend.

Die Funktion des logistischen Wachstums f(t) besitzt zudem die Schranke S als waagerechte Asymptote, d.h. es gilt:

$$t \rightarrow +\infty: f(t) \rightarrow S.$$

Wir fassen die Eigenschaften des logistischen Wachstums noch wie folgt in der nachstehenden Tabelle zusammen:

| Logistisches Wachstum | | |
|-----------------------|---|---|
| Differenzialgleichung | $f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (S - f(t))$ | k Proportionalitätsfaktor S Schranke: $S > a$ a Anfangswert: $a > 0$ $0 < a < S$ |
| Wachstumsfunktion | $f(t) = \frac{aS}{a + (S - a)e^{-Skt}}$ | $f(t) > 0$ (positive Bestandsfunktion f(t)) |
| Änderungsrate | $f'(t) = \frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S - a] e^{-Skt}}{(a + [S - a] e^{-Skt})^2}$ | $f'(t) > 0$ (streng monoton steigende Bestandsfunktion f(t)) |
| Anfangswert | $f(0) = a$ | |
| Auswertung | $y_0 = f(t_0)$ $y_0 = \frac{aS}{a + (S - a)e^{-Skt_0}}$ | y_0 Bestand |
| | $y_1 = f'(t_0)$ | y_1 Bestandsänderung |

| | | | |
|------------------------------|---|--|--|
| | $y_1 = \frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S - a] e^{-Sk t_0}}{(a + [S - a] e^{-Sk t_0})^2}$ | | |
| | $f(t_0) = y_0$ | $t_0 = -\frac{\ln \frac{a(S - y_0)}{y_0(S - a)}}{Sk}$ | t_0 Zeit o.a. |
| Bestimmung | $a = f(0)$ | | $f(t) \rightarrow S \quad (t \rightarrow +\infty)$ |
| | $f(t_0) = y_0$ | $k = -\frac{\ln \frac{a(S - y_0)}{y_0(S - a)}}{S t_0}$ | $a = -\frac{S y_0 e^{-S k t_0}}{S - y_0 + y_0 e^{-S k t_0}}$ |
| Wendepunkt | $W\left(-\frac{\ln\left(\frac{a}{S-a}\right)}{-Sk} \mid \frac{S}{2}\right)$ | | t-Koordinate des Wendepunkts $t_w > 0$, falls $a < S/2$ |
| Logistisches Wachstum | | | |

Logistisches Wachstum

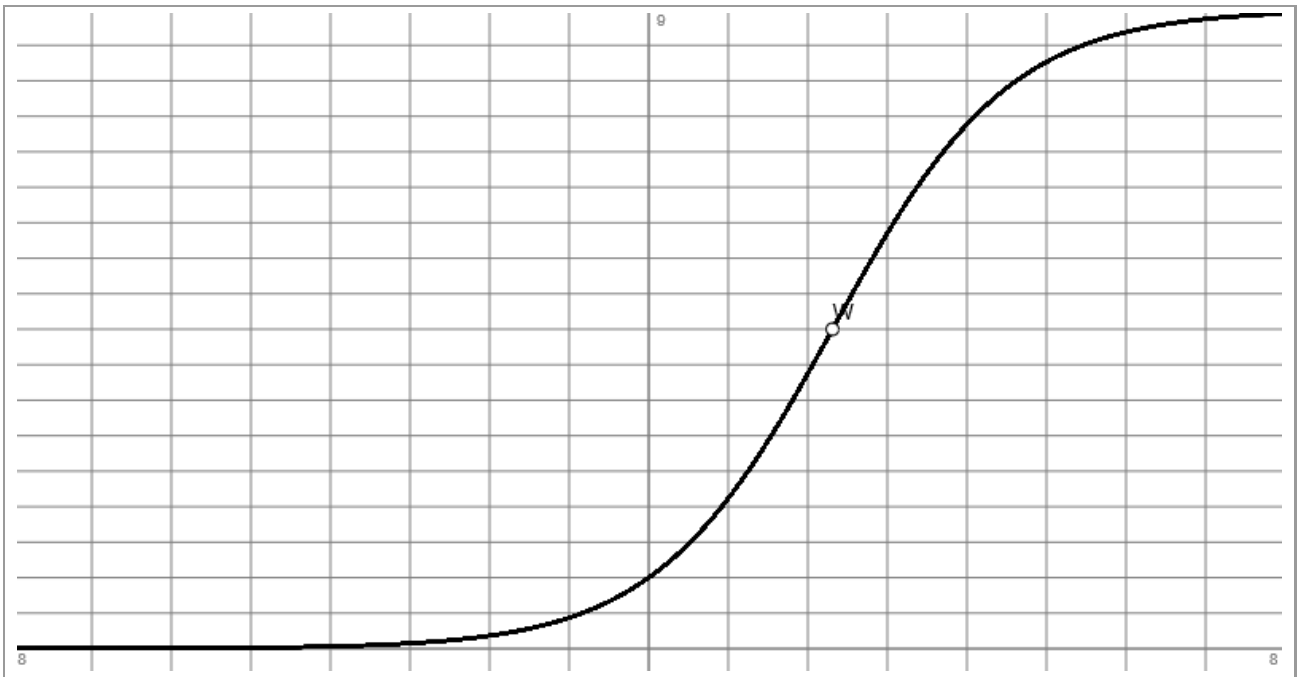
Beispiele

a) Betrachtet wird die auf allen reellen Zahlen definierte Funktion $f(x) = \frac{9}{1 + 8e^{-0.9x}}$ mit $a = 1$, $S = 9$ und $k = 0,1$. Für $f(x)$ gilt: $f(0) = 1$; $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty$: $f(x) \rightarrow 9 = S$ mit den zwei waagerechten Asymptoten $y = 0$ und $y = 9$; Wendepunkt $W(2,31|4,5)$ mit $4,5 = 9/2 = S/2$; steigende Monotonie.

| Wertetabelle: | | | | | |
|---------------|--------|-------|--------|--------------------------|--|
| x | f(x) | f'(x) | f''(x) | Besondere Kurvenpunkte | |
| -8 | 0.0008 | 0 | 0 | | |
| -7.5 | 0.0013 | 0 | 0 | | |
| -7 | 0.0021 | 0 | 0 | | |
| -6.5 | 0.0032 | 0 | 0 | | |
| -6 | 0.0051 | 0 | 0 | | |
| -5.5 | 0.008 | 0.01 | 0.01 | | |
| -5 | 0.0125 | 0.01 | 0.01 | | |
| -4.5 | 0.0196 | 0.02 | 0.02 | | |
| -4 | 0.0306 | 0.03 | 0.02 | | |
| -3.5 | 0.048 | 0.04 | 0.04 | | |
| -3 | 0.075 | 0.07 | 0.06 | | |
| -2.5 | 0.117 | 0.1 | 0.09 | | |
| -2 | 0.1822 | 0.16 | 0.14 | | |
| -1.5 | 0.2825 | 0.25 | 0.21 | | |
| -1 | 0.4353 | 0.37 | 0.3 | | |
| -0.5 | 0.6644 | 0.55 | 0.42 | | |
| 0 | 1 | 0.8 | 0.56 | Schnittpunkt $S_y(0 1)$ | |
| 0.5 | 1.4752 | 1.11 | 0.67 | | |
| 1 | 2.1164 | 1.46 | 0.69 | | |
| 1.5 | 2.9279 | 1.78 | 0.56 | | |
| 2 | 3.8753 | 1.99 | 0.25 | | |
| 2.31 | 4.499 | 2.02 | 0 | Wendepunkt $W(2.31 4.5)$ | |
| 2.5 | 4.8828 | 2.01 | -0.15 | | |
| 3 | 5.8531 | 1.84 | -0.5 | | |

| | | | | |
|-----|--------|------|-------|--|
| 3.5 | 6.7023 | 1.54 | -0.68 | |
| 4 | 7.3856 | 1.19 | -0.69 | |
| 4.5 | 7.899 | 0.87 | -0.59 | |
| 5 | 8.2654 | 0.61 | -0.46 | |
| 5.5 | 8.5173 | 0.41 | -0.33 | |
| 6 | 8.6861 | 0.27 | -0.23 | |
| 6.5 | 8.7973 | 0.18 | -0.15 | |
| 7 | 8.8697 | 0.12 | -0.1 | |
| 7.5 | 8.9165 | 0.07 | -0.07 | |
| 8 | 8.9466 | 0.05 | -0.04 | |

Graph:



b) Die Wachstumsfunktion $f(t) = \frac{40}{2 + 18e^{-0.2t}}$ mit $a = 2$, $S = 20$ und $k = 0,01$ beschreibt ein logistisches Wachstum. Es gilt: $f(0) = 2 = a$, $f(t) \rightarrow 20 = S$ für $t \rightarrow +\infty$ und weiter: $f(21) = 17,62$ sowie:

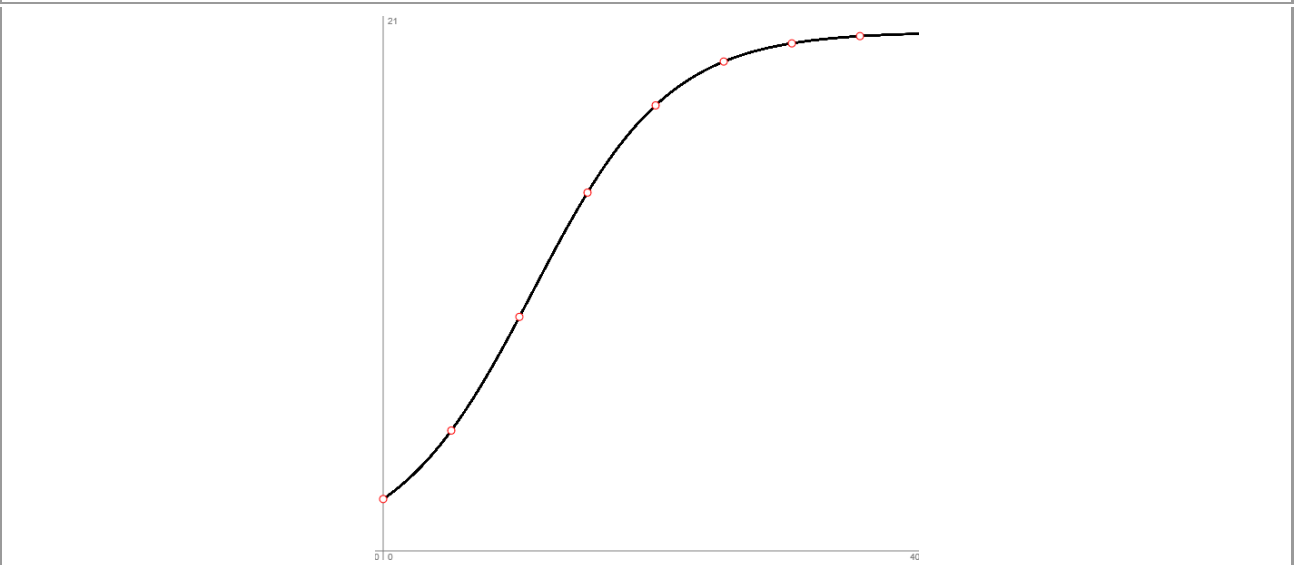
$$f(t) = 15 \Leftrightarrow \frac{40}{2 + 18e^{-0.2t}} = 15 \Leftrightarrow 40 = 15(2 + 18e^{-0.2t}) \Leftrightarrow 2,67 = 2 + 18e^{-0.2t} \Leftrightarrow 0,67 = 18e^{-0.2t} \Leftrightarrow$$

$$e^{-0.2t} = 0,0372 \Leftrightarrow -0,2t = \ln(0,0372) \Leftrightarrow t = 16,45. \text{ Die Wachstumsfunktion } f(t) = \frac{40}{2 + 18e^{-0.2t}} \text{ hat als}$$

Wertetabelle und Graph:

| Wertetabelle: | | |
|---------------|---------|-----------------------------|
| t | f(t) | f'(t) = 0.01*f(t)*(20-f(t)) |
| 0 | 2 | 0.36 |
| 5 | 4.6394 | 0.7126 |
| 10 | 9.0171 | 0.9903 |
| 15 | 13.8114 | 0.8547 |
| 20 | 17.1697 | 0.4859 |
| 25 | 18.8565 | 0.2156 |
| 30 | 19.5636 | 0.0854 |
| 35 | 19.8372 | 0.0323 |
| 40 | 19.9398 | 0.012 |

Graph:

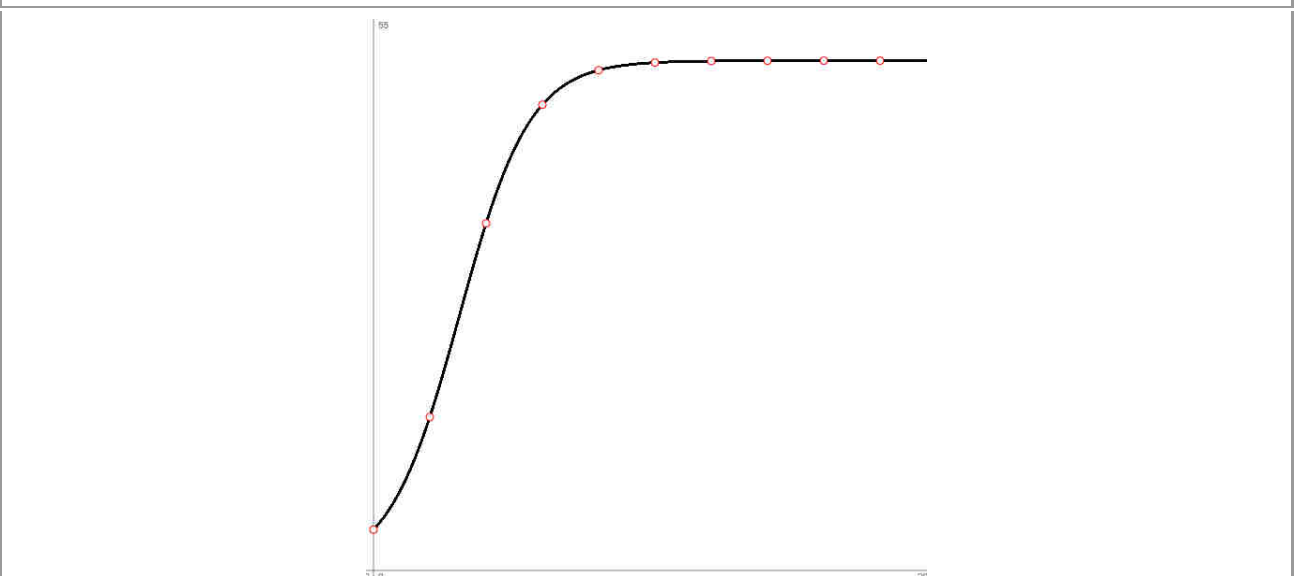


c) Gegeben ist die logistische Wachstumsfunktion $f(t) = \frac{200}{4 + 46e^{-0,8t}}$. Dem Funktionsterm von $f(t)$ ist sofort zu entnehmen, dass der Anfangswert $a = 4$ ist. Wegen $aS = 200$ folgt: $S = 200/4 = 50$ als Schranke, wegen $Sk = 0,8$ ergibt sich: $k = 0,8/50 = 0,016$. Wertetabelle und Graph der Funktion $f(t)$ sind:

Wertetabelle:

| t | f(t) | f'(t) = 0.016*f(t)*(50-f(t)) |
|----|---------|------------------------------|
| 0 | 4 | 2.944 |
| 2 | 15.052 | 8.4166 |
| 4 | 34.0422 | 8.6918 |
| 6 | 45.677 | 3.1594 |
| 8 | 49.0625 | 0.7359 |
| 10 | 49.8079 | 0.1531 |
| 12 | 49.9611 | 0.0311 |
| 14 | 49.9921 | 0.0063 |
| 16 | 49.9984 | 0.0013 |
| 18 | 49.9997 | 0.0003 |
| 20 | 49.9999 | 0.0001 |

Graph:

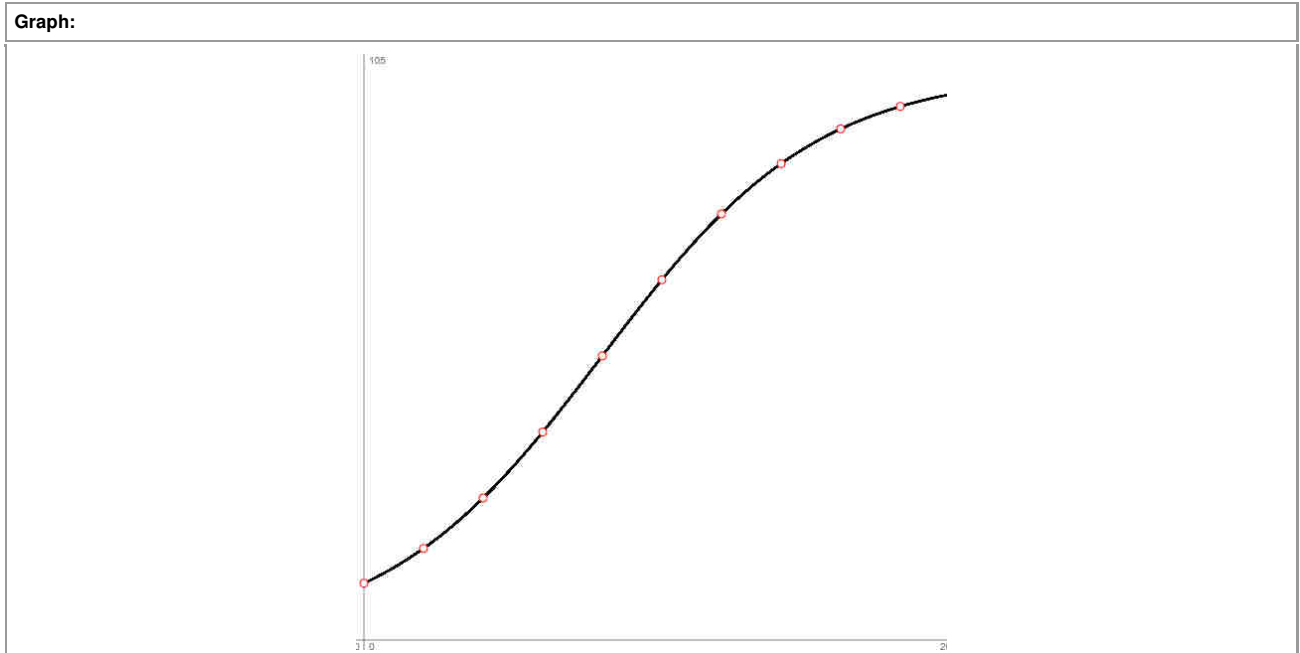


d) Eine logistische Wachstumsfunktion $f(t) = \frac{a \cdot S}{a + [S - a] \cdot e^{-skt}}$ besitzt den Anfangswert $f(0) = 10$ und den Wendepunkt $W(8|50)$. Aus dem Anfangswert $f(0) = 10$ folgt: $a = 10$, wegen $S/2 = 50$ auf Grund des Wendepunktes folgt: $S = 100$. Die t-Koordinate des Wendepunktes ergibt wegen:

$$8 = \frac{\ln\left(\frac{a}{S-a}\right)}{-Sk} \text{ bei } a = 10 \text{ und } S = 100: 8 = \frac{\ln\left(\frac{10}{100-10}\right)}{-100k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{-100 \cdot 8} = 0,00275. \text{ Die Funktion}$$

lautet somit: $f(t) = \frac{100}{10+90 \cdot e^{-0,275t}}$. Wertetabelle und Graph der Funktion $f(t)$ sind:

| Wertetabelle: | | |
|---------------|---------|---------------------------------|
| t | f(t) | f'(t) = 0.00275*f(t)*(100-f(t)) |
| 0 | 10 | 2.475 |
| 2 | 16.1484 | 3.7237 |
| 4 | 25.026 | 5.1598 |
| 6 | 36.6509 | 6.385 |
| 8 | 50.0694 | 6.875 |
| 10 | 63.4779 | 6.3755 |
| 12 | 75.078 | 5.1455 |
| 14 | 83.9266 | 3.7097 |
| 16 | 90.0498 | 2.464 |
| 18 | 94.007 | 1.5493 |
| 20 | 96.4524 | 0.941 |



e) Das Wachstum von Seerosen in einem 5000 Quadratmeter großen See erfolgt logistisch gemäß der nachstehenden Tabelle:

| t [Tage] | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 |
|----------|-----|------|------|------|------|
| y [qm] | 200 | 1680 | 4300 | 4900 | 4990 |

Mit $S = 5000$ und $a = f(0) = 200$ ist nur noch k zu bestimmen. Nun ist $f(40) = 4300$, so dass folgt:

$$f(40) = \frac{1000000}{200 + 4800 \cdot e^{-5000k \cdot 40}} = 4300 \Leftrightarrow \frac{1000000}{200 + 4800 \cdot e^{-200000k}} = 4300 \Leftrightarrow$$

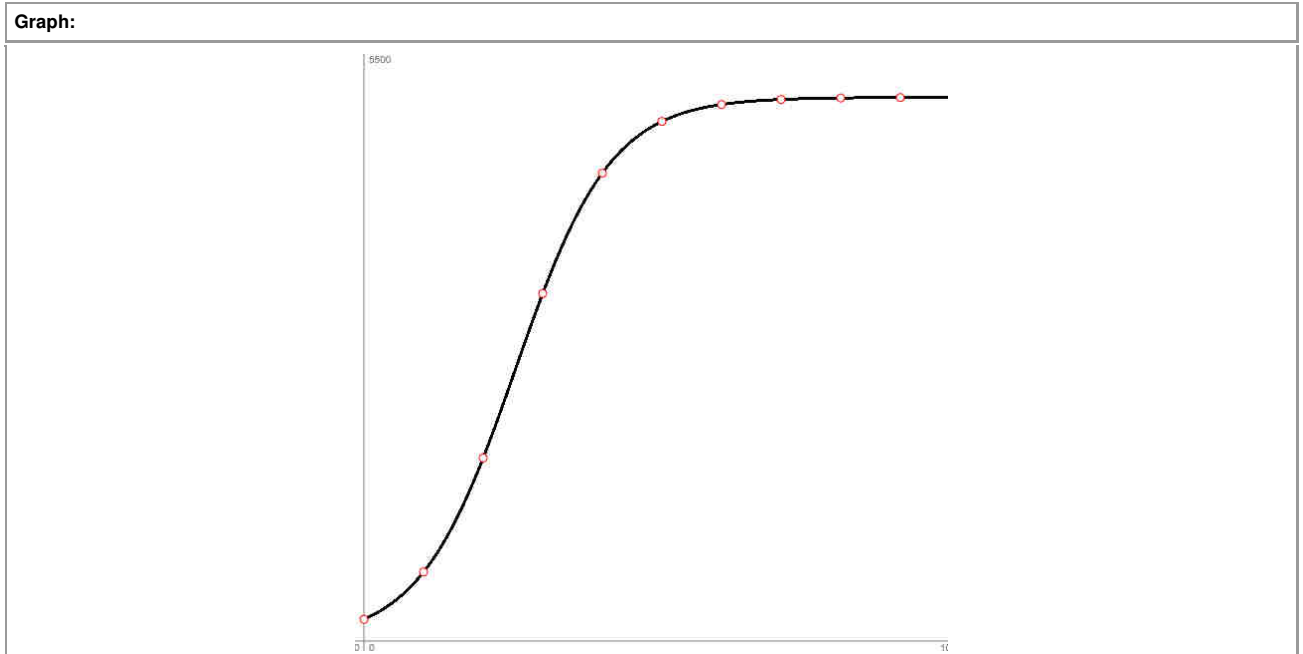
$$\frac{1000000}{4300} = 200 + 4800 \cdot e^{-200000k} \Leftrightarrow 32,558 = 4800e^{-200000k} \Leftrightarrow 0,06783 = e^{-200000k} \Leftrightarrow$$

$$-5 = -200000k \Leftrightarrow k = 0,000025.$$

Die Wachstumsfunktion lautet also: $f(t) = \frac{1000000}{200 + 4800 \cdot e^{-0,125t}}$ mit Wertetabelle und Graph:

Wertetabelle:

| t | f(t) | f'(t) = 0.000025*f(t)*(5000-f(t)) |
|-----|-----------|-----------------------------------|
| 0 | 200 | 24 |
| 10 | 634.8307 | 69.2786 |
| 20 | 1683.479 | 139.5823 |
| 30 | 3196.0606 | 144.1375 |
| 40 | 4303.9974 | 74.8898 |
| 50 | 4778.603 | 26.4492 |
| 60 | 4934.4993 | 8.0803 |
| 70 | 4981.0567 | 2.3589 |
| 80 | 4994.5579 | 0.6795 |
| 90 | 4998.4396 | 0.195 |
| 100 | 4999.5528 | 0.0559 |



Mit $S = 5000$ und einer linearen Regression über die Variablen t und $y^* = \ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{S}\right)$ ergibt sich als zweite Möglichkeit der Funktionsbestimmung auf Grundlage der erweiterten Tabelle:

| t [Tage] | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 |
|----------|-------|-------|--------|--------|--------|
| y [qm] | 200 | 1680 | 4300 | 4900 | 4990 |
| y^* | -5,34 | -7,84 | -10,33 | -12,41 | -14,73 |

vermöge:

Tabelle, Auswertung:

Daten:

| i | t_i | y_i^* | $t_i - \bar{t}$ | $(t_i - \bar{t})^2$ | $y_i^* - \bar{y}^*$ | $(y_i^* - \bar{y}^*)^2$ | $(t_i - \bar{t}) \cdot (y_i^* - \bar{y}^*)$ |
|---|-------|---------|-----------------|---------------------|---------------------|-------------------------|---|
| 1 | 0 | -5.34 | -40 | 1600 | 4.79 | 22.9441 | -191.6 |
| 2 | 20 | -7.84 | -20 | 400 | 2.29 | 5.2441 | -45.8 |

| | | | | | | | |
|------------------------|-----|---------|----|---------|-------|---------|-------|
| 3 | 40 | -10.33 | 0 | 0 | -0.2 | 0.04 | 0 |
| 4 | 60 | -12.41 | 20 | 400 | -2.28 | 5.1984 | -45.6 |
| 5 | 80 | -14.73 | 40 | 1600 | -4.6 | 21.16 | -184 |
| Auswertung: | | | | | | | |
| $S_t, S_y =$ | 200 | -50.65 | | | | | |
| $t^*, y^* =$ | 40 | -10.13 | | | | | |
| $Q_t, Q_y =$ | | | | 4000 | | 54.5866 | |
| $\Sigma_t, \sigma_y =$ | | | | 28.2843 | | 3.3041 | |
| $Q_{ty} =$ | | | | | | | -467 |
| $r =$ | | -0.9994 | | | | | |
| $m =$ | | -0.1167 | | | | | |
| $b =$ | | -5.46 | | | | | |

Regressionsgerade:

$$y^* = mt + b = -0.1167t - 5.46$$

die Ausgleichsgerade: $y^* = -0,1167t - 5,46$. Aus dieser Ausgleichsgeraden lässt sich wegen:

$$y = \frac{a \cdot S}{a + [S - a] \cdot e^{-Skt}} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{a + [S - a] \cdot e^{-Skt}}{aS} = \frac{1}{S} + \frac{[S - a] \cdot e^{-Skt}}{aS} \Leftrightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{S} = \frac{[S - a] \cdot e^{-Skt}}{aS} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{S}\right) = \ln\left(\frac{[S - a] \cdot e^{-Skt}}{aS}\right) = \ln\left(\frac{S - a}{aS}\right) + \ln(e^{-Skt}) = -Skt + \ln\left(\frac{S - a}{aS}\right) \Leftrightarrow$$

$$y^* = \ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{S}\right) = -Skt + \ln\left(\frac{S - a}{aS}\right) = mt + b$$

und auf Grund eines Koeffizientenvergleichs: $m = -Sk$, $b = \ln\left(\frac{S - a}{aS}\right)$ ermitteln, so dass

$$m = -Sk \Rightarrow k = -\frac{m}{S}$$

$$b = \ln\left(\frac{S - a}{aS}\right) \Rightarrow e^b = \frac{S - a}{aS} \Rightarrow aSe^b = S - a \Rightarrow a + aSe^b = S \Rightarrow a(1 + Se^b) = S \Rightarrow a = \frac{S}{1 + Se^b}$$

gilt. Hieraus folgt: $k = -(-0,1167)/5000 = 0,00002334$, $a = 5000/(1 + 5000e^{-5,46}) = 224,5$. Die logistische Wachstumsfunktion lautet hier: $f(t) = \frac{1122500}{224,5 + 4775,5 \cdot e^{-0,1167t}}$.