Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Wachstum > Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen sind Gleichungen, die eine Funktion y(x) und deren Ableitungen y'(x), y''(x) … sowie von x abhängige Terme f(x) enthalten können. Die Differentialgleichungen sind durch Integration nach der Funktion y(x) aufzulösen (explizite, implizite Darstellung). Es sind dabei Integrationskonstanten und u.U. Anfangsbedingungen zu beachten. Die Ordnung n einer Differenzialgleichung gibt die höchste vorkommende Ableitung $y^{(n)}(x)$ wider, der Grad gibt den Exponenten k an, mit dem die höchste Ableitung vorkommt, also: $(y^{(n)}(x))^k$. Wir schreiben noch für die Ableitungen:

$$y' = \frac{dy}{dx} \text{ usw.}$$

Wir betrachten im Folgenden Differenzialgleichungen 1. Ordnung und haben:

Eine Differenzialgleichung der Form

$$y' + f(x)y = g(x)$$

heißt lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differenzialgleichung homogen, ansonsten inhomogen.

Die homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung hat die Lösung:

$$y = C \cdot e^{-\int f(x)dx},$$

die inhomogene Differenzialgleichung:

$$y = \int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx} dx \cdot e^{-\int f(x)dx} + C \cdot e^{-\int f(x)dx}$$

Die homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung lässt sich mit Hilfe der Trennung der Variablen lösen, wir erhalten eine von der Integrationskonstanten C abhängige allgemeine Lösung. Die inhomogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung bestimmt sich aus der Lösung der homogenen Differenzialgleichung u.a. durch Variation der Konstanten C, wir erhalten eine spezielle Lösung. Die Gesamtlösung der Differentialgleichung ist die Summe aus allgemeiner und spezieller Lösung.

Differenzialgleichungen des linearen, exponentiellen und beschränkten Wachstums

Wir reduzieren nun die nun zu betrachtenden linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung auf die Form:

$$y' + ay = b \quad (*)$$

mit reellen Zahlen a, b. Aus der Differenzialgleichung (*) ergeben sich als Lösungen die Wachstumsfunktionen des linearen, exponentiellen und beschränkten Wachstums wie folgt:

1. Fall: a = 0. Aus $y' = b$ folgt durch Integration: $y = \int b dx + c = bx + c$. Nun steht die Funktion (Gerade) y = bx + c für lineares Wachstum von der Form y = mx + c (m = b).

2. Fall: a ≠ 0, b = 0. Es ergibt sich hier die homogene Differenzialgleichung $y' + ay = 0$. Wir formen um (Trennung der Variablen):

$$y' + ay = 0 \quad | \; y' = \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} + ay = 0 \quad | -ay$$
$$\frac{dy}{dx} = -ay \quad | \cdot dx$$
$$dy = -aydx \quad | :y$$
$$\frac{dy}{y} = -adx \quad | \text{ (Integration)}$$
$$\int \frac{dy}{y} = -a\int dx + C_1 \quad | \text{ (Integrale ausrechnen)}$$
$$\ln y = -ax + C_1 \quad | \text{ (Exponieren)}$$
$$y = e^{-ax+C_1} \quad | \text{ (Potenzgesetze)}$$
$$y = e^{-ax} \cdot e^{C_1} \quad | \, (c = e^{C_1})$$
$$y = ce^{-ax}$$

mit c > 0. $y = ce^{-ax}$ steht dann für exponentielles Wachstum von der Form $y = ce^{kx}$ mit k = -a.

<u>3. Fall</u>: a ≠ 0, b ≠ 0. Wir haben die inhomogene lineare Differenzialgleichung $y' + ay = b$. Die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung $y' + ay = 0$ ergibt sich laut dem 2. Fall als $y = ce^{-ax}$. Wir suchen nun noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung und nehmen y wegen y‘ = 0 als Konstante an, also: $0 + ay = b$ und damit: $ay = b$ und: $y = \frac{b}{a}$. Als Summe der allgemeinen und der speziellen Lösung erhalten wir dann: $y = ce^{-ax} + \frac{b}{a}$ und damit eine Funktion vom Typ $y = S - c_1e^{-kx}$ ($S = \frac{b}{a}$, k = a, c_1 = -c) für das beschränkte Wachstum.

Die Differenzialgleichung $y' + ay = b$ führt damit jeweils auf eine Funktionenschar. Berücksichtigen wir die <u>Anfangsbedingung</u> y(0) = c_0, so ergibt sich die eindeutig bestimmte Funktion y = mx + c_0 bei linearem Wachstum bzw. $y = c_0e^{-ax}$ bei exponentiellem Wachstum. Aus der Anfangsbedingung y(0) = S – c_0 folgt bei beschränktem Wachstum die Funktion $y = S - c_0e^{-kx}$.
