Michael Buhlmann

Mathematik-Formelsammlung
> Analysis
> Wachstum
> Wachstum (diskret, iterativ)

Die Modellierung von Wachstumsprozessen geschieht in der Mathematik häufig auch iterativ, d.h. durch rekursiv definierte Folgen B(n), n ϵ **N**, mit Anfangswert B(0) = a.

Lineares Wachstum

Lineares Wachstum (diskret)			
Wachstumsfunktion	$B(n+1)=B(n)+b$	b>0: Wachstum	b<0: Zerfall
Anfangswert	$B(0)=a$		
Auswertung	$B(1)=a+b$		
iterativ	$B(2)=a+2b$	…	
explizit		$B(n)=a+nb$	
Bestimmung	$a=B(0)$	$b=B(n+1)-B(n)$	$b=\frac{B(n+p)-B(n)}{p}$
$(n_1\|a_1)$, $(n_2\|a_2)$ $n_1 < n_2$ $p = n_2 - n_1$	$B(n_1)=a_1$ $B(n_2)=a_2$	$b=\frac{B(n_2)-B(n_1)}{n_2-n_1}$	$a=B(n_1)-n_1b$ $a=B(n_2)-n_2b$
			n, n_1, n_2, p ϵ **N**
Lineares Wachstum (diskret)			

Exponentielles Wachstum

Exponentielles Wachstum (diskret)			
Wachstumsfunktion	$B(n+1)=k_e \cdot B(n)$	$k_e>1$: Wachstum	$0<k_e<1$: Zerfall
Anfangswert	$B(0)=a$		
Auswertung	$B(1)=ak_e$	$B(2)=ak_e^2$	…
iterativ	$B(n)=ak_e^n$		
explizit		$B(n)=ae^{kn}$	$k=\ln k_e$
Bestimmung	$a=B(0)$	$k_e=\frac{B(n+1)}{B(n)}$	$k_e=\sqrt[p]{\frac{B(n+p)}{B(n)}}$
$(n_1\|a_1)$, $(n_2\|a_2)$ $n_1 < n_2$ $p = n_2 - n_1$	$B(n_1)=a_1$ $B(n_2)=a_2$	$k_e=\sqrt[p_1]{\frac{B(n_2)}{B(n_1)}}$	$a=\frac{B(n_1)}{k_e^{n_1}}$
			$n, n_1, n_2, p \in \mathbf{N}$
Exponentielles Wachstum (diskret)			

Exponentielles Wachstum (diskret)			
Wachstumsfunktion	$B(n+1)=B(n)+k^*\cdot B(n)$		$k^*>0$: Wachstum $-1<k^*<0$: Zerfall
Anfangswert	$B(0)=a$		
Auswertung	$B(1)=a(1+k^*)$	$B(2)=a(1+k^*)^2$	…
iterativ	$B(n)=a(1+k^*)^n$	$B(n)=ak_e^n$	$k_e=1+k^*$
explizit	$B(n)=ae^{kn}$	$k=\ln(1+k^*)$	$k=\ln k_e$
Bestimmung	$a=B(0)$	$k_e=\frac{B(n+1)}{B(n)}$	$k_e=\sqrt[p]{\frac{B(n+p)}{B(n)}}$
$(n_1\|a_1)$, $(n_2\|a_2)$ $n_1 < n_2$ $p = n_2 - n_1$	$B(n_1)=a_1$ $B(n_2)=a_2$	$k_e=\sqrt[p_1]{\frac{B(n_2)}{B(n_1)}}$	$a=\frac{B(n_1)}{k_e^{n_1}}$
		$k^*=k_e-1$	
			$n, n_1, n_2, p \in \mathbf{N}$
Exponentielles Wachstum (diskret)			

Beschränktes Wachstum

Beschränktes Wachstum (diskret)			
Wachstumsfunktion	$B(n+1)=B(n)+k_b\cdot(S-B(n))$		$0<k_b<1$
Anfangswert	$B(0)=a$		
Auswertung	$B(1)=B(0)+k_b(S-B(0))$ $B(1)=a+k_a(S-a)$		
iterativ	$B(2)=B(1)+k_b(S-B(1))$		…
explizit	$B(n)=S-ce^{-kn}$		$k=-\ln(1-k_b)$
	$S=\frac{B(1)-B(0)}{k_b}+B(0)$		$k=-\ln\frac{S-B(1)}{S-B(0)}$
	$c=S-B(0)$	$c=S-a$	
Bestimmung	$a=B(0)$	$S=\frac{B(1)-B(0)}{k_b}+B(0)$	
		$k_b=\frac{B(1)-B(0)}{S-B(0)}$	
		$B(0)=\frac{B(1)-k_bS}{1-k_b}$	
		$S=\frac{B(n+1)-B(n)}{k_b}+B(n)$	
		$k_b=\frac{B(n+1)-B(n)}{S-B(n)}$	
		$B(n)=\frac{B(n+1)-k_bS}{1-k_b}$	
			n ϵ **N**
Beschränktes Wachstum (diskret)			

Logistisches Wachstum

Logistisches Wachstum (diskret)			
Wachstumsfunktion	$B(n+1) = B(n) + k_l \cdot B(n) \cdot (S - B(n))$		$0<k_l\leq \frac{1}{S}$
Anfangswert	$B(0) = a$		a>0
Auswertung	$B(1) = B(0) + k_l B(0)(S - B(0))$ $B(1) = a + k_l a(S - a)$		
iterativ	$B(2) = B(1) + k_l B(1)(S - B(1))$		…
explizit	$B(n) = \frac{aS}{a + (S - a)e^{-Skn}}$		
	$c = S - a$		$k = -\ln \frac{B(0)(S - B(1))}{B(1)(S - B(0))}$
Bestimmung	$a = B(0)$	$S = \frac{B(1) - B(0)}{k_l \cdot B(0)} + B(0)$	
		$k_l = \frac{B(1) - B(0)}{B(0)(S - B(0))}$	
		$B(0) = \frac{1}{2k_l} + \frac{S}{2} - \frac{\sqrt{(1 + k_l S)^2 - 4k_l B(1)}}{2k_l}$	
			n ϵ **N**
Logistisches Wachstum (diskret)			