**Michael Buhlmann**

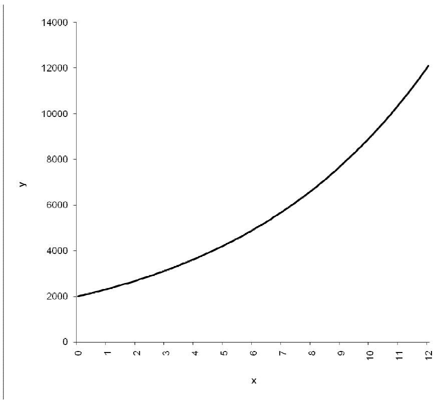
# Mathematik-Formelsammlung
## > Analysis
## > Wachstum
## > Wachstum (mit Exponentialfunktionen)

---

Die Modellierung von Wachstumsprozessen geschieht in der Mathematik häufig über die natürliche Exponentialfunktion $y = e^t$ (e = Eulersche Zahl; t meist für die Zeitachse, t≥0, reell). y = f(t) gibt den reellen Wert (Bestand) einer mathematischen Größe zum (Zeit-) Punkt t an. Die Ableitung f'(t) steht für die Änderungsrate.

### Exponentielles Wachstum

**Exponentielles Wachstum (stetig, differenzierbar)**




| | | | |
|---|---|---|---|
| Differenzialgleichung | $f'(t) = k \cdot f(t)$ | k Proportionalitätsfaktor | |
| Wachstumsfunktion | $f(t) = ce^{kt}$ | k>0: Wachstum | k<0: Zerfall |
| Änderungsrate | $f'(t) = cke^{kt}$ | | |
| Anfangswert | $f(0) = c$ | | |
| Verdopplungszeit<br>Halbwertszeit | | $T_V = \frac{\ln 2}{k}$ | $T_H = \frac{-\ln 2}{k}$ |
| | | $k = \frac{\ln 2}{T_V}$ | $k = \frac{-\ln 2}{T_H}$ |
| Auswertung | $y_0 = f(t_0)$ | $y_0 = ce^{kt_0}$ | $y_0$ Bestand |
| | $y_1 = f'(t_0)$ | $y_1 = cke^{kt_0}$ | $y_1$ Bestandsänderung |
| | $f(t_0) = y_0$ | $t_0 = \frac{\ln \frac{y_0}{c}}{k}$ | $t_0$ Zeit o.a. |

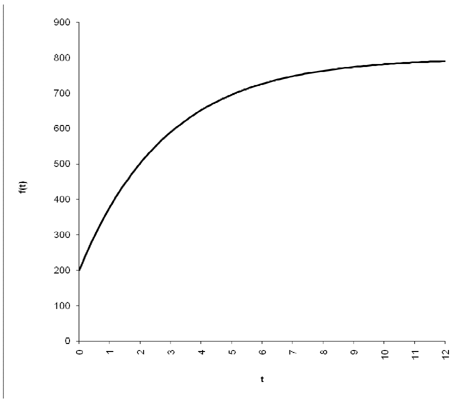
| | | | |
|---|---|---|---|
| | $f'(t_1) = y_1$ | $t_1 = \frac{\ln \frac{y_1}{ck}}{k}$ | $t_1$ Zeit o.a. |
| Bestimmung | $c = f(0)$ | $f(t_0) = y_0$ | $k = \frac{\ln y_0 - \ln c}{t_0}$ |
| $(t_1 \| y_1)$, $(t_2 \| y_2)$ | $f(t_1) = y_1$<br>$f(t_2) = y_2$ | $k = \frac{\ln y_1 - \ln y_2}{t_1 - t_2}$ | $c = \frac{y_1}{e^{kt_1}}$ |
| Basiswechsel | $f(t) = ca^t \leftrightarrow f(t) = ce^{kt}$ | | $k = \ln a$ |
| **Exponentielles Wachstum (stetig, differenzierbar)** | | | |

| **Exponentielles Wachstum (diskret)** | | | |
|---|---|---|---|
| Wachstumsfunktion | $B(n+1) = k_e \cdot B(n)$ | $k_e>1$: Wachstum | $0<k_e<1$: Zerfall |
| Anfangswert | $B(0) = a$ | | |
| Auswertung | $B(1) = ak_e$ | $B(2) = ak_e^2$ | … |
| iterativ | $B(n) = ak_e^n$ | | |
| explizit | | $B(n) = ae^{kn}$ | $k = \ln k_e$ |
| Bestimmung | $a = B(0)$ | $k_e = \frac{B(n+1)}{B(n)}$ | $k_e = \sqrt[p]{\frac{B(n+p)}{B(n)}}$ |
| $(n_1 \| a_1)$, $(n_2 \| a_2)$<br>$n_1 < n_2$<br>$p = n_2 - n_1$ | $B(n_1) = a_1$<br>$B(n_2) = a_2$ | $k_e = \sqrt[p_1]{\frac{B(n_2)}{B(n_1)}}$ | $a = \frac{B(n_1)}{k_e^{n_1}}$ |
| | | | $n, n_1, n_2, p \in$ **N** |
| **Exponentielles Wachstum (diskret)** | | | |

| **Exponentielles Wachstum (diskret)** | | | |
|---|---|---|---|
| Wachstumsfunktion | $B(n+1) = B(n) + k^* \cdot B(n)$ | | $k^*>0$: Wachstum<br>$-1<k^*<0$: Zerfall |
| Anfangswert | $B(0) = a$ | | |
| Auswertung | $B(1) = a(1+k^*)$ | $B(2) = a(1+k^*)^2$ | … |
| iterativ | $B(n) = a(1+k^*)^n$ | $B(n) = ak_e^n$ | $k_e = 1 + k^*$ |
| explizit | $B(n) = ae^{kn}$ | $k = \ln(1+k^*)$ | $k = \ln k_e$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Bestimmung | $a = B(0)$ | $k_e = \dfrac{B(n+1)}{B(n)}$ | $k_e = \sqrt[p]{\dfrac{B(n+p)}{B(n)}}$ |
| $(n_1\|a_1)$, $(n_2\|a_2)$<br>$n_1 < n_2$<br>$p = n_2 - n_1$ | $B(n_1) = a_1$<br>$B(n_2) = a_2$ | $k_e = \sqrt[p_1]{\dfrac{B(n_2)}{B(n_1)}}$ | $a = \dfrac{B(n_1)}{k_e^{n_1}}$ |
| | | $k^* = k_e - 1$ | |
| | | | $n, n_1, n_2, p \in \mathbf{N}$ |
| **Exponentielles Wachstum (diskret)** | | | |

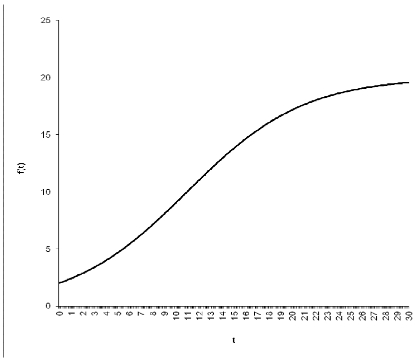
## Beschränktes Wachstum

| **Beschränktes Wachstum (stetig, differenzierbar)** | | | |
|---|---|---|---|
|  | | | |
| Differenzialgleichung | $f'(t) = k \cdot (S - f(t))$ | k Proportionalitätsfaktor<br>k>0 | S Schranke |
| Wachstumsfunktion | $f(t) = S - ce^{-kt}$ | | |
| Änderungsrate | $f'(t) = cke^{-kt}$ | | |
| Anfangswert | $f(0) = a$<br>$f(0) = S - c$ | $c = S - a$<br>$c = S - f(0)$ | $S = a + c$<br>$S = f(0) + c$ |
| | $f(0) = 0$<br>$a = 0$ | $c = S$ | $f(t) = S(1 - e^{-kt})$ |
| Auswertung | $y_0 = f(t_0)$ | $y_0 = S - ce^{-kt_0}$ | $y_0$ Bestand |
| | $y_1 = f'(t_0)$ | $y_1 = cke^{-kt_0}$ | $y_1$ Bestandsänderung |
| | $f(t_0) = y_0$ | $t_0 = -\dfrac{\ln \dfrac{S - y_0}{c}}{k}$ | $t_0$ Zeit o.a. |
| | $f'(t_1) = y_1$ | $t_1 = -\dfrac{\ln \dfrac{y_1}{ck}}{k}$ | $t_1$ Zeit o.a. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Bestimmung | $c = S - f(0)$ | $f(t) \to S$ (t->∞) | |
| | $f(t_0) = y_0$ | $S = y_0 + ce^{-kt_0}$ | $c = (S - y_0)e^{kt_0}$ |
| | | $k = -\frac{\ln \frac{S-y_0}{c}}{t_0}$ | |
| $(t_1 \vert y_1)$, $(t_2 \vert y_2)$ | $f(t_1) = y_1$<br>$f(t_2) = y_2$ | $k = \frac{\ln y_1 - \ln y_2}{t_1 - t_2}$ | $c = \frac{y_1}{e^{kt_1}}$ |
| **Beschränktes Wachstum (stetig, differenzierbar)** | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Beschränktes Wachstum (diskret)** | | | |
| Wachstumsfunktion | $B(n+1) = B(n) + k_b \cdot (S - B(n))$ | | $0<k_b<1$ |
| Anfangswert | $B(0) = a$ | | |
| Auswertung | $B(1) = B(0) + k_b(S - B(0))$<br>$B(1) = a + k_a(S - a)$ | | |
| iterativ | $B(2) = B(1) + k_b(S - B(1))$ | | … |
| explizit | $B(n) = S - ce^{-kn}$ | | $k = -\ln(1 - k_b)$ |
| | $S = \frac{B(1) - B(0)}{k_b} + B(0)$ | | $k = -\ln \frac{S - B(1)}{S - B(0)}$ |
| | $c = S - B(0)$ | $c = S - a$ | |
| Bestimmung | $a = B(0)$ | $S = \frac{B(1) - B(0)}{k_b} + B(0)$ | |
| | | $k_b = \frac{B(1) - B(0)}{S - B(0)}$ | |
| | | $B(0) = \frac{B(1) - k_b S}{1 - k_b}$ | |
| | | $S = \frac{B(n+1) - B(n)}{k_b} + B(n)$ | |
| | | $k_b = \frac{B(n+1) - B(n)}{S - B(n)}$ | |
| | | $B(n) = \frac{B(n+1) - k_b S}{1 - k_b}$ | |
| | | | n є **N** |
| **Beschränktes Wachstum (diskret)** | | | |

# Logistisches Wachstum

| **Logistisches Wachstum (stetig, differenzierbar)** | | | |
|---|---|---|---|
|  | | | |
| Differenzialgleichung | $f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (S - f(t))$ | | k Proportionalitätsfaktor<br>$0<k_l\le\frac{1}{S}$<br>S Schranke<br>S>a<br>Anfangswert<br>a>0 |
| Wachstumsfunktion | $f(t) = \frac{aS}{a + (S-a)e^{-Skt}}$ | | |
| Änderungsrate | $f'(t) = \frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S-a]e^{-Skt}}{(a + [S-a]e^{-Skt})^2}$ | | |
| Anfangswert | $f(0) = a$ | $c = S - a$ | $S = a + c$ |
| Auswertung | $y_0 = f(t_0)$ | $y_0 = S - ce^{-kt_0}$ | $y_0$ Bestand |
| | $y_1 = f'(t_0)$<br>$y_1 = \frac{a \cdot S^2 \cdot k \cdot [S-a]e^{-Skt_0}}{(a + [S-a]e^{-Skt_0})^2}$ | | $y_1$ Bestandsänderung |
| | $f(t_0) = y_0$ | $t_0 = -\frac{\ln\frac{a(S-y_0)}{y_0(S-a)}}{Sk}$ | $t_0$ Zeit o.a. |
| Bestimmung | $a = f(0)$ | $a = S - c$ | $f(t) \to S$ (t->∞) |
| | $f(t_0) = y_0$ | $k = -\frac{\ln\frac{a(S-y_0)}{y_0(S-a)}}{St_0}$ | $a = -\frac{Sy_0e^{-Skt_0}}{S - y_0 + y_0e^{-Skt_0}}$ |
| | | | |
| **Logistisches Wachstum (stetig, differenzierbar)** | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Logistisches Wachstum (diskret)** | | | |
| Wachstumsfunktion | $B(n+1) = B(n) + k_l \cdot B(n) \cdot (S - B(n))$ | | $0<k_l\leq\frac{1}{S}$ |
| Anfangswert | $B(0) = a$ | | a>0 |
| Auswertung | $B(1) = B(0) + k_l B(0)(S - B(0))$<br>$B(1) = a + k_l a(S - a)$ | | |
| iterativ | $B(2) = B(1) + k_l B(1)(S - B(1))$ | | … |
| explizit | $B(n) = \frac{aS}{a + (S - a)e^{-Skn}}$ | | |
| | $c = S - a$ | | $k = -\ln\frac{B(0)(S - B(1))}{B(1)(S - B(0))}$ |
| Bestimmung | $a = B(0)$ | $S = \frac{B(1) - B(0)}{k_l \cdot B(0)} + B(0)$ | |
| | | $k_l = \frac{B(1) - B(0)}{B(0)(S - B(0))}$ | |
| | | $B(0) = \frac{1}{2k_l} + \frac{S}{2} - \frac{\sqrt{(1 + k_l S)^2 - 4k_l B(1)}}{2k_l}$ | |
| | | | n є **N** |
| **Logistisches Wachstum (diskret)** | | | |