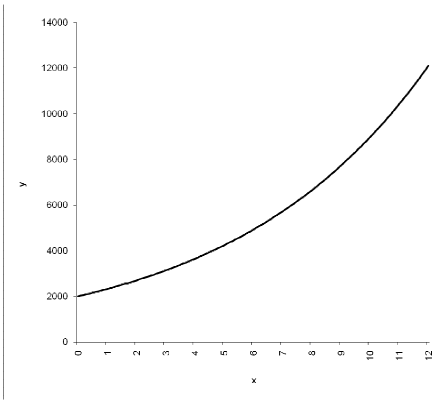
Michael Buhlmann

Mathematik-Formelsammlung
> Analysis
> Wachstum
> Exponentielles Wachstum

Die Modellierung von Wachstumsprozessen geschieht in der Mathematik häufig über die natürliche Exponentialfunktion y = e^t (e = Eulersche Zahl; t meist für die Zeitachse, t≥0, reell). y = f(t) gibt den reellen Wert (Bestand) einer mathematischen Größe zum (Zeit-) Punkt t an. Die Ableitung f'(t) steht für die Änderungsrate.

Exponentielles Wachstum (stetig, differenzierbar)



Differenzialgleichung	$f'(t) = k \cdot f(t)$	k Proportionalitätsfaktor	
Wachstumsfunktion	$f(t) = ce^{kt}$	k>0: Wachstum	k<0: Zerfall
Änderungsrate	$f'(t) = cke^{kt}$		
Anfangswert	$f(0) = c$		
Verdopplungszeit Halbwertszeit		$T_V = \frac{\ln 2}{k}$	$T_H = \frac{-\ln 2}{k}$
		$k = \frac{\ln 2}{T_V}$	$k = \frac{-\ln 2}{T_H}$
Auswertung	$y_0 = f(t_0)$	$y_0 = ce^{kt_0}$	y_0 Bestand
	$y_1 = f'(t_0)$	$y_1 = cke^{kt_0}$	y_1 Bestandsänderung
	$f(t_0) = y_0$	$t_0 = \frac{\ln \frac{y_0}{c}}{k}$	t_0 Zeit o.a.
	$f'(t_1) = y_1$	$t_1 = \frac{\ln \frac{y_1}{ck}}{k}$	t_1 Zeit o.a.

Bestimmung	$c = f(0)$	$f(t_0) = y_0$	$k = \dfrac{\ln y_0 - \ln c}{t_0}$
$(t_1 \mid y_1)$, $(t_2 \mid y_2)$	$f(t_1) = y_1$ $f(t_2) = y_2$	$k = \dfrac{\ln y_1 - \ln y_2}{t_1 - t_2}$	$c = \dfrac{y_1}{e^{kt_1}}$
Basiswechsel	$f(t) = ca^t \leftrightarrow f(t) = ce^{kt}$		$k = \ln a$
Exponentielles Wachstum (stetig, differenzierbar)			

Exponentielles Wachstum (diskret)			
Wachstumsfunktion	$B(n+1) = k_e \cdot B(n)$	$k_e>1$: Wachstum	$0<k_e<1$: Zerfall
Anfangswert	$B(0) = a$		
Auswertung	$B(1) = ak_e$	$B(2) = ak_e^2$	…
iterativ	$B(n) = ak_e^n$		
explizit		$B(n) = ae^{kn}$	$k = \ln k_e$
Bestimmung	$a = B(0)$	$k_e = \dfrac{B(n+1)}{B(n)}$	$k_e = \sqrt[p]{\dfrac{B(n+p)}{B(n)}}$
$(n_1 \mid a_1)$, $(n_2 \mid a_2)$ $n_1 < n_2$ $p = n_2 - n_1$	$B(n_1) = a_1$ $B(n_2) = a_2$	$k_e = \sqrt[p_1]{\dfrac{B(n_2)}{B(n_1)}}$	$a = \dfrac{B(n_1)}{k_e^{n_1}}$
			$n, n_1, n_2, p \in$ **N**
Exponentielles Wachstum (diskret)			

Exponentielles Wachstum (diskret)			
Wachstumsfunktion	$B(n+1) = B(n) + k^* \cdot B(n)$		$k^*>0$: Wachstum $-1<k^*<0$: Zerfall
Anfangswert	$B(0) = a$		
Auswertung	$B(1) = a(1+k^*)$	$B(2) = a(1+k^*)^2$	…
iterativ	$B(n) = a(1+k^*)^n$	$B(n) = ak_e^n$	$k_e = 1 + k^*$
explizit	$B(n) = ae^{kn}$	$k = \ln(1+k^*)$	$k = \ln k_e$

Bestimmung	$a = B(0)$	$k_e = \frac{B(n+1)}{B(n)}$	$k_e = \sqrt[p]{\frac{B(n+p)}{B(n)}}$
$(n_1\|a_1)$, $(n_2\|a_2)$ $n_1 < n_2$ $p = n_2 - n_1$	$B(n_1) = a_1$ $B(n_2) = a_2$	$k_e = \sqrt[p_1]{\frac{B(n_2)}{B(n_1)}}$	$a = \frac{B(n_1)}{k_e^{n_1}}$
		$k^* = k_e - 1$	
			$n, n_1, n_2, p \in \mathbf{N}$
Exponentielles Wachstum (diskret)			