Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Wendepunkte

Funktionen und Ableitungen

Eine Funktion f: D_f -> **R** sei mehrfach differenzierbar, so dass die 1. bis 3. Ableitung f'(x), f''(x), f'''(x) existieren. Dann gilt hinsichtlich der besonderen Kurvenpunkte (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte), die der Graph der Funktion f(x) haben kann:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nennernullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: f'(x), f''(x), f'''(x)
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung f'(x) = 0 lösen): f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> P_1(x_1|f(x_1)), P_2(x_2|f(x_2)), …
IV. Wendepunkte (Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
IVa. Sattelpunkte x_0 (als Wendepunkte mit waagerechter Tangente) liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))
V. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VI. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, f''(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, f''(x_0)<0); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0); … – Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

Die 1. Ableitung f'(x_0) = $\lim\limits_{x->x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist dabei die (Tangenten-) Steigung der Funktion an einer bestimmten Stelle x_0 (in Anlehnung an das Steigungsverhalten von Geraden y = mx + c mit Steigung m). Es gelten die Ableitungsregeln:

(f(x) + c)' = f'(x) (additive Konstante)
[c·f(x)]' = c·f'(x) (konstanter Faktor)
(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x) (Summenregel)
(f(x)·g(x))' = f'(x)·g(x) + f(x)·g'(x) (Produktregel)
(f(g(x)))' = f'(g(x))·g'(x) (Kettenregel)

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ (Potenzregel für natürliche/reelle n)}$$
$$(e^{ax})' = ae^{ax},\ (e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$$
$$(\sin(ax))' = a\cos(ax),\ (\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$$
$$(\cos(ax))' = -a\sin(ax),\ (\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b))$$
$$f''(x) = (f'(x))' \text{ (2. Ableitung)}$$
$$f'''(x) = (f''(x))' \text{ (3. Ableitung)}$$

(a, b. c reell). Die Ableitungen können mathematisch unter verschiedenen Fragestellungen betrachtet werden: Ableitung/Steigung an einer bestimmten Stelle x_0, in einem bestimmten Punkt $P(x_0|f(x_0))$; Ermittlung von Stellen bzw. Funktionspunkten mit bestimmter Steigung, waagerechte Tangenten; Bestimmung von Tangenten und Normalen; höhere Ableitungen.

Wendepunkte

Bei einer mehrfach differenzierbaren Funktion f: $D_f \to \mathbf{R}$ ist die Krümmung eine Eigenschaft der Funktion, die man u.a. anhand der 2. Ableitung und der Wendepunkte erkennen kann. Wendepunkte x_0 einer Funktion f(x) erkennt man vermöge der Beziehungen:

$$x_0 \text{ Wendepunkt der Funktion } f(x)\text{: } f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) \neq 0 \ (*),$$

d.h. auf Grund der folgenden Vorgehensweise:

1) $f''(x) = 0$ (notwendige Bedingung) => mögliche Wendestelle x_0 (u.a.)
2) $f'''(x_0) \neq 0$ (hinreichende Bedingung) => Wendestelle x_0
3) $f(x_0)$ bestimmen => Wendepunkt $W(x_0|f(x_0))$.

Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente, d.h. es gilt:

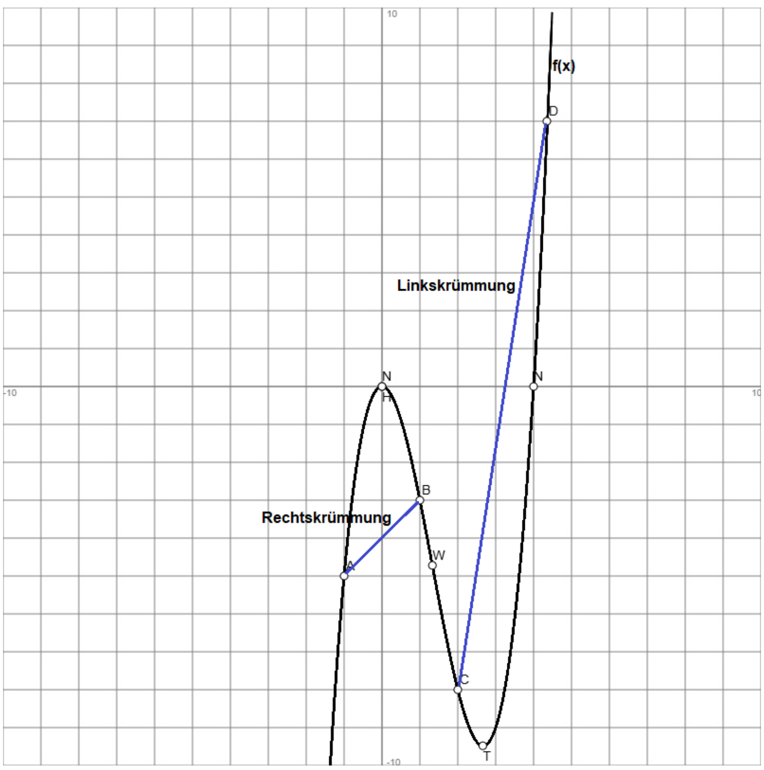
$$f'(x_0) = 0 \text{ (waagerechte Tangente)},\ f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) \neq 0 \text{ (Wendepunkt)}.$$

An den Wendepunkten ändert sich die Krümmung der Funktion f(x), d.h.: eine Links- geht in eine Rechtskrümmung über oder umgekehrt. Eine Funktion f(x) heißt links gekrümmt (konvex), wenn $f''(x) > 0$, rechts gekrümmt (konkav), wenn $f''(x) < 0$ für gewisse x. Eine Modifizierung der Beziehungen (*) ergibt zudem:

x_0 Wendepunkt der Funktion f(x) mit Übergang von einer Rechts- zur Linkskrümmung:
$$f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) > 0$$

x_0 Wendepunkt der Funktion f(x) mit Übergang von einer Links- zur Rechtskrümmung:
$$f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) < 0$$

(beim Durchlaufen der Funktion f(x) im Koordinatensystem von links nach rechts).



Wendepunkte definieren die Krümmungsintervalle der Funktion f(x), d.h. die Intervalle gleicher (Links-, Rechts-) Krümmung. Für $D_f = \mathbf{R}$ und mit $x_1 < x_2 < \dots$ als Wendepunkte von f(x) ergeben sich z.B. die Krümmungsintervalle: $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, … Liegt in einem der Krümmungsintervalle ein Hochpunkt $H(x_0|f(x_0))$ ($f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$), so ist die Funktion auf dem Intervall rechts gekrümmt, liegt dort ein Tiefpunkt $T(x_0|f(x_0))$ ($f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$), so dort links gekrümmt. Ein Intervall mit Rechtskrümmung erkennt man zudem daran, dass (in der Ausrichtung des x-y-Koordinatensystems) die Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten des Funktionsgraphen immer unterhalb des Graphen liegt (A-B); bei einem Intervall mit Linkskrümmung liegt sie oberhalb (C-D).

Beispiele:

a) Quadratische Funktionen (Parabeln) haben keine Wendepunkte.

b) Ganz rationale Funktionen 3. Grades besitzen immer genau einen Wendepunkt. Z.B. gilt für die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2$ hinsichtlich der Berechnung des Wendepunktes: 1) Bilden der Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f''(x) = 6x - 12$, $f'''(x) = 6$; 2) Nullsetzen der 2. Ableitung:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$;

3) Einsetzen von $x = x_0 = 2$ in die 3. Ableitung $f'''(x)$ ergibt: $f'''(2) = 6 \neq 0$, womit der Graph der Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ einen Wendepunkt besitzt; 4) Einsetzen von $x_0 = 2$ in die Funktionsgleichung f(x) führt auf: $f(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 = 8 - 24 = -16$, so dass mit W(2|-16) der Wendepunkt von f(x) vorliegt. Für die Krümmungsintervalle folgt: die Rechtskrümmung der Funktion f(x) auf dem Intervall $(-\infty; 2)$, die Linkskrümmung auf dem Intervall $(2; +\infty)$; beide Intervalle sind durch die Wendestelle $x_0 = 2$ voneinander getrennt.

c) Die ganz rationale Funktion 4. Grades $f(x) = x^4 - x^3$ hat mit: $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 6x$, $f'''(x) = 24x - 6$ besitzt auf Grund von:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(12x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0, 12x = 6 \Leftrightarrow x = 0, x = 0{,}5$

und wegen: $f'''(0) = -6 \neq 0$, $f'''(0{,}5) = 6 \neq 0$ die zwei Wendepunkte $W_1(0|0)$, $W_2(0{,}5|-1/16)$. Der Wendepunkt $W_1(0|0)$ ist wegen: $f'(0) = 0$ zudem ein Sattelpunkt, also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

d) Bei trigonometrischen Funktionen vom Typ $f(x) = a\cdot\sin(bx) + d$, $f(x) = a\cdot\cos(bx) + d$ sind die Wendepunkte die Punkte des Funktionsgraphen auf der Mittellinie y = d. Ist $f(x) = 2\cdot\sin(4x) + 1$, so sind wegen der Periode $p = 2\pi/4 = \pi/2$ und der Mittellinie y = 1 folgende Punkte Wendepunkte:

… $W(-\pi|1)$, $W(-3\pi/4|1)$, $W(-\pi/2|1)$, $W(-\pi/4|1)$, $W(0|1)$, $W(\pi/4|1)$, $W(\pi/2|1)$, $W(3\pi/4|1)$, $W(\pi|1)$, …

e) (Natürliche) Exponentialfunktionen vom Typ $f(x) = a\cdot e^{bx}$ besitzen keine Wendepunkte. Die Funktionen sind auf ganz **R** entweder konvex oder konkav.

f) Gegeben sei die Funktion $f(x) = x\cdot e^x$. Die 1. bis 3. Ableitung lauten gemäß der Produktregel:

$f(x) = x\cdot e^x \Rightarrow f'(x) = (x+1)\cdot e^x \Rightarrow f''(x) = (x+2)\cdot e^x \Rightarrow f'''(x) = (x+3)\cdot e^x$.

Mit:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

und $f'''(-2) = (-2+3)\cdot e^{-2} \neq 0$ folgt als einziger Wendepunkt der Funktion: $W(-2|-2/e^2)$.

Wendetangenten

Zu einer Funktion f(x) und einer Stelle $x_0 \in D_f$ lässt sich im Falle der Differenzierbarkeit die Tangente t der Funktion f(x) an der Stelle x_0 bestimmen als:

$$\text{t: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

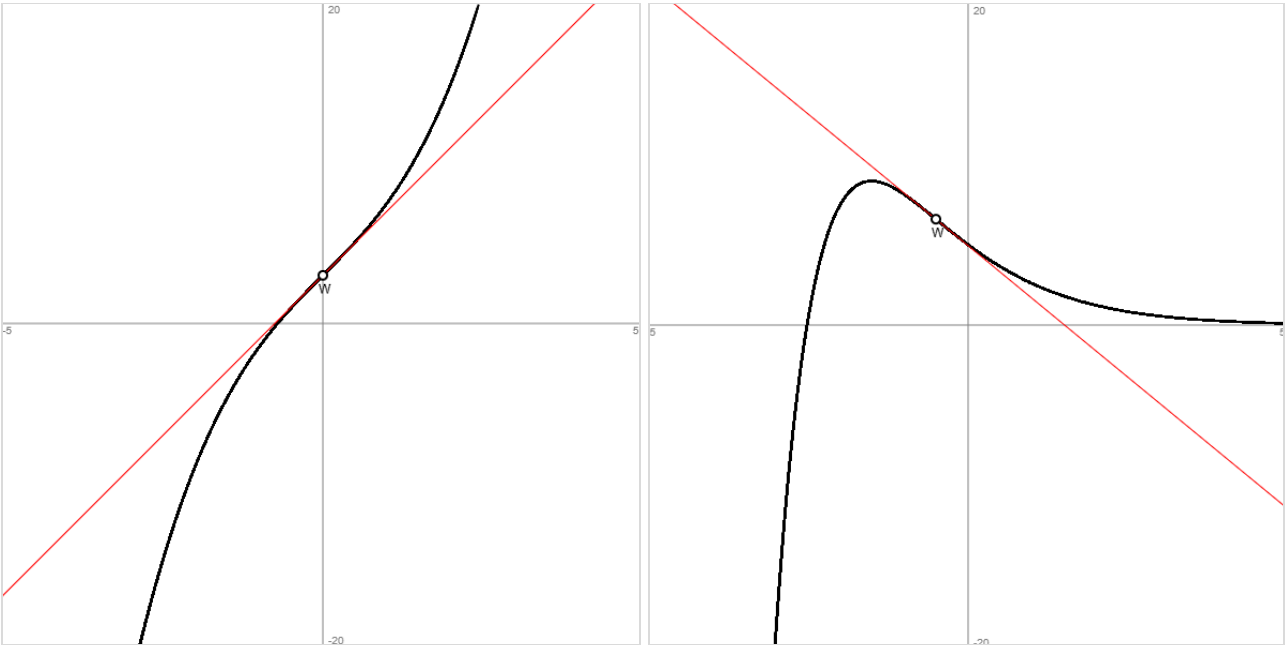
Eine Tangente in einem Wendepunkt $W(x_0|f(x_0))$ heißt Wendetangente, sie schneidet (berührend) die Funktion f(x) und teilt den Graphen (in der Umgebung von x_0) in einen links- und rechtsgekrümmten Teil.

Beispiele:

a) Im Wende- und Sattelpunkt W(0|0) der Potenzfunktion $f(x) = x^3$ ist die Wendetangente die waagerechte Tangente $y = 0$.

b) Die ganz rationale Funktion $f(x) = 0{,}5x^3 + 4x + 3$ mit: $f'(x) = 1{,}5x^2 + 4$, $f''(x) = 3x$, $f'''(x) = 3$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ den Wendepunkt W(0|3) ($f''(0) = 0$, $f'''(0) \neq 0$). Die Gleichung der Wendetangente folgt aus $f(0) = 3$ und $f'(0) = 4$ als:

t: $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 4(x-0) + 3 = 4x + 3$.



b) Die Funktion $f(x) = (2x+5)\cdot e^{-x}$ besitzt den einzigen Wendepunkt $W(-0{,}5|4\sqrt{e})$. Die Wendetangente ermittelt sich mit dem Ansatz t: $y = mx + c$, wobei sich mit $f'(x) = (-2x-3)\cdot e^{-x}$, Tangentensteigung $m = f'(-0{,}5) = -2\sqrt{e}$ und y-Achsenabschnitt $4\sqrt{e} = -2\cdot(-0{,}5)\sqrt{e} + c \Leftrightarrow c = 3\sqrt{e}$ als Tangentengleichung t: $y = -2x\sqrt{e} + 3\sqrt{e}$ ergibt.

Krümmungskreise

Die Krümmung k einer Funktion f(x) an einer Stelle $x_0 \varepsilon D_f$ lässt sich definieren als:

$$k = \frac{|f''(x_0)|}{(1+(f'(x_0))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Zahl $k \geq 0$ gibt also das Maß der Krümmung einer Funktion f(x) in einem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ an. Wendepunkte $W(x_0|f(x_0))$ haben wegen $f''(x_0) = 0$ die Krümmung $k = 0$. Für den Krümmungskreis ist das Maß der Krümmung insofern von Bedeutung, dass der Radius r des Krümmungskreises der Kehrwert der Krümmung ist, also $r = 1/k$ bei $k > 0$ (Wendepunkte haben also einen „Krümmungskreis" mit unendlichem „Radius"). Es gilt damit:

$$r = \frac{1}{k} = \frac{(1+(f'(x_0))^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}.$$

Der Krümmungskreis bestimmt sich durch Radius r und Kreismittelpunkt $M(x_M|y_M)$, wobei sich die Koordinaten des Kreismittelpunkts M errechnen aus:

$$x_M = x_0 - \frac{f'(x_0)(1+(f'(x_0))^2)}{f''(x_0)},\quad y_M = f(x_0) + \frac{1+(f'(x_0))^2}{f''(x_0)}.$$

Der Mittelpunkt M des Krümmungskreises liegt dann auf der Normalen an die Funktion f(x) durch den Punkt $P(x_0|f(x_0))$ (bei $f'(x_0) \neq 0$). Bildet man für jedes $x_0 \varepsilon D_f$ den Krümmungskreis,

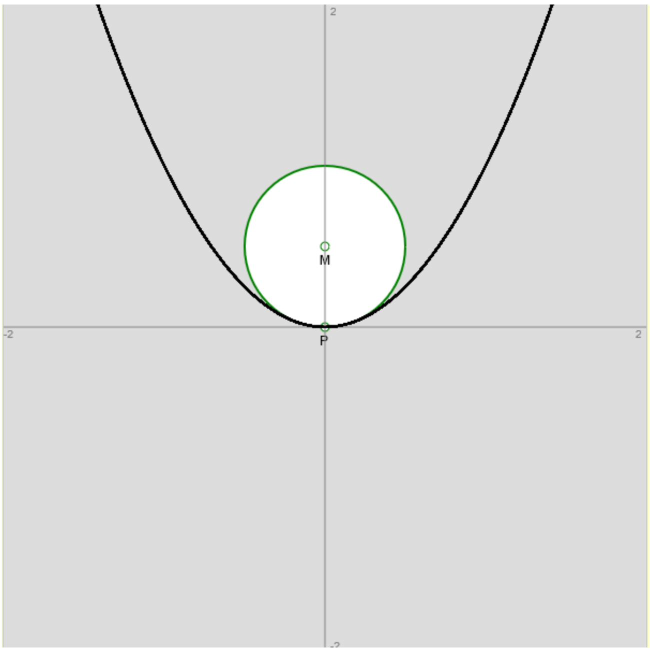
so liegen alle Krümmungskreismittelpunkte auf einer Kurve, die Evolute heißt, die Funktion f(x) ist die Evolvente der Evolute.
Der Krümmungskreis selbst lässt sich mit Radius r und Kreismittelpunkt $M(x_M|y_M)$ darstellen als:

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2 \Leftrightarrow y=y_M \pm\sqrt{r^2-(x-x_M)^2}\ .$$

<u>Beispiele</u>:

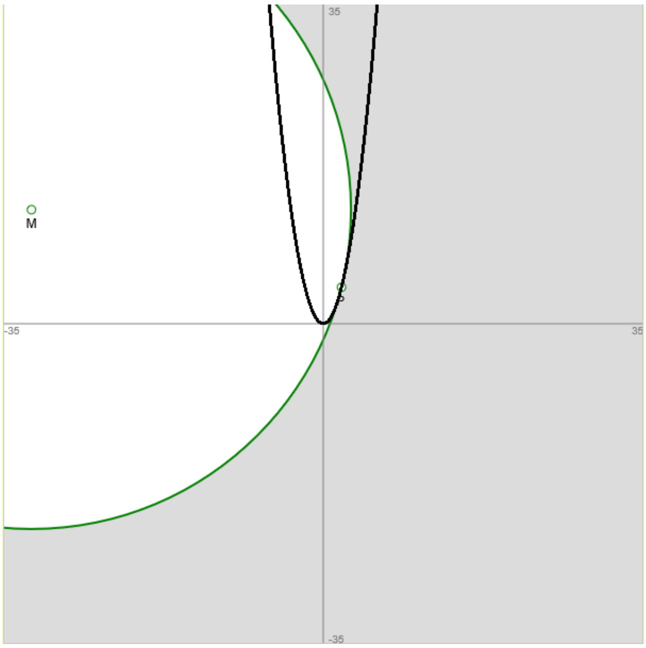
a) Für $f(x) = x^2$ (Normalparabel) ergeben sich an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_0 = 2$:

Funktion, Punkt: $f(x) = x^2$, P(0|0)



Krümmung, Radius, Mittelpunkt: k = 2, r = 0,5, M(0|0,5) -> Kreis: $x^2 + (y-0,5)^2 = 0,25$

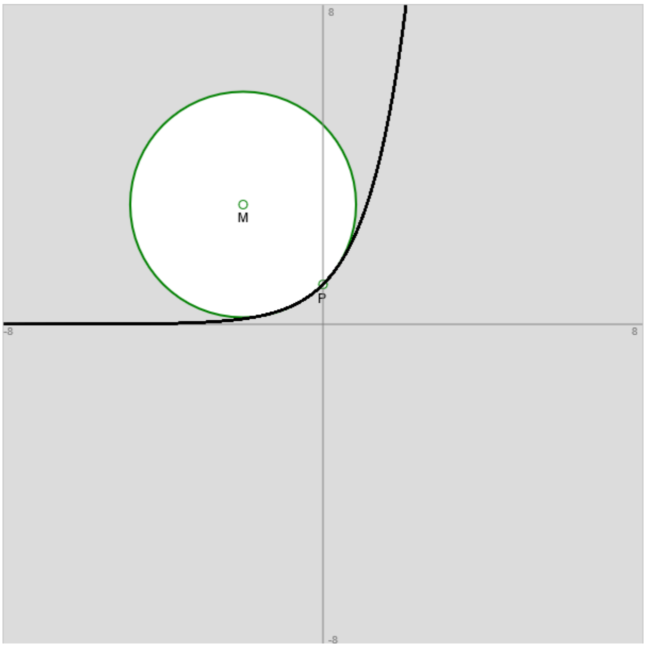
Funktion, Punkt: $f(x) = x^2$, P(2|4)



Krümmung, Radius, Mittelpunkt: k = 0,0285, r = 35,0464, M(-32|12,5) -> Kreis: $(x+32)^2 + (y-12,5)^2 = 1228,25$

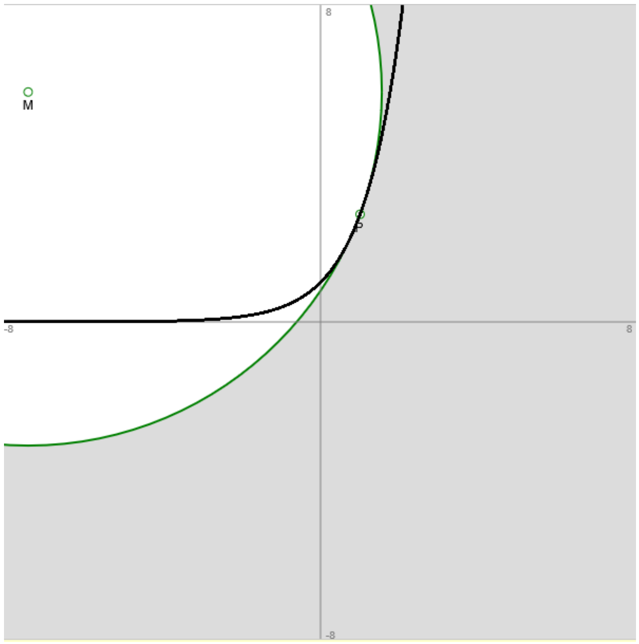
b) Für $f(x) = e^x$ stellen sich die Krümmungskreise an $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$ dar als:

Funktion, Punkt: $f(x) = e^x$, P(0|1)



Krümmung, Radius, Mittelpunkt: k = 1/√8, r = √8, M(-2|3) -> Kreis: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8$

Funktion, Punkt: $f(x) = e^x$, P(1|e)



Krümmung, Radius, Mittelpunkt: k = 0,112, r = 8.939, M(-7,389|5,805) -> Kreis: $(x+7,389)^2 + (y-5,805)^2 = 79,906$

Differentiation und Integration: NEW-Regel

Bzgl. der Null-, Extrem- und Wendestellen sowie der Monotonie und Krümmung ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen Funktionen f(x), Ableitungen f'(x), f''(x) und Stammfunktionen F(x) und bei asymptotischem Verhalten:

Stammfunktion F(x)	**Funktion f(x)**
Hochpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von + nach -
Tiefpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von - nach +
steigende Monotonie in x	$f(x) \geq 0$
fallende Monotonie in x	$f(x) \leq 0$
Wendestelle bei x_W	Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Wendestelle als Sattelpunkt bei x_W	(doppelte) Nullstelle bei x_W Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Linkskrümmung in x	steigende Monotonie in x
Rechtskrümmung in x	fallende Monotonie in x
$x \to \pm\infty$: $F(x) \to ax + C$	$x \to \pm\infty$: $f(x) \to a$
$x \to \pm\infty$: $F(x) \to C$	$x \to \pm\infty$: $f(x) \to 0$

Funktion f(x)	**Ableitung f'(x)**
Hochpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von + nach -
Tiefpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von - nach +
steigende Monotonie in x	$f'(x) \geq 0$
fallende Monotonie in x	$f'(x) \leq 0$
Wendestelle bei x_W	Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Wendestelle als Sattelpunkt bei x_W	(doppelte) Nullstelle bei x_W Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Linkskrümmung in x	steigende Monotonie in x, $[f''(x) \geq 0]$
Rechtskrümmung in x	fallende Monotonie in x, $[f''(x) \leq 0]$
$x \to \pm\infty$: $f(x) \to ax + C$	$x \to \pm\infty$: $f'(x) \to a$
$x \to \pm\infty$: $f(x) \to C$	$x \to \pm\infty$: $f'(x) \to 0$

Es gilt also im Allgemeinen beim Ableiten:

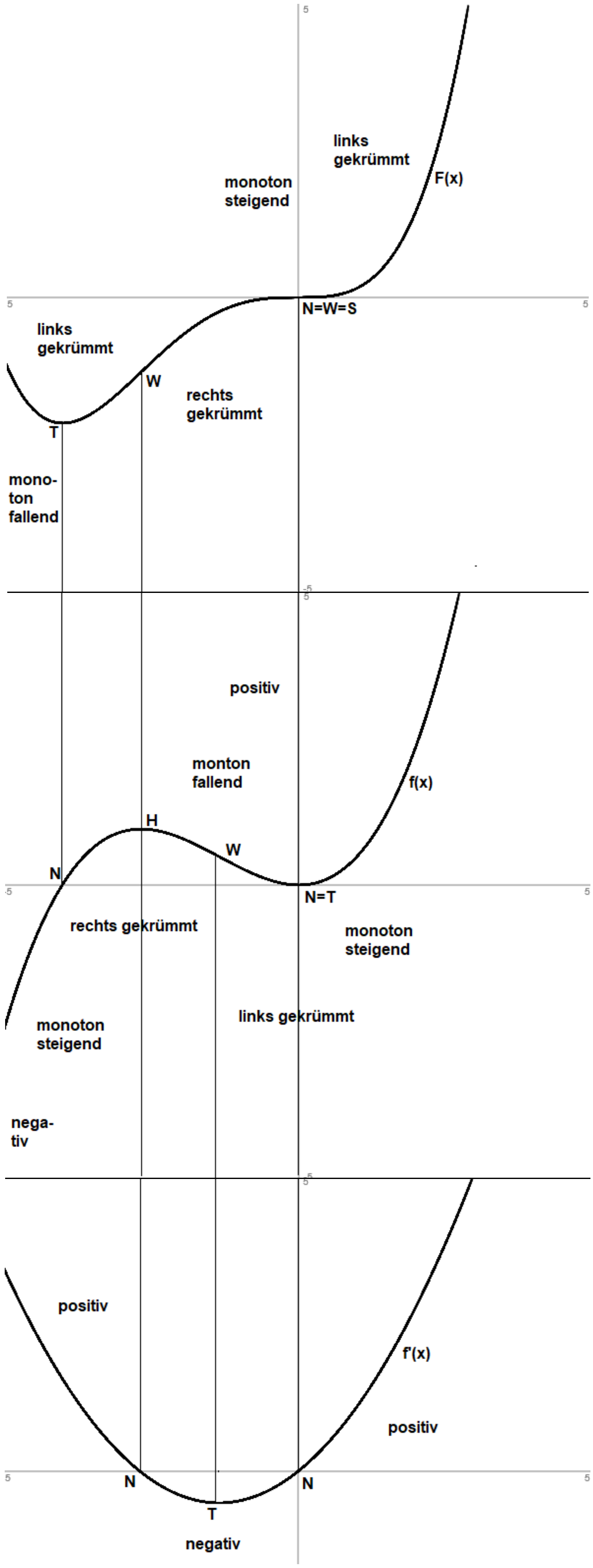
$$Wendestelle \xrightarrow{'} Extremstelle \xrightarrow{'} Nullstelle,$$

beim Aufleiten:

$$Nullstelle \xrightarrow{\int} Extremstelle \xrightarrow{\int} Wendestelle$$

oder die NEW-Regel:

F(x)   N E W
f(x)   N E W
f'(x)   N E W



H = Hochpunkt, N = Nullstelle, S = Sattelpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt

Aufleiten/Integrieren ist das mathematische Gegenteil vom Ableiten/Differenzieren, die Stammfunktion F(x) diejenige Funktion, die abgeleitet die Funktion F'(x) = f(x) ergibt. Zur Bestimmung von Stammfunktionen bzw. unbestimmten Integralen $\int f(x)dx$ werden Integrationsregeln benötigt:

$$\int (cf(x))dx = c\int f(x)dx \text{ (konstanter Faktor)}$$

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \text{ (Summenregel)}$$

$$\int dx = \int 1dx = x\,,\ \int rdx = rx\,,\ \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,,\ \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{a}(ax+b)^{n+1}\,,\ \int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$$

$$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)\,,\ \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$$

(a, b. c reell). Ableiten und Aufleiten ergänzen sich dann im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Von einer Funktion f(x) integrierte Stammfunktionen F(x) ergeben abgeleitet als F'(x) = f(x) wieder die Funktion f(x). Der Hauptsatz spiegelt sich nicht zuletzt wieder in der NEW-Regel.

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 11.2024