Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Folgen > Näherung für Quadratwurzeln

Theon von Smyrna

Theon von Smyrna ist bekannt durch sein Werk „Mathematik für die Platonlektüre". Dort nennt der Autor eine Reihe antiker Mathematiker auch – so ist zu anzunehmen – aus seiner Lebenszeit. Zudem kann aus der frühen Regierungszeit des römischen Kaisers Hadrian (117-138) eine antike Büste herangezogen werden, die Theon als Philosophen darstellt. Smyrna (heute: Izmir) war zu dieser Zeit ein Zentrum antiker Bildung, Theon könnte dort im 1. Drittel des 2. Jahrhunderts n.Chr. platonische Philosophie und antike Mathematik gelehrt haben. Überliefert ist von Theon nur das auf Altgriechisch niedergeschriebene Werk „Mathematik für die Platonlektüre". Es enthält Einlassungen zur Arithmetik (mit Geometrie und Stereometrie), zur mathematischen Musiktheorie und zur Astronomie. Im Arithmetikteil nennt Theon ein Verfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel √2, „Theons Leiter". Weiter verweist er auf seinen nicht erhaltenen Kommentar zur *Politeia* des Platon (*428/27-†348/47 v.Chr.). Ob zudem eine Auflistung von Werken Platons aus der Hand Theons stammt, ist unklar.

Folgen

Eine Abbildung $\{a_n\}$: **N** -> **R**, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: $n \to a_n$ oder $\{a_n\}_{n\varepsilon\mathbf{N}}$, a_n das n-te Folgenglied. Mit a_n = f(n) definiert f die Funktionsvorschrift der Folge. $\{a_n\}_{n\varepsilon\mathbf{N}} = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n, a_{n+1}, \dots\}$ heißt also eine Folge. Nun gilt:

a) $\{c\cdot a_n\}$, $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n\cdot b_n\}$, $\{a_n/b_n\}$ usw. sind Folgen, soweit definiert.
b) $\{a_n\}$ heißt <u>nach unten beschränkt</u>, wenn es eine <u>untere Schranke</u> $S_u\varepsilon\mathbf{R}$ gibt mit: $a_n \geq S_u$ ($n\varepsilon\mathbf{N}$).
c) $\{a_n\}$ heißt <u>nach oben beschränkt</u>, wenn es eine <u>obere Schranke</u> $S_o\varepsilon\mathbf{R}$ gibt mit: $a_n \leq S_o$ ($n\varepsilon\mathbf{N}$).
d) $\{a_n\}$ heißt <u>beschränkt</u>, wenn $\{a_n\}$ nach oben und nach unten beschränkt ist, d.h.: es gibt eine untere Schranke $S_u\varepsilon\mathbf{R}$ und eine obere Schranke $S_o\varepsilon\mathbf{R}$ mit: $S_u \leq a_n \leq S_o$ ($n\varepsilon\mathbf{N}$).
e) $\{a_n\}$ heißt <u>monoton fallend</u>, falls: $a_n \geq a_{n+1}$ ($n\varepsilon\mathbf{N}$).
f) $\{a_n\}$ heißt <u>monoton steigend</u>, falls: $a_n \leq a_{n+1}$ ($n\varepsilon\mathbf{N}$).
g) $\{a_n\}$ heißt <u>konvergent</u>, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g, wenn (für jedes ε>0) in jeder noch so kleinen (ε-) Umgebung um g (dem offenen Intervall (g-ε, g+ε)) ab einem gewissen n (= n(ε)) alle Folgenglieder liegen. Dann gilt: $g = \lim_{n \to \infty} a_n$.

h) Satz (von Bolzano-Weierstraß): Jede beschrankte, monotone Folge $\{a_n\}$ besitzt einen Grenzwert $g = \lim_{n \to \infty} a_n$.

Folgen $\{a_n\}_{n\varepsilon\mathbf{N}}$, bei denen sich Folgenglieder auf vorhergehende Folgenglieder beziehen, heißen rekursiv und lassen sich mit Hilfe einer Funktion f darstellen als: $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$ mit vorgegebenem $a_1, a_2, \dots a_k$ (rekursive Folge k-ter Ordnung), $a_n = f(a_{n-1})$ mit vorgegebenem a_1 (rekursive Folge 1. Ordnung).

Bestimmung von √2

„Theons Leiter" zur Bestimmung der Quadratwurzel √2 ist ein Verfahren mit zwei rekursiven Folgen s_n („Seite") und d_n („Diagonale") der „Sprosse" n mit „Grundlage" $s_0 = 1$, $d_0 = 1$ und den Bildungsgesetzen:

$$s_n = s_{n-1} + d_{n-1},\ d_n = 2s_{n-1} + d_{n-1}\ (*).$$

Der Quotient der Folgenglieder gleicher „Sprosse“ d_n/s_n konvergiert dann gegen $\sqrt{2}$ gemäß:

Schritt n =	**Seite** $s_n = s_{n-1}+d_{n-1}$ =	**Diagonale** $d_n = 2*s_{n-1}+d_{n-1}$ =	**Quotient** d_n/s_n =
0	1	1	1
1	2	3	1.5
2	5	7	1.4
3	12	17	1.4166666666666667
4	29	41	1.4137931034482758
5	70	99	1.4142857142857144
6	169	239	1.4142011834319526
7	408	577	1.4142156862745099
8	985	1393	1.4142131979695431
9	2378	3363	1.4142136248948696
10	5741	8119	1.4142135516460548
11	13860	19601	1.4142135642135643
12	33461	47321	1.4142135620573204
13	80782	114243	1.4142135624272734
14	195025	275807	1.4142135623637995
15	470832	665857	1.4142135623746899
16	1136689	1607521	1.4142135623728214
17	2744210	3880899	1.414213562373142
18	6625109	9369319	1.414213562373087
19	15994428	22619537	1.4142135623730965
20	38613965	54608393	1.4142135623730947
21	93222358	131836323	1.4142135623730951
22	225058681	318281039	1.4142135623730951

Ergebnis: $\sqrt{2}$ = 1.4142135623730951.

Das Verfahren konvergiert unabhängig von den Anfangswerten s_0, d_0 als natürliche Zahlen gegen die Quadratwurzel:

Schritt n =	**Seite** $s_n = s_{n-1}+d_{n-1}$ =	**Diagonale** $d_n = 2*s_{n-1}+d_{n-1}$ =	**Quotient** d_n/s_n =
0	114	27	0.23684210526315788
1	141	255	1.8085106382978724
2	396	537	1.356060606060606
3	933	1329	1.4244372990353698
4	2262	3195	1.4124668435013263
5	5457	7719	1.4145134689389776
6	13176	18633	1.4141621129326047
7	31809	44985	1.4142223898896538
8	76794	108603	1.4142120478162357

9	185397	262191	1.4142138222301333
10	447588	632985	1.4142135177886808
11	1080573	1528161	1.4142135700225713
12	2608734	3689307	1.4142135610606523
13	6298041	8906775	1.4142135625982746
14	15204816	21502857	1.4142135623344603
15	36707673	51912489	1.4142135623797236
16	88620162	125327835	1.4142135623719578
17	213947997	302568159	1.41421356237329
18	516516156	730464153	1.4142135623730616
19	1246980309	1763496465	1.4142135623731007
20	3010476774	4257457083	1.414213562373094
21	7267933857	10278410631	1.4142135623730951
22	17546344488	24814278345	1.414213562373095
23	42360622833	59906967321	1.4142135623730951
24	102267590154	144628212987	1.4142135623730951

Ergebnis: √2 = 1.4142135623730951.

Bestimmung von √a, a>1

„Theons Leiter" kann verallgemeinert werden vermöge der Iteration:

$$a>1 \text{ reell}$$
$$s_0,\ d_0 \text{ als natürliche Zahlen}$$
$$s_n = s_{n-1} + d_{n-1},\ d_n = as_{n-1} + d_{n-1}\ (**),$$

so dass der Quotient d_n/s_n gegen √a konvergiert. Es gilt z.B. zur Bestimmung der Zahl √7:

Schritt n =	**Seite** $s_n = s_{n-1}+d_{n-1}$ =	**Diagonale** $d_n = 7*s_{n-1}+d_{n-1}$ =	**Quotient** d_n/s_n =
0	1	1	1
1	2	8	4
2	10	22	2.2
3	32	92	2.875
4	124	316	2.5483870967741935
5	440	1184	2.690909090909091
6	1624	4264	2.625615763546798
7	5888	15632	2.654891304347826
8	21520	56848	2.641635687732342
9	78368	207488	2.647611269906084
10	285856	756064	2.644912123586701
11	1041920	2757056	2.646130221130221
12	3798976	10050496	2.6455802826867028
13	13849472	36643328	2.6458285196720857
14	50492800	133589632	2.6457164585841944
15	184082432	487039232	2.64576704419029

16	671121664	1775616256	2.6457442089069563
17	2446737920	6473467904	2.645754517100058
18	8920205824	23600633344	2.6457498638094203
19	32520839168	86042074112	2.645751964379322
20	118562913280	313687948288	2.6457510161477704
21	432250861568	1143628341248	2.64575144419484
22	1575879202816	4169384372224	2.6457512509674372
23	5745263575040	15200538791936	2.6457513381934215
24	20945802366976	55417383817216	2.645751298818196
25	76363186184192	202038000386048	2.6457513165928117
26	278401186570240	736580303675392	2.6457513085690616
27	1014981490245632	2685388609667072	2.6457513121911127
28	3700370099912704	9790259041386496	2.64575131055606
29	13490629141299200	35692849740775424	2.6457513112941493
30	49183478882074620	130127253729869820	2.645751310960964
31	179310732611944450	474411605904392200	2.6457513111113693
32	653722338516336600	1729586734188003300	2.645751311043474
33	2383309072704340000	6305643103802360000	2.645751311074123
34	8688952176506700000	22988806612732740000	2.6457513110602875
35	31677758789239440000	83811471848279640000	2.645751311066533
36	115489230637519080000	305555783372955700000	2.6457513110637136
37	421045014010474800000	1.1139803978355893e+21	2.6457513110649864
38	1.535025411846064e+21	4.061295495908913e+21	2.6457513110644117
39	5.596320907754977e+21	1.480647337883136e+22	2.645751311064671
40	2.0402794286586337e+22	5.39807197331162e+22	2.6457513110645543
41	7.4383514019702535e+22	1.9680027973922056e+23	2.645751311064607
42	2.711837937589231e+23	7.174848778771383e+23	2.645751311064583
43	9.886686716360613e+23	2.6157714341896e+24	2.6457513110645943
44	3.6044401058256616e+24	9.536452135642029e+24	2.6457513110645885
45	1.314089224146769e+25	3.476753287642166e+25	2.645751311064591
46	4.790842511788935e+25	1.267537785666955e+26	2.6457513110645903
47	1.7466220368458484e+26	4.621127543919209e+26	2.6457513110645907
48	6.367749580765058e+26	1.6847481801840147e+27	2.6457513110645903
49	2.3215231382605205e+27	6.142172886719556e+27	2.645751311064591
50	8.463696024980076e+27	2.23928348545432e+28	2.6457513110645907
51	3.0856530879523275e+28	8.163870702940373e+28	2.6457513110645907

<u>Ergebnis</u>: $\sqrt{7}$ = 2.6457513110645907.

Mit Hilfe der für $s_0 = 1$, $d_0 = 1$ gültigen Identitäten

$$d_n + s_n\sqrt{a} = (1+\sqrt{a})^{n+1},\ \ d_n - s_n\sqrt{a} = (1-\sqrt{a})^{n+1} \quad (***)$$

und der daraus folgenden Abschätzung:

$$\left|\frac{d_n}{s_n}-\sqrt{a}\right| < \max\left(1, \sqrt{a}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{n+1}$$

lässt sich zeigen, dass die beschränkte, aber nicht monotone Folge d_n/s_n konvergiert, und zwar offensichtlich mit Grenzwert g = √a. Der Grenzwert $\lim\limits_{n->\infty}\frac{d_n}{s_n}$ = g = √a ermittelt sich auch auf Grund der folgenden Überlegungen gemäß (**):

$s_n = s_{n-1} + d_{n-1}$, $d_n = as_{n-1} + d_{n-1}$ =>

$$\frac{d_n}{s_n} = \frac{as_{n-1}+d_{n-1}}{s_{n-1}+d_{n-1}} = \frac{a+\frac{d_{n-1}}{s_{n-1}}}{1+\frac{d_{n-1}}{s_{n-1}}} \quad =>$$

$$\lim_{n->\infty}\frac{d_n}{s_n} = \frac{a+\lim\limits_{n->\infty}\frac{d_{n-1}}{s_{n-1}}}{1+\lim\limits_{n->\infty}\frac{d_{n-1}}{s_{n-1}}} \quad =>$$

$g = \frac{a+g}{1+g}$	$\mid \cdot(1+g)$
(1+g)g = a + g	(Klammer auflösen)
$g^2 + g = a + g$	$\mid$ -g
$g^2 = a$	$\mid$ √
g = √a	

Ein Beweis für „Theons Leiter“ fehlt übrigens bei Theon von Smyrna, er gibt in seiner Schrift nur die Iterationsvorschrift als „Rezept“ zur Bestimmung der Zahl √2 an.
Auf Grund von (***) folgen noch die Identitäten:

$$s_{2n} = 2s_nd_n,\ d_{2n} = as_n^2+d_n^2.$$

Aus diesen Beziehungen ergeben sich schneller Näherungen für die Quadratwurzeln √a. Weiter folgt:

$$\frac{d_{2n}}{s_{2n}} = \frac{as_n^2+d_n^2}{2s_nd_n} = \frac{as_n^2}{2s_nd_n} + \frac{d_n^2}{2s_nd_n} = \frac{as_n}{2d_n} + \frac{d_n}{2s_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{as_n}{d_n} + \frac{d_n}{s_n}\right),$$

so dass mit $x_k = \frac{d_{2^k n}}{s_{2^k n}}$ das Heron-Verfahren zur Quadratwurzelbestimmung als Iteration folgt:

$$x_k = \frac{1}{2}\left(x_{k-1} + \frac{a}{x_{k-1}}\right).$$

Mit „Theons Leiter“ lassen sich Näherungen von √a durch Brüche darstellen; z.B. gelten für √2 die folgenden näherungsweisen Bruchdarstellungen:

Schritt n =	**Seite** $s_n = s_{n-1}+d_{n-1}$ =	**Diagonale** $d_n = 2*s_{n-1}+d_{n-1}$ =	**Quotient** d_n/s_n =
0	1	1	1
1	2	3	3/2 = 1.5
2	5	7	7/5 = 1.4
3	12	17	17/12 = 1.4166666666666667
4	29	41	41/29 = 1.4137931034482758

5	70	99	99/70 = 1.4142857142857144
6	169	239	239/169 = 1.4142011834319526
7	408	577	577/408 = 1.4142156862745099
8	985	1393	1393/985 = 1.4142131979695431
9	2378	3363	3363/2378 = 1.4142136248948696
10	5741	8119	8119/5741 = 1.4142135516460548

Quadratwurzel: $\sqrt{2} = 1.4142135623730951$.

Literatur: GIBERSON, S., OSLER, T.J., Extending Theon's Ladder to Any Square Root, in: The College Mathematics Journal 35 (2004), S.222-226; https://de.wikipedia.org/wiki/Theon_von_Smyrna (Theon von Smyrna); Theon von Smyrna, Mathematik für die Platonlektüre. Altgriechisch/Deutsch, hg. v. K. BRODERSEN (= Edition Antike), Darmstadt 2021.

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 08.2021