Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > kompakt

<u>Potenzgesetze</u>: $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$,

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $1^n = 1$; $e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^n \cdot e^m = e^{n+m}$, $\frac{e^n}{e^m} = e^{n-m}$, $\frac{1}{e^n} = e^{-n}$, $(e^n)^m = e^{n \cdot m}$

<u>Logarithmengesetze</u>: $\ln 1 = 0$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, $\ln(a^r) = r \cdot \ln a$, $\ln e^x = x$,

$e^{\ln x} = x$ (e = Eulersche Zahl, ln = $\log_e$ mit: $e^{-\infty} = 0$, $e^{\infty} = \infty$, ln0 = -∞, ln(∞) = ∞)

<u>Sinus, Cosinus, Tangens</u>: $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$;

$\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$,

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

<u>Gleichungen</u>: $ax + b = c \Leftrightarrow x = \frac{c-b}{a}$ (linear); $x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$,

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (quadratisch); $ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow x(ax^2 + bx + c) = 0$

(Ausklammern, Polynomdivision); $ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow az^2 + bz + c = 0$ (biquadratisch, Substitution: $z=x^2$);

$e^x = c \Leftrightarrow x = \ln c$ (exponential); $\sin x = c \Leftrightarrow x_{1,2} = \sin^{-1}(c) + 2k\pi$ u.ä. ($k \varepsilon \mathbf{Z}$, trigonometrisch)

<u>Funktionen</u>: f: D_f -> **R**, f(x): Polynome, gebrochen rational, sin, cos, tan, e-, ln-
<u>Funktionenscharen</u>: $f_t(x)$: Parameter t [Im Folgenden auch: $f(x) = f_t(x)$.]

<u>Geraden</u> ($P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$): y = mx+c; $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (Zweipunkteform); $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$ (Punktsteigungsform)

<u>Parabeln</u>: $f(x) = ax^n$ (n gerade, ungerade)

<u>Hyperbeln</u>: $f(x) = ax^{-n} = \frac{a}{x^n}$ (n gerade, ungerade)

<u>Ableitungen</u>: f'(x), f''(x), …

<u>Aufleitung/Stammfunktion</u>: $F(x) = \int f(x)dx + C$

<u>Ableitungsregeln</u> (Funktionen u(x), v(x)):

$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$ (Summenregel)

$(u(x) + r)' = u'(x)$ (additive Konstante)

$(ku(x))' = ku'(x)$ (multiplikative Konstante)

$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ (Produktregel)

$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$ (Quotientenregel)

$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ (Kettenregel)

$(x^n)' = nx^{n-1}$ (Potenzregel), $((ax+b)^n)' = na(ax+b)^{n-1}$,

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$,

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$,

$(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$, $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$

<u>Aufleitungsregeln</u> (Funktionen u(x), v(x)):

$\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$

$\int (ku(x))dx = k\int u(x)dx$

$I_a(x) = F(x) = \int_a^x f(t)dt$ mit: F'(x) = f(x) (Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung)

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$

$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{a}(ax+b)^{n+1}$

$\int \sin x dx = -\cos x$, $\int \cos x dx = \sin x$, $\int e^x dx = e^x$,

$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$,

$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin ax+b)$, $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}$,

$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$

<u>Vollständige Induktion</u>: $f^{(n)}(x)$, $n \varepsilon \mathbf{N}$ mit: n=1: f'(x); n=k: $f^{(k)}(x)$; n=k+1: $f^{(k+1)}(x)$; k->k+1: $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))'$

<u>Integrationskonstante</u> C: f(x), F(x) mit $F(x_0) = y_0$ -> $F_0(x)$ mit $C_0=0$ -> $C = y_0 - F_0(x_0)$, $F(x) = F_0(x) + C$

Tangente: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Normale: $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$

Tangente $P(x_1|y_1)$ an f(x), Berührpunkt $B(x_0|f(x_0))$:

$\frac{f(x_0) - y_1}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$, $y_1 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$

Bestimmtes Integral (Integrationsgrenzen a, b, c):

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, $\int_a^a f(x)dx = 0$,

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Kurvendiskussion:

I. Definitionsbereich D_f (Nenner ≠ 0, Radikand ≥ 0, Zahl im Logarithmus > 0 usw.)
II. Definitionslücke = Pol/senkrechte Asymptote (mit/ohne Vorzeichenwechsel)
III. x –> ±∞: f(x) –> ±∞ (Polynomgrad) bzw. f(x) –> a = y (waagerechte Asymptote) bzw. f(x) –> ax+b =y (schiefe Asymptote)
IV. Symmetrie: f(-x) = f(x) Achsensymmetrie, f(-x) = -f(x) Punktsymmetrie
V. Ableitungen: f'(x), f''(x), f'''(x)
VI. Nullstelle: $f(x_0) = 0$ -> $N(x_0|0)$
VII. Extremstelle: $f'(x_0) = 0$ -> Hochpunkt $H(x_0|f(x_0))$ ($f''(x_0)<0$), Tiefpunkt $T(x_0|f(x_0))$ ($f''(x_0)>0$)
VIII. Wendestelle: $f''(x_0) = 0$ -> $W(x_0|f(x_0))$ ($f'''(x_0)\neq 0$)
VIIIa. Sattelpunkt: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ -> $S(x_0|f(x_0))$ ($f'''(x_0)\neq 0$)
IX. Monotonie: steigend (f'(x)≥0), fallend (f'(x)≤0) -> Monotonieintervalle zwischen -∞, Extrema, Polstellen, +∞
X. Krümmung: links (f''(x)≥0), rechts (f''(x)≤0) -> Krümmungsintervalle zwischen -∞, Wende-stellen, Polstellen, +∞
XI. Ortskurve (Extremum, Wendepunkt von $f_t(x)$): P(u(t)|v(t)) -> x = u(t), y = v(t) -> $y = v(u^{-1}(x))$

Flächen (Funktionen f(x), g(x)):

I. Fläche zwischen Funktion und x-Achse:
x_1, x_2, … Nullstellen von f(x) ->

$A_1 = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| = \left|[F(x)]_{x_1}^{x_2}\right| = |F(x_2) - F(x_1)|$, …

-> $A = A_1 + …$

II. Fläche zwischen zwei Funktionen:
x_1, x_2, … Schnittstellen mit f(x) = g(x) ->

$A_1 = \left|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx\right| = \left|[F(x) - G(x)]_{x_1}^{x_2}\right| =$

$|F(x_2) - G(x_2) - F(x_1) + G(x_1)|$, … -> $A = A_1 + …$

III. Uneigentliches Integral:

$A(u) = \int_a^u f(x)dx = [F(x)]_a^u = F(u) - F(a) \underset{u \to \infty}{\longrightarrow} A = \int_a^\infty f(x)dx$

Keplersche Fassregel: $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$

Mittelwert: $\overline{m} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Bogenlänge: $b = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

Newton-Verfahren: Startwert x_0, Iteration

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, x_n -> x* mit f(x*) = 0

Volumen (Rotationskörper, x-Achse):

$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$ bzw. $V = \pi\int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right)dx$

f'(x) <-> f(x), f(x) <-> F(x):

f'(x)/f(x): positiv <=> f(x)/F(x): streng monoton steigend
f'(x)/f(x): negativ <=> f(x)/F(x): streng monoton fallend
f'(x)/f(x): Nullstelle x_0 mit Vorzeichenwechsel von - nach + <=> f(x)/F(x): Tiefpunkt x_0
f'(x)/f(x): Nullstelle x_0 mit Vorzeichenwechsel von + nach - <=> f(x)/F(x): Hochpunkt x_0
f'(x)/f(x): Hoch-/Tiefpunkt x_0 <=> f(x)/F(x): Wendepunkt x_0
f'(x)/f(x): Nullstelle als Hoch-/Tiefpunkt x_0 <=> f(x)/F(x): Sattelpunkt x_0
f'(x)/f(x): x->±∞: f'(x)/f(x) -> 0 <=> x->±∞: f'(x)/f(x) -> C
f'(x)/f(x): x->±∞: f'(x)/f(x) -> c <=> x->±∞: f'(x)/f(x) -> cx

f(x): doppelte Nullstelle -> Hochpunkt, Tiefpunkt; dreifache Nullstelle -> Sattelpunkt

Bestimmungsaufgabe:

I. Funktionstyp: $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + ...$; $f(x) = ce^{kt}$; $f(x) = S - ce^{-kt}$; $f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$ mit n Unbekannten a, b, …
II. Ableitungen: f'(x), f''(x)
III. n Eigenschaften: $f(x_1) = y_1$, …, $f'(x_2) = y_2$, …, $f''(x_2) = y_2$, … u.ä.
IV. (Lineares) Gleichungssystem: Lösungen a, b, ..

Extremwertaufgabe (Variable u, v):

I. Nebenbedingung: $v = g(u)$, u є [a;b]
II. Hauptbedingung: $f^*(u,v) = f^*(u, g(u)) = f(u)$
III. Maximierung, Minimierung: $f'(u) = 0$ -> u_0 als Hochpunkt $H(u_0|f(u_0))$ ($f''(u_0)<0$) bzw. als Tiefpunkt $T(u_0|f(u_0))$ ($f''(u_0)>0$)
IV. Vergleich mit den Randextrema (u=a, u=b): Maximum bzw. Minimum der Werte f(a), $f(u_0)$, f(b) als globales Maximum bzw. Minimum

Wachstum: $f'(x) = kf(x) \Rightarrow f(x) = ce^{kt}$ (exponentielles Wachstum, exponentieller Zerfall)

$f'(x) = k(S - f(x)) \Rightarrow f(x) = S - ce^{-kt}$ (beschränktes Wachstum)

f(x) Zunahme/Abnahme/Veränderung -> F(x) Bestand (allgemeines Wachstum)
f(x) Bestand -> f'(x) Zunahme/Abnahme/Veränderung (allgemeines Wachstum)