

Einleitung

Grundlage auch für die Dreiecksungleichung(en) ist der Körper der reellen Zahlen $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ mit der Addition und Multiplikation als Rechenoperationen induzierende Verknüpfungen zwischen den Elementen, der 0 als neutralem Element bzgl. der Addition, der 1 als neutralem Element bzgl. der Multiplikation, der algebraischen kommutativen Gruppen $(\mathbf{R}, +)$ und $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ (Assoziativgesetz, Gesetz der inversen Elemente, Kommutativgesetz) sowie den die Verknüpfungen verbindenden Distributivgesetzen. Auf dem Zahlbereich der reellen Zahlen lässt sich zudem vermittelt „ \leq “ eine totale Ordnung definieren, so dass im geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ reelle Zahlen miteinander vergleichbar sind (bei $-\infty < x < \infty$ für jede reelle Zahl x ; abgeschlossene, offene, halboffene Intervalle $[a; b]$, $(a; b]$, $[a; b)$, $(a; b)$ für reelle Zahlen a, b mit: $a < b$) und neben Gleichungen auch Ungleichungen algebraisch umgeformt werden können. Auch definieren der Körper der reellen Zahlen einen metrischen Raum, d.h.: der Betrag $|\cdot|$ der Differenz zweier reeller Zahlen definiert eine Metrik, die wiederum die für die reellen Zahlen typische Topologie (eines Hausdorff-Raums) induziert (Trennungsaxiom T_2). Topologie und Ordnung entsprechen dabei einander. Zudem sind die reellen Zahlen vollständig, d.h.: die Grenzwerte von Folgen reeller Zahlen sind wieder reell.

Dreiecksungleichungen

Im reellen Zahlenraum ist der (Absolut-) Betrag (als vorzeichenlose „Größe“) einer Zahl a definiert als:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Auf der reellen Zahlengerade gibt der Betrag also den Abstand der Zahl von der Zahl 0 an. Es gilt für alle reellen Zahlen a, b die sog. Dreiecksungleichung:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

und die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Beweisabfolge

Um die Dreiecksungleichungen zu beweisen, gehen wir in mehreren Schritten vor:

Schritt 1: Für eine reelle Zahl a gilt: $-|a| \leq a \leq |a|$.

Beweis: I. Wir nehmen zunächst $a \geq 0$ an, so dass $|a| = a$ gilt. Dann ist: $-|a| = -a < a = |a|$. II. Ist $a < 0$, so ist $|a| = -a$ mit: $-|a| = -(-a) = a < -a = |a|$. III. In jedem Fall ergibt sich die voranstehende Behauptung: $-|a| \leq a \leq |a|$.

Schritt 2: Für zwei reelle Zahlen a, b gilt die Äquivalenz: $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$.

Beweis: a) Wir beweisen die Hinrichtung: $|a| \leq b \Rightarrow -b \leq a \leq b$. I. Wir nehmen dazu $a \geq 0$ an, so dass $|a| = a$ gilt. Dann ist auch wegen $b \geq 0 \Leftrightarrow -b \leq 0$: $-b \leq 0 \leq a = |a| \leq b$, also: $-b \leq a \leq b$. II. Ist $a < 0$, so ist $|a| = -a$, und es gilt: $-a \leq b \Leftrightarrow a \geq -b$, so dass: $-b \leq a \leq 0 \leq -a = |a| \leq b$ erfüllt ist, also: $-b \leq a \leq b$. In jedem Fall ist: $-b \leq a \leq b$.

b) Wir beweisen die Rückrichtung: $-b \leq a \leq b \Rightarrow |a| \leq b$. I. Ist $a \geq 0$, so ist: $|a| = a$ und wegen: $a \leq b$: $|a| = a \leq b$, also: $|a| \leq b$. II. Ist $a < 0$, so ist $|a| = -a$ und damit wegen der Beziehung: $-b \leq a \Leftrightarrow b \geq -a$: $|a| = -a \leq b$, also: $|a| \leq b$. In jedem Fall ist: $|a| \leq b$.

Schritt 3: Es gilt für zwei reelle Zahlen a, b die Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Beweis: Gemäß Schritt 1 gilt für zwei reelle Zahlen a, b : $-|a| \leq a \leq |a|$, $-|b| \leq b \leq |b|$. Addition der beiden Ungleichungsketten führt auf:

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b| \Leftrightarrow -(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Nun gilt nach der Rückrichtung in Schritt 2:

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

was die Dreiecksungleichung darstellt.

Schritt 4: Für eine reelle Zahl a gilt: $|a| = |-a|$.

Beweis: Laut der Betragsdefinition ist:

$$|-a| = \begin{cases} -a & -a \geq 0 \\ -(-a) & -a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -a & a \leq 0 \\ a & a \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a \leq 0 \end{cases} = |a|.$$

Schritt 5: Es gilt für zwei reelle Zahlen a, b die umgekehrte Dreiecksungleichung: $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Beweis: Mit der Dreiecksungleichung aus Schritt 3 gilt für zwei reelle Zahlen a, b :

$$\begin{aligned} |a| &= |a-b+b| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a-b| \\ |b| &= |a+b-a| = |a+(b-a)| \leq |a| + |b-a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |b-a| \end{aligned}$$

mit: $|b-a| = |a-b|$ gemäß Schritt 4. Es gilt damit:

$$|a| - |b| \leq |a-b|, |b| - |a| \leq |a-b|.$$

oder nach der Multiplikation der 2. Ungleichung mit -1 :

$$|a| - |b| \leq |a-b|, |a| - |b| \geq -|a-b| \Leftrightarrow -|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|.$$

Die letzte Ungleichungskette ist nach der Rückrichtung in Schritt 2 aber gleichbedeutend mit:

$$||a| - |b|| \leq |a-b|.$$

Es gilt damit die umgekehrte Dreiecksungleichung.

Folgerungen

Die Dreiecksungleichung gilt für zwei Summanden a, b und daher – etwa beweisbar über vollständige Induktion – auch für eine endliche Summe reeller Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n , n als natürliche Zahl:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

In der reellen Analysis führen Summationen bekanntlich auch auf Integrale und daher gilt für eine integrierbare Funktion $f: [x_1; x_2] \rightarrow \mathbf{R}$ mit: $f: x \rightarrow f(x)$ entsprechend:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx.$$

Wie oben gesagt, induziert der Absolutbetrag als Norm $|\cdot|$ mit Definitheit ($|x|=0 \Rightarrow x=0$), Homogenität ($|rx|=|r||x|$) und Subadditivität (Dreiecksungleichung: $|x+y| \leq |x|+|y|$) vermöge $|a-b| = d(a,b)$ auf den reellen Zahlen eine Metrik mit positiver Definitheit ($d(a,b) \geq 0$, $d(a,b)=0 \Leftrightarrow a=b$), Symmetrie ($d(a,b) = d(b,a)$) und Dreiecksungleichung ($d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$) für reelle a, b, c, r, x, y .

Literaturhinweise: dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München ³2003, S.37 (absoluter Betrag); Wikipedia. Die freie Enzyklopädie: <https://de.wikipedia.org/wiki/Dreiecksungleichung> (Dreiecksungleichung).