Michael Buhlmann

Mathematik > Beweisverfahren > Vollständige Induktion: Bernoulli-Ungleichung

<u>Jakob Bernoulli</u>

Der Schweizer Jakob Bernoulli (*1654/55-†1705) war ein Sohn des Basler Kaufmanns Niklaus Bernoulli (*1623-†1708) und der erste von acht meist bedeutenden Mathematikern der Familie (Nikolaus Bernoulli [Bruder Jakobs, *1662–†1716]; Nikolaus Bernoulli [Sohn Nikolaus', *1687–†1759; Petersburger Paradoxon]; Johann Bernoulli [Bruder Jakobs, *1667–†1748; Regeln von de l'Hospital]; Nikolaus Bernoulli [Sohn Johanns, *1695–†1726]; Daniel Bernoulli [Sohn Johanns, *1700-†1782; Bernoulli-Gleichung, Bernoulli-Prinzip]; Johann Bernoulli [Sohn Johanns, *1710-†1790]; Daniel Bernoulli [Sohn des letztgenannten Johann, *1751-†1834]). Die Bernoullis stammten ursprünglich wohl aus den protestantischen Niederlanden und ließen sich – über Frankfurt a.M. – um 1620 in Basel nieder. Auch im 19. und 20. Jahrhundert kamen aus der Familie Bernoulli Wissenschaftler und Architekten, die Fotografin Maria Bernoulli (*1868-†1963) war in erster Ehe mit dem deutschen Schriftsteller Hermann Hesse (*1877-1962) verheiratet.
Jakob Bernoulli studierte an der Basler Universität Philosophie und Theologie (Abschlüsse 1671 bzw. 1676), begann sich aber recht bald auch für Mathematik und Astronomie zu interessieren. Dem Studium folgten Anstellungen Jakobs als Hauslehrer (in Genf) und eine Bildungsreise durch die Niederlande, England und Deutschland (1681/82), die sein Wissen um die Mathematik und den Kontakt zu Mathematikern intensivierte. Nach Basel zurückgekehrt, hielt Jakob Bernoulli Physikvorlesungen an der dortigen Universität und arbeitete sich immer mehr in mathematische Themen ein (Isaac Barrow, René Descartes, Gottfried Wilhelm Leibniz, John Wallis). Zusammen mit seinem Bruder Johann Bernoulli brachte er die Infinitesimalrechnung Leibniz' weiter, er formulierte das Beweisverfahren der vollständigen Induktion (über die Menge der natürlichen Zahlen) und bewies damit die Bernoulli-Ungleichung, er untersuchte Potenzreihen (Bernoulli-Zahlen) und gab die „Geometrie" Descartes' neu heraus. Auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung führte er die Arbeiten früherer Mathematiker fort (Bernoulli-Verteilung, schwaches Gesetz der großen Zahlen). Zwischen 1689 und 1704 veröffentlichte Bernoulli demgemäß eine Reihe von mathematischen Beiträgen u.a. in den *Acta Eruditorum*. 1713 – postum – kamen die *Ars Conjectandi* heraus, die u.a. Wahrscheinlichkeitstheorie und Aussagen zum Glücksspiel enthält. 1699 wurde Bernoulli Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Paris, 1702 der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin. Am 16. August 1705 starb Jakob Bernoulli in Basel. Als Lehrstuhlinhaber an der Basler Universität folgte ihm sein Bruder Johann Bernoulli nach.

<u>Vollständige Induktion</u>

Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen $n\varepsilon\mathbf{N}$ die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein $n=k_0\,\varepsilon\mathbf{N}$ (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;

4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen nε**N**.

Bernoulli-Ungleichung

Die von Jakob Bernoulli in den *Positiones Arithmeticae de Seriebus Infinitis* (Basel 1689) veröffentlichte Bernoulli-Ungleichung (Bernoullische Ungleichung) ist eine Aussage über reelle und natürliche Zahlen (**R**, **N**). Und zwar behauptet die Bernoullische Ungleichung die Gültigkeit der folgenden mathematischen Aussage bzw. Behauptung:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \text{ für alle reellen } x \geq -1 \text{ und alle } n \varepsilon \mathbf{N}.$$

Die Behauptung wird mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion nachgewiesen, d.h.:

Behauptung: $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $x \geq -1$ und alle nε**N**.
Beweis:
1) *Induktionsanfang*: n=1 mit: $(1+x)^1 = 1+x = 1+1\cdot x$ für alle $x \geq -1$ als wahre Aussage.
2) *Induktionsannahme* für n=k: $(1+x)^k \geq 1+kx$ für alle x>-1 sei eine wahre Aussage (*).
3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$ für alle $x \geq -1$, als wahr zu beweisen.
4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Wir bilden eine Ungleichungskette, in der an wichtiger Stelle die Induktionsannahme (*) einfließt sowie die Tatsache, dass $kx^2 \geq 0$ für alle $x \geq -1$ bei (positivem) kε**N** gilt. Es ergibt sich:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \overset{(*)}{\geq} (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 \overset{kx^2\geq 0}{\geq} 1+(k+1)x+0 = 1+(k+1)x.$$

Die Induktionsbehauptung erweist sich also als wahr, wenn die Induktionsannahme richtig ist.
5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=1, sondern auch für n=2, weiter für n=3 usw., mithin für alle nε**N**.

Folgerungen

Die Bernoullische Ungleichung lässt sich auf reelle Exponenten erweitern, so dass gilt:

$$(1+x)^r \geq 1+rx \text{ für alle reellen } x \geq -1 \text{ und alle reellen } r \geq 1.$$

Ebenfalls gilt die Ungleichung strikt, wenn x≠0 ist, d.h.:

$$(1+x)^n > 1+nx \text{ für alle reellen } x \geq -1,\ x \neq 0, \text{ und alle } n \varepsilon \mathbf{N}.$$

Mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung lassen sich u.a. beweisen:

a) $\lim\limits_{n->\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für a>0.

b) $e^x > 1 + x$ für alle reellen x.

c) $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ für nichtnegative reelle x_1, x_2, … x_n (Ungleichung des geometrischen und arithmetischen Mittels).

Literaturhinweise: dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. Reinhardt (= dtv 3099), München [3]2003, S.259ff (Vollständige Induktion); Wikipedia. Die freie Enzyklopädie: https://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_I._Bernoulli (Jakob Bernoulli), https://de.wikipedia.org/wiki/Bernoullische_Ungleichung (Bernoulli-Ungleichung).

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 05.2018