Michael Buhlmann

Schülerkurs

Betriebswirtschaftslehre
> Betrieblicher Absatz, betriebliche Preispolitik
> Polypol

An der Schnittstelle zwischen Wirtschaftsunternehmen und Markt (im wirtschaftswissenschaftlichen Sinn) stehen betrieblicher Absatz und betriebliche Preispolitik unter den Bedingungen von Marktformen und Verhaltensweisen der Marktteilnehmer (Anbieter, Nachfrager). Im Folgenden wird die Absatzpolitik eines Unternehmens bei vollkommener Konkurrenz (Angebots- und Nachfragepolypol) betrachtet.

Theorie

I. Einführung

I.1 Im Rahmen der betrieblichen Organisation eines (Produktions-) Unternehmens spielt der Absatz als Endpunkt des betrieblichen Prozesses, als Verwertung des im Betrieb Erstellten (Produkt) eine wichtige Rolle. Absatz ist damit Leistungsverwertung, d.h. Bereitstellung der betrieblichen Leistung für den Markt als Kontaktzone von Angebot und Nachfrage. Von Seiten des Betriebs gehören zum Absatz: Absatzplanung und -vorbereitung mit den Mitteln der Marktanalyse und Marktbeobachtung; Absatzpolitik mit Preis- und Mengenpolitik sowie dem (Produkt-) Marketing.

I.2 Beim Markt treffen Angebot (der Unternehmungen) und Nachfrage (der Haushalte) aufeinander. Menge und Preis eines Produktes bestimmen die Nachfragefunktion (Absatzkurve), die Anzahl der Anbieter und Nachfrager die Marktform. Als (eher theoretische) Marktformen betrachten die Wirtschaftswissenschaften:

- Vollkommene Konkurrenz (als Polypol auf der Anbieter- und Nachfragerseite)
- Angebotsoligopol (als Oligopol auf der Anbieter-, Polypol auf der Nachfragerseite)
- Angebotsmonopol (als Monopol auf der Anbieter-, Polypol auf der Nachfragerseite)
- Nachfrageoligopol (als Polypol auf der Anbieter-, Oligopol auf der Nachfragerseite)
- Bilaterales Oligopol (als Oligopol auf der Anbieter- und Nachfragerseite)
- Beschränktes Angebotsmonopol (als Monopol auf der Anbieter-, Oligopol auf der Nachfragerseite)
- Nachfragemonopol (als Polypol auf der Anbieter-, Monopol auf der Nachfragerseite)
- Beschränktes Nachfragemonopol (als Oligopol auf der Anbieter-, Monopol auf der Nachfragerseite)
- Bilaterales Monopol (als Monopol auf der Anbieter- und Nachfragerseite)

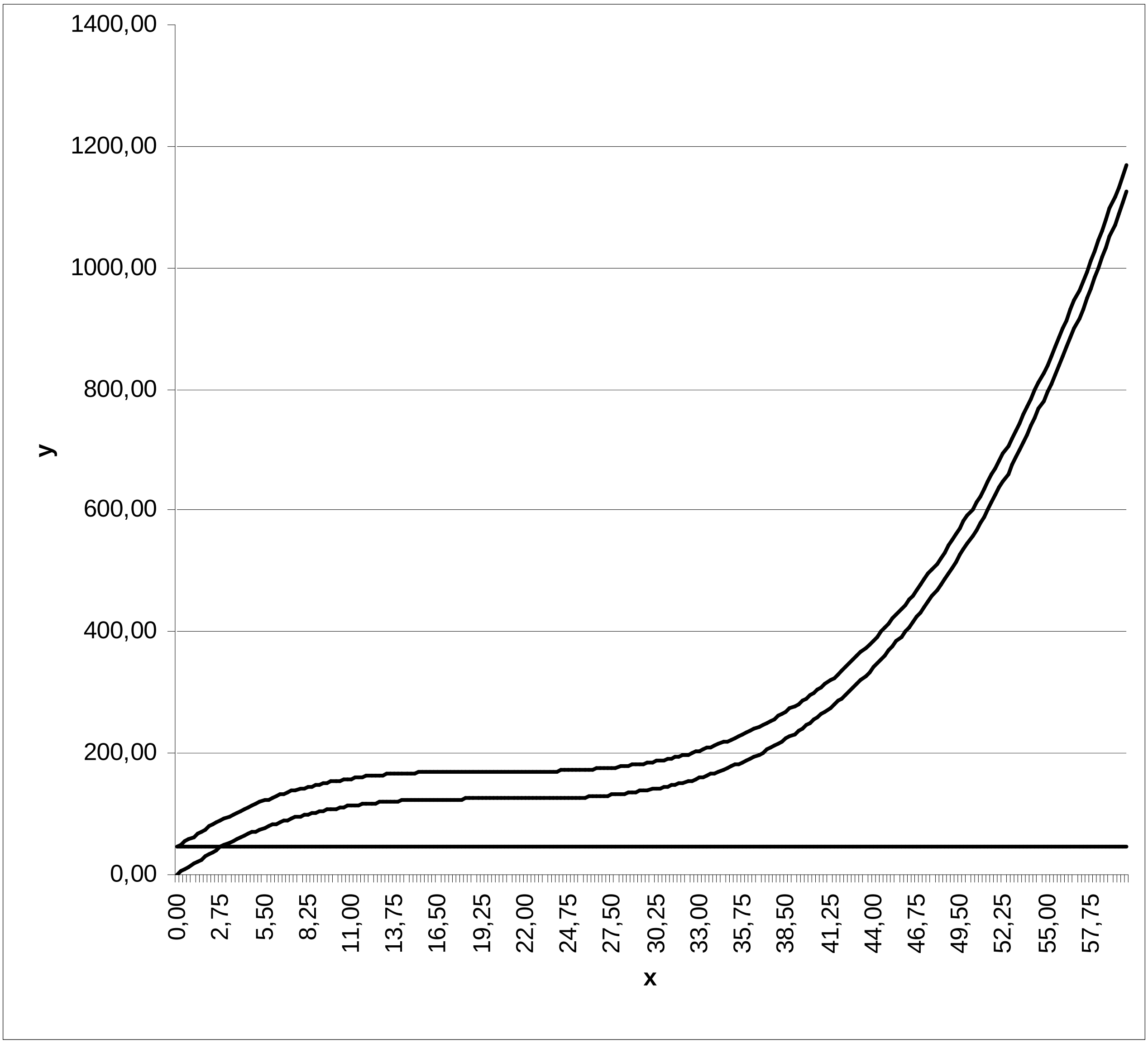
Relativ einfach erschließbar sind dann die Marktformen des Angebotsmonopols, bei dem der Anbieter Preispolitik betreibt, und der vollkommenen Konkurrenz, bei der ein Unternehmen wegen des festen Marktpreises Mengenpolitik verfolgen muss.
Im Folgenden wird die Mengenpolitik eines Unternehmens unter den Bedingungen der vollkommenen Konkurrenz, des polypolistischen Marktes betrachtet.

II. Kosten, Erlöse, Gewinne

II.1 Gesamtkosten: Ein Unternehmen produziert ein Produkt mit einer Ausbringungsmenge x pro Zeiteinheit. Dabei entstehen fixe Gesamtkosten K_{fix} und variable Stückkosten k_{var}. Als Gesamtkosten $K = K_{ges}$ ergeben sich für eine Ausbringungsmenge x:

$$\boxed{K(x) = K_{ges}(x) = K_{fix} + K_{var}(x) = K_{fix} + x \cdot k_{var}(x)}$$

Variable Gesamtkosten K_{var} sind dabei: $K_{var}(x) = x \cdot k_{var}(x)$.



Gesamtkosten K_{ges}, Fixkosten K_{fix}, Variable Kosten K_{var}

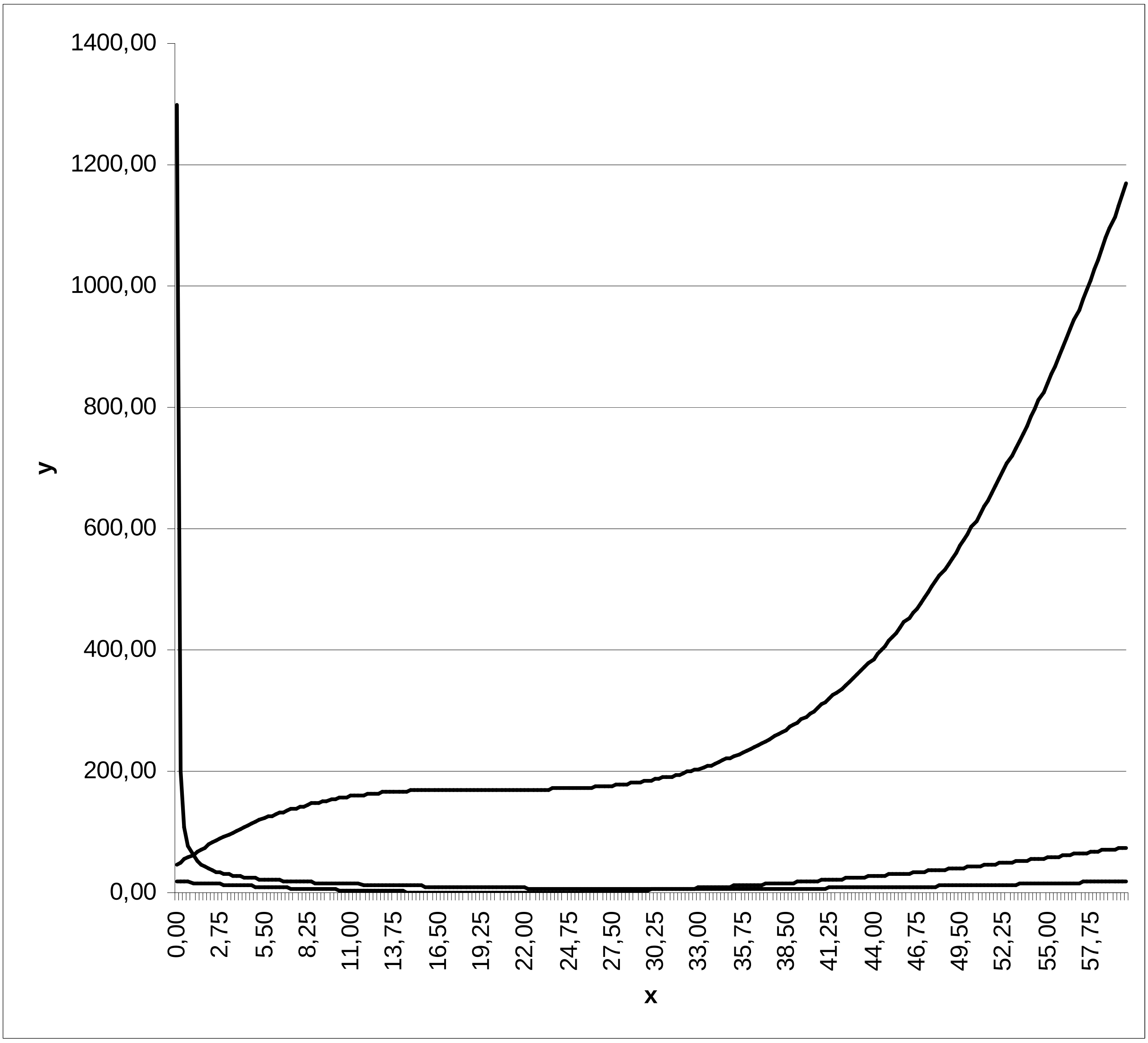
II.2 Als <u>Stückkosten</u> (= Kosten pro produziertes Stück) ergeben sich die fixen Stückkosten k_{fix}, die variablen Stückkosten k_{var} und die Gesamtstückkosten k_{ges} als:

$$k_{fix} = \frac{K_{fix}}{x}$$

$$k_{\mathrm{var}} = \frac{K_{\mathrm{var}}}{x}$$

$$k_{ges} = k_{fix} + k_{\mathrm{var}} = \frac{K_{fix}}{x} + \frac{K_{\mathrm{var}}}{x} = \frac{K_{ges}}{x}$$

Bei konstanten variablen Stückkosten k_{var} ist die Gesamtkostenfunktion $K_{ges}(x) = K_{ges}(x) = K_{fix} + x \cdot k_{var}(x)$ eine Gerade mit y-Achsenabschnitt K_{fix} und Steigung k_{var}. Die Gesamtstückkostenkurve $k_{ges} = k_{ges}(x) = \frac{K_{fix}}{x} + k_{\mathrm{var}}$ ist eine hyperbelähnliche Funktion, die für wachsende Ausbringungsmengen x sich der Kurve der variablen Stückkosten k_{var} annähert. Die Grenzkosten $K' = K'_{ges}$ sind dann die Ableitung der Gesamtkosten $K = K_{ges}$.



Gesamtkosten K_{ges}, Durchschnittskosten K_{ges}/x, Grenzkosten K'_{ges}

II.3 Erlöse: Der Verkauf eines Produktes durch ein Unternehmen bringt diesem Erlöse pro Zeiteinheit ein, die abhängig von der Ausbringungsmenge x des Produkts sind. Der vom Markt (bei vollständiger Konkurrenz) vorgegebene Verkaufspreis p als Stückerlös gibt den Erlös pro Stück beim Verkauf des Produkts an, der Gesamterlös E ergibt sich dann als:

$$E(x) = p \cdot x$$

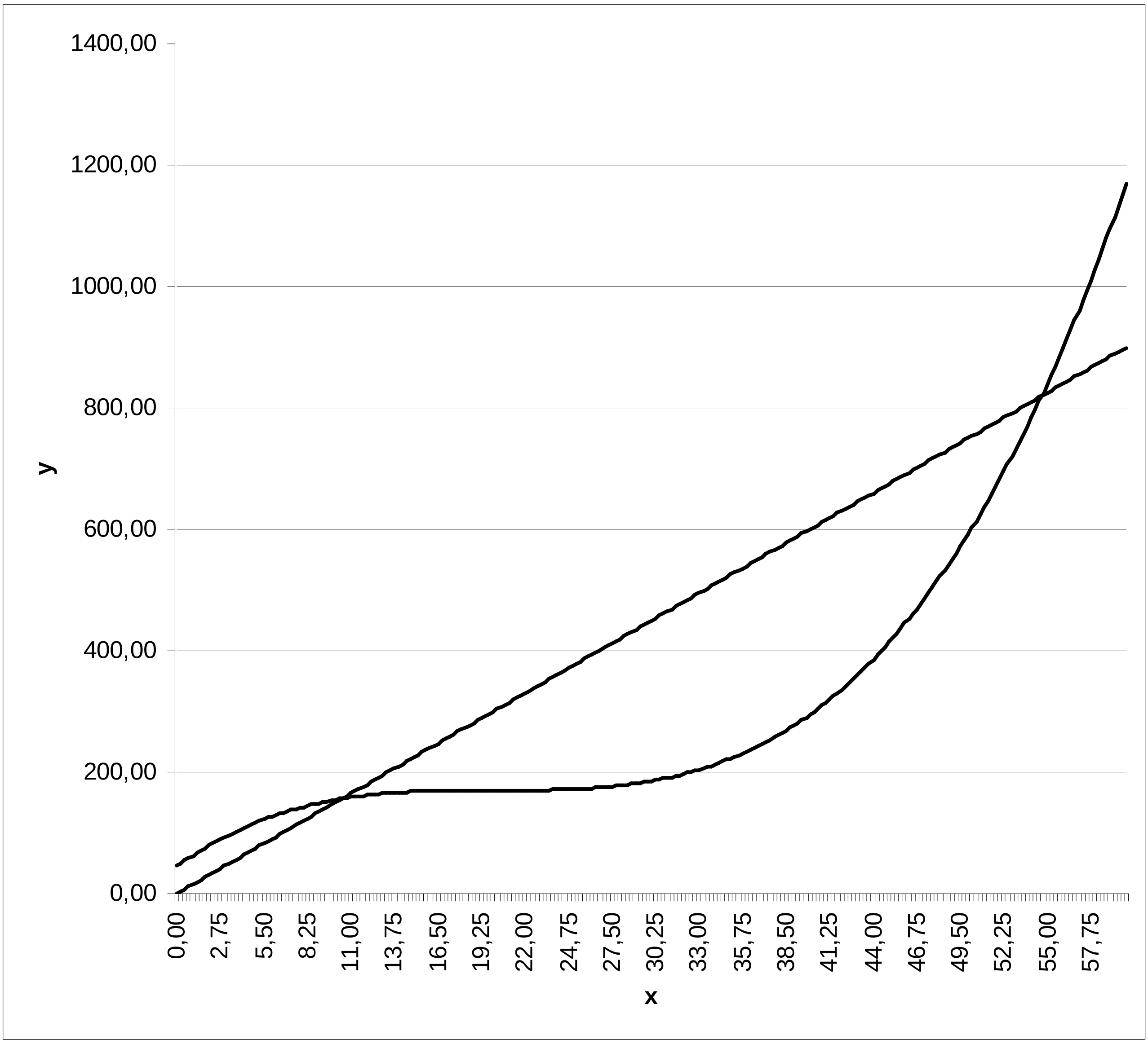
und stellt damit im Koordinatensystem von Ausbringungsmenge x und Erlös eine Gerade durch den Ursprung dar mit dem Stückerlös p als Steigung:
Die Ableitung der Erlösfunktion E heißt Grenzerlös E' mit: E'(x) = p und ist identisch mit dem Marktpreis p. Wegen E(x) = px ist der Grenzerlös auch Stückerlös e(x), da:

$$e(x) = \frac{E(x)}{x} = \frac{px}{x} = p = E'(x)$$

II.4 Gewinn: Stellt man nun die Kostenfunktion der Gesamtkosten K_{ges} und die Funktion des Erlöses E gegenüber, so ergibt sich für jede Ausbringungsmenge x eine besondere Höhe der Kosten $K(x) = K_{ges}(x)$ und des Erlöses E(x). Der Gewinn G ist dann die Differenz von Erlös und Kosten:

$$G(x) = E(x) – K(x)$$

und als Gewinn für positive Werte, als Verlust für negative interpretierbar.



Erlös E, Gesamtkosten K_{ges}

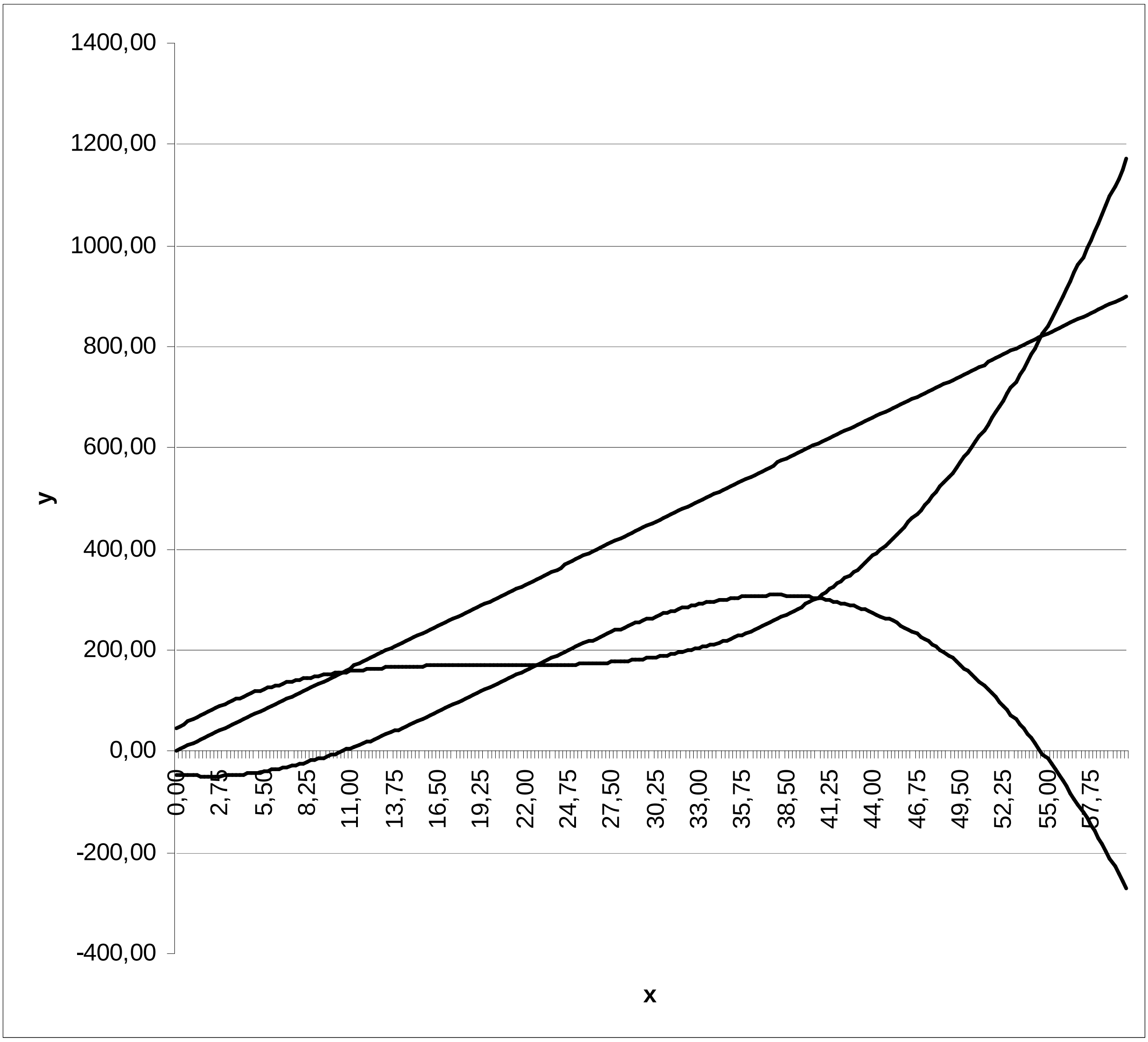
II.5 Nutzenschwelle, Nutzengrenze, Gewinnzone: Die Ausbringungsmenge x_s mit $G(x_s) = 0$, also Gewinn = 0, heißt Nutzenschwelle. Für die Nutzenschwelle x_s gilt:

$$E(x_s) = K(x_s)$$

Bei der Nutzenschwelle (break even point) wird damit die Gewinnzone des Unternehmens erreicht. Eine eventuell existierende zweite Stelle x_G mit $G(x_G) = 0$ und $x_s < x_g$ heißt Gewinngrenze mit:

$$E(x_g) = K(x_g)$$

Im Koordinatensystem von Ausbringungsmenge x und Erlös bzw. Kosten werden Nutzenschwelle x_s und Nutzengrenze x_g also durch den Schnittpunkt von Erlösgeraden und Kostenfunktion repräsentiert, die Gewinnzone, dargestellt durch die Ausbringungsmengen x mit $G(x) > 0$, ist damit zu umschreiben mit: $x_s < x < x_g$.



Erlös E, Gesamtkosten K_{ges}, Gewinn G

II.6 Gewinnmaximum: Gemäß den Regeln der Differenzialrechnung erhält man das Gewinnmaximum der Gewinnfunktion G(x) = E(x) – K(x), indem man die Ableitung G'(x) = 0 setzt. Für das Gewinnmaximum x_m gilt damit:

E'(x_m) = K'(x_m), p = K'(x_m)

Also sind hier Grenzerlös gleich Grenzkosten bzw. Grenzkosten gleich Stückerlös (Verkaufspreis). Auf Grund von G''(x_m) < 0 liegt dann in der Tat ein Maximum vor. G_{max} = G(x_m) ist dann der maximale Gewinn.

II.7 Stückgewinn: Für eine Ausbringungsmenge x ergibt sich der Stückgewinn g(x) als:

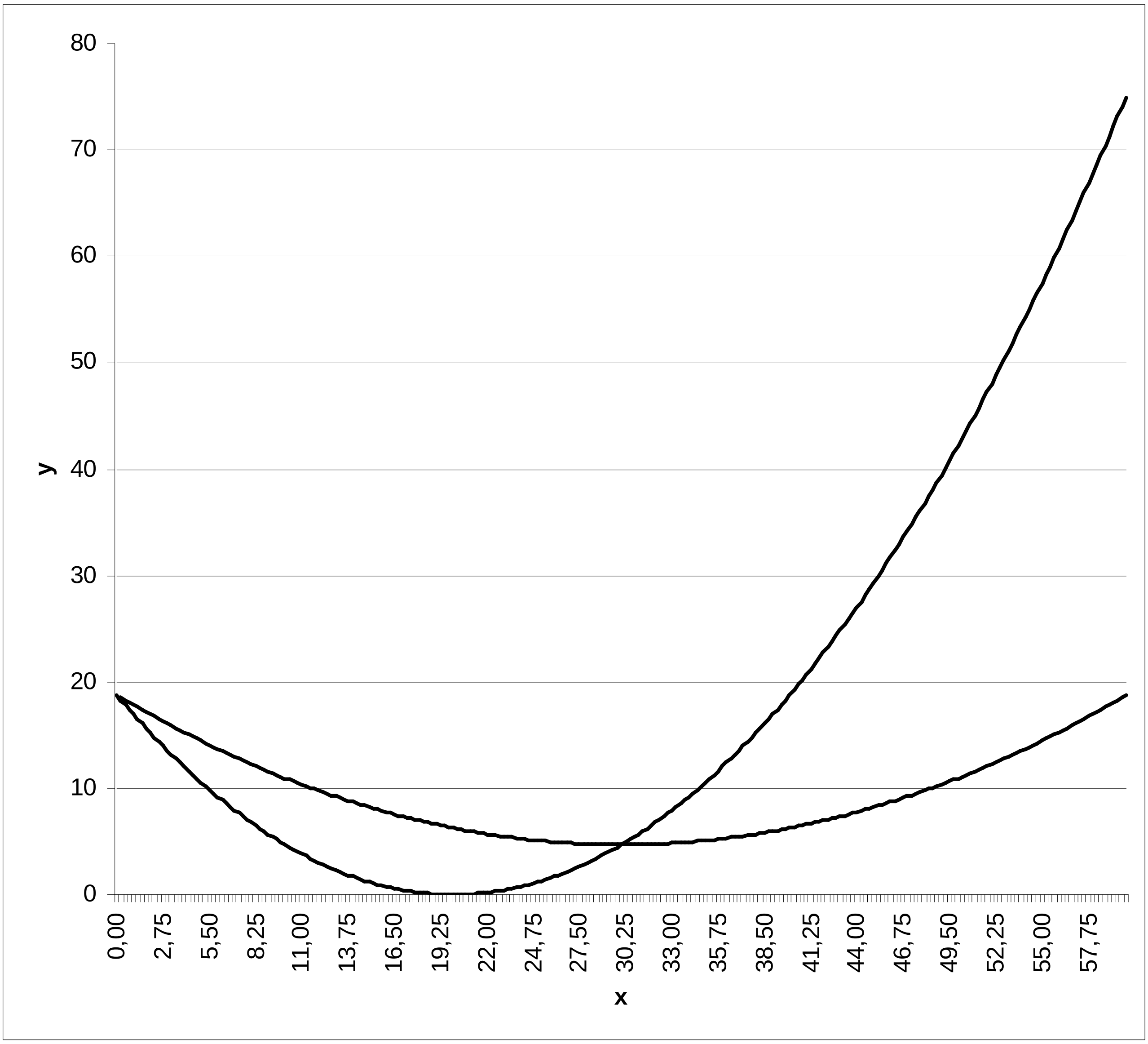
$$g(x) = \frac{G(x)}{x} = \frac{E(x)}{x} - \frac{K(x)}{x} = e(x) - k(x) = p - k(x)$$

Der Stückgewinn ist also die Differenz aus Preis und Stückkosten.

II.8 Betriebsminimum, kurzfristige Preisuntergrenze: Dem Betriebsminimum entspricht die Ausbringungsmenge x_{min}, bei der die variablen Stückkosten k_{var} minimal sind. Mit $k_{var} = \frac{K_{var}}{x}$ gilt im Betriebsminimum: $k_{var}^{'}(x_{min}) = 0$ und damit:

$$K'(x_{min}) = K_{var}^{'}(x_{min}) = \frac{K_{var}(x_{min})}{x_{min}} = k_{var}(x_{min})$$

mit: $k_{var}^{''}(x_{min}) > 0$. D.h.: Im Betriebsminimum x_{min} stimmen die (variablen) Grenzkosten K' = K'_{var} mit den variablen Stückkosten k_{var} überein, die Grenzkosten schneiden die Funktion der variablen Stückkosten in deren Minimum:



(Variable) Grenzkosten $K'_{ges} = K'_{var}$, variable Stückkosten k_{var}

Die kurzfristige Preisuntergrenze ist dann:

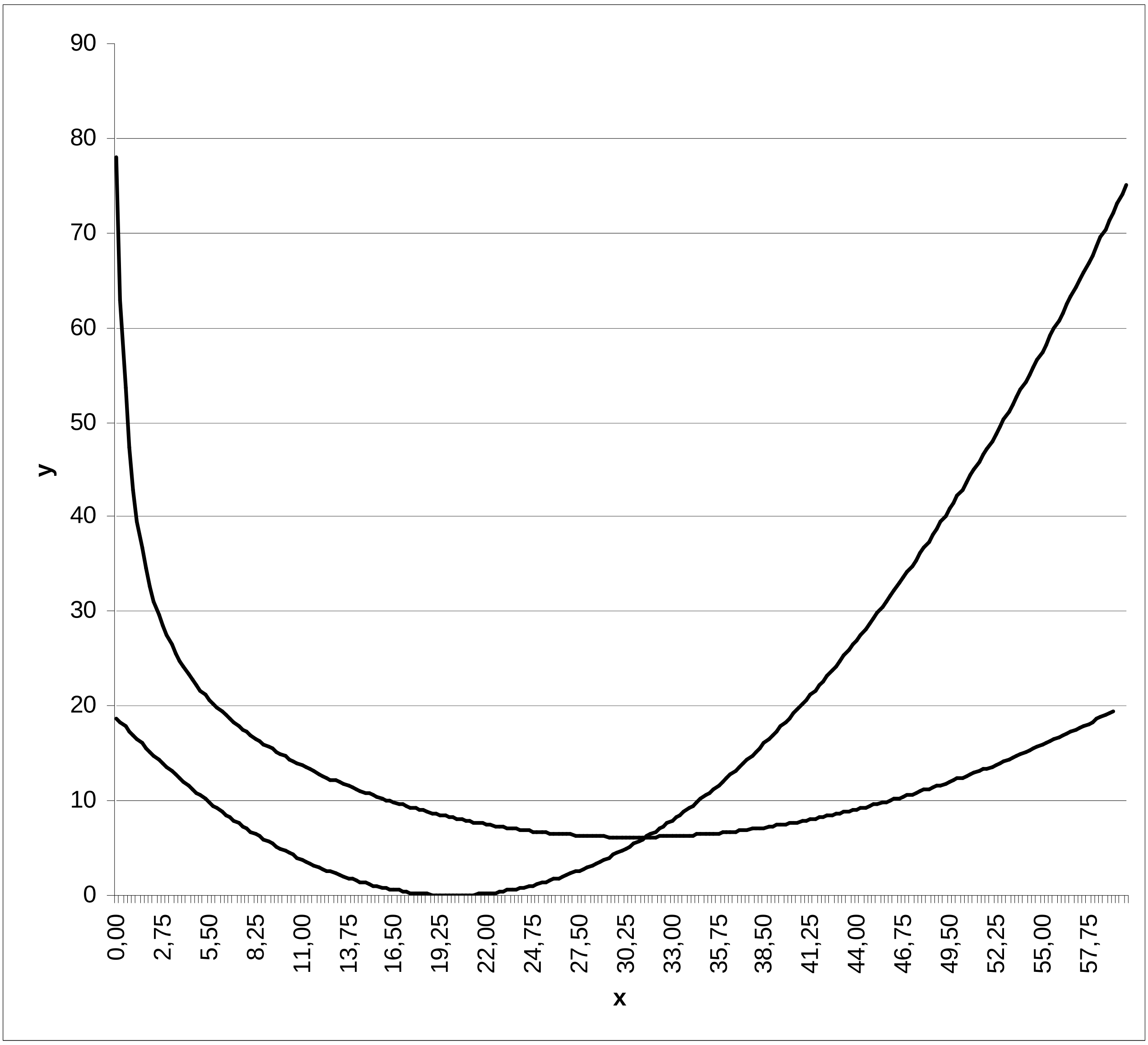
$$p_{kf} = k_{var}(x_{min})$$

Sie stellt daher den Marktpreis $k_{var}(x_{min}) \leq p$ dar, zu dem im Betriebsminimum das Unternehmen die Warenmenge x_{min} absetzen kann, wenn es bereit ist, dabei einen Verlust in Höhe der fixen Kosten K_{fix} zu machen, also: $G(x_{min}) = -K_{fix}$.

II.9 Betriebsoptimum, langfristige Preisuntergrenze: Dem Betriebsoptimum entspricht die Ausbringungsmenge x_{opt}, bei der die gesamten Stückkosten minimal sind. Mit $K = K_{ges}$ und $k = \frac{K}{x}$ gilt im Betriebsoptimum $k'(x_{opt}) = 0$ und damit:

$$K'(x_{opt}) = \frac{K(x_{opt})}{x_{opt}} = k(x_{opt})$$

mit: $k''(x_{opt}) > 0$. D.h.: Im Betriebsoptimum x_{opt} stimmen die Grenzkosten K' mit den gesamten Stückkosten k überein, die Grenzkosten schneiden die Funktion der Stückkosten in deren Minimum:



Grenzkosten K'_{ges}, Stückkosten k

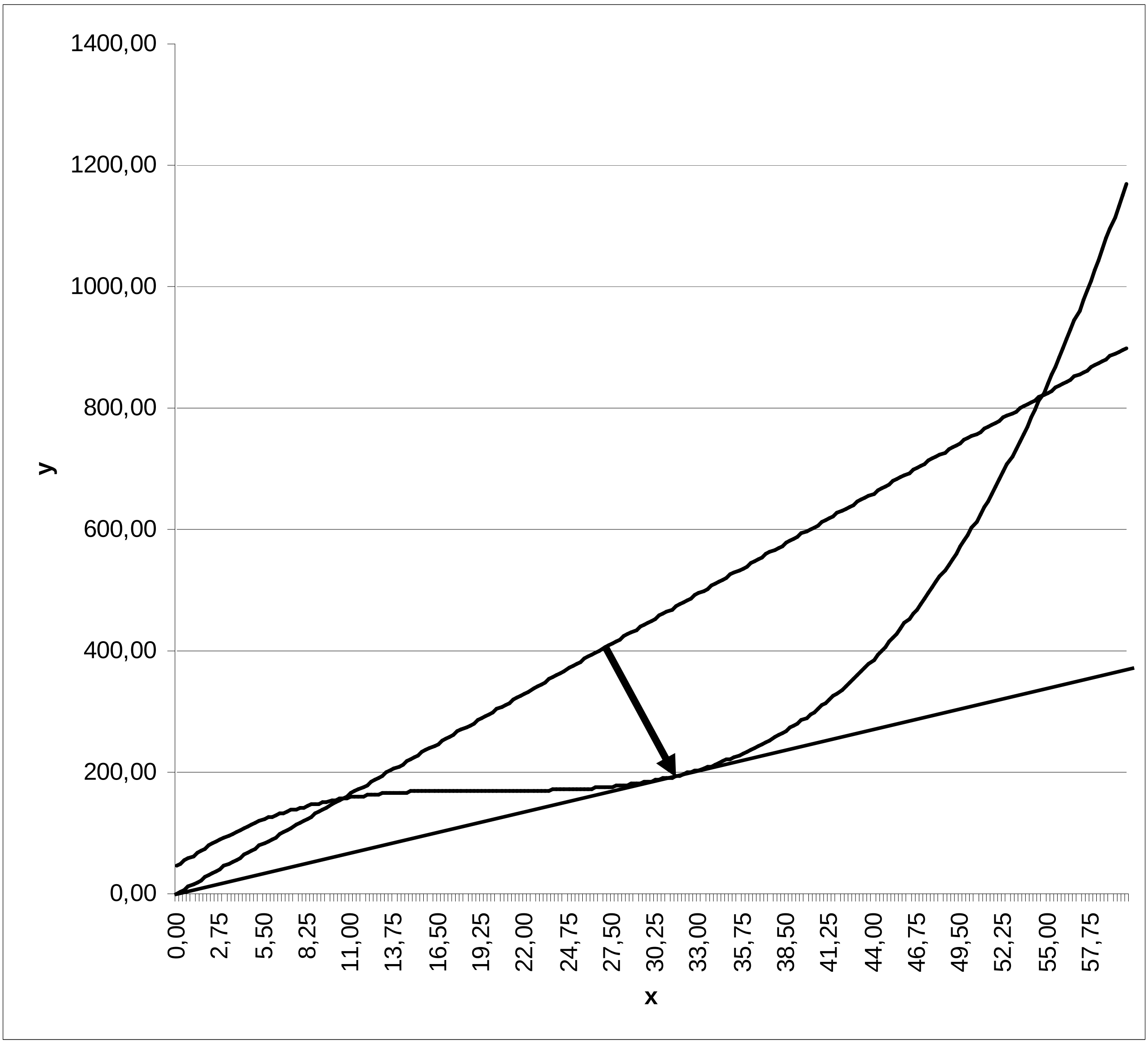
Als langfristige Preisuntergrenze ergibt sich:

$$p_{lf} = k(x_{opt})$$

Sie stellt daher den Marktpreis $k(x_{opt}) \leq p$ dar, zu dem im Betriebsoptimum das Unternehmen die Warenmenge x_{opt} absetzen kann, bei der die fixen Kosten K_{fix} und die variablen Kosten $K_{var}(x_{opt})$ gerade gedeckt sind, also: $G(x_{opt}) = 0$.

Wegen $k_{var}(x) < k(x)$ ist bei $K'(x) > 0$: $x_{min} < x_{opt}$, $p_{kf} < p_{lf}$.
Ein anderer Zugang zur langfristigen Preisuntergrenze ergibt sich, wenn wir uns vorstellen, die Erlöskurve E(x) um den Koordinatenursprung so zu drehen, dass sie zu einer Tangente an die Gesamtkostenfunktion K(x) wird. Wir erhalten dann mit $E_{lf}(x) = p_{lf}x$ die Erlöskurve, die in x_{opt} die Kostenkurve berührt, so dass also ebenfalls gilt:

$$K'(x_{opt}) = \frac{K(x_{opt})}{x_{opt}} = k(x_{opt})$$



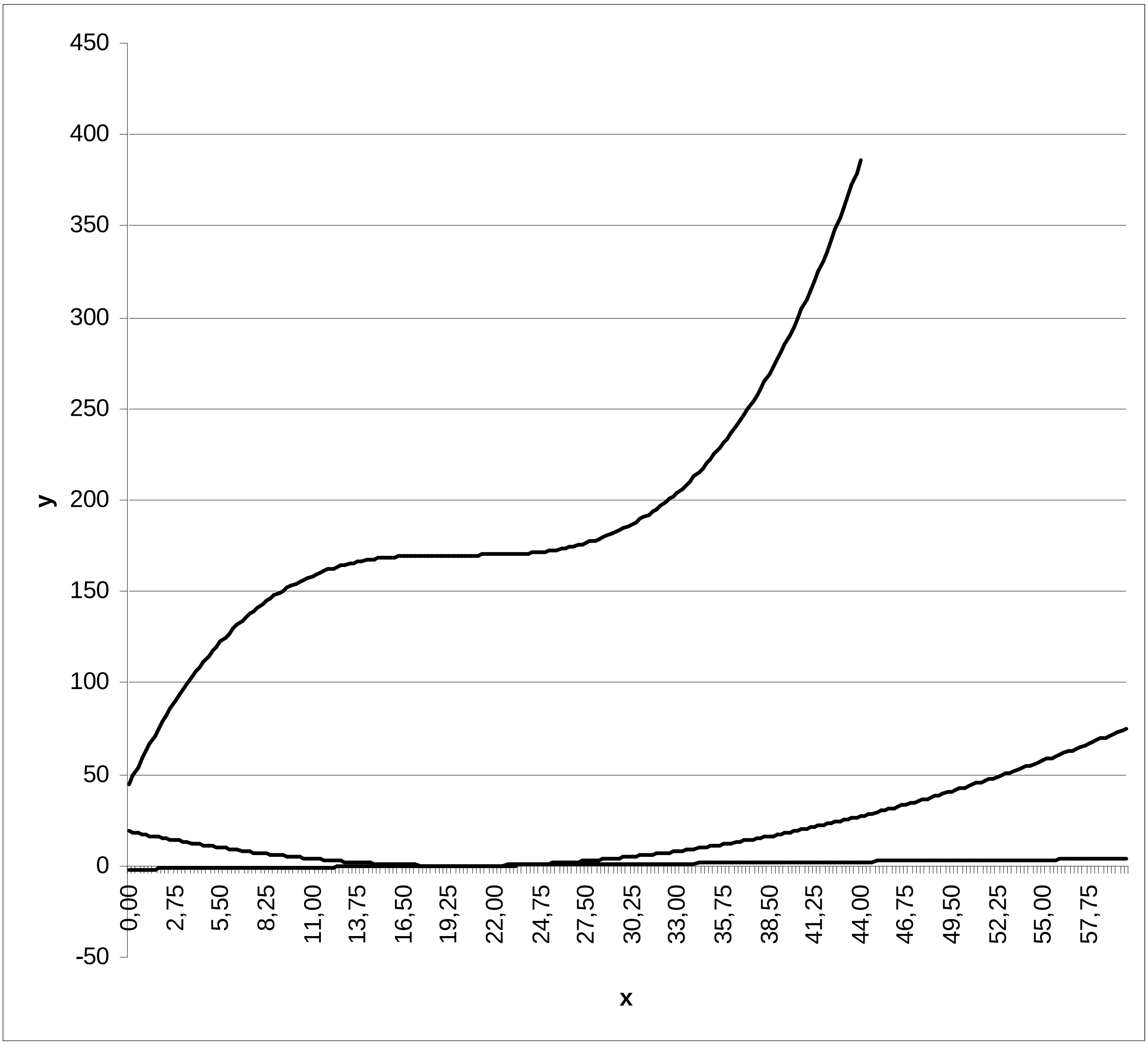
Erlös E, E_{lf}, Gesamtkosten K_{ges}

Durch Drehung der Erlösfunktion erhalten wir entsprechend eine Tangente an die Kurve der variablen Gesamtkosten und somit das Betriebsminimum.
Es bleibt noch (zusammenfassend) zu erwähnen, dass bei der Ausbringungsmenge des Betriebsoptimums die Stückkosten minimal sind, d.h. der Stückgewinn $g(x) = p - k(x)$ maximal wird.

II.10 <u>Minimum der Grenzkosten</u>: Für die Gesamtkosten $K(x) = K_{ges}(x)$ und deren Ableitung, die Grenzkosten $K'(x)$, ergibt sich das Minimum der Grenzkosten mit:

$K''(x_{mg}) = 0$

und mit: $K'''(x_{mg}) > 0$. Das Minimum gibt damit an, bei welcher Ausbringungsmenge x_{mg} die Gesamtkosten am geringsten steigen (minimaler Kostenzuwachs), und kennzeichnet damit den Wendepunkt der Gesamtkostenfunktion K(x).



Gesamtkosten K_{ges}, Grenzkosten K'_{ges}, Ableitung der Grenzkosten K''_{ges}

II.11 <u>Minimale variable Stückkosten, minimale Grenzkosten</u>: Im Betriebsminimum sind – wie gesehen – die variablen Stückkosten minimal, d.h. für die entsprechende Ausbringungsmenge x_{min} gilt: $k'_{\text{var}}(x_{\min}) = 0$. Das Minimum der Grenzkosten wird erreicht bei x_{mg} mit: $K''(x_{mg}) = 0$. Dann gilt (mit einer kubischen Kostenfunktion) hinsichtlich des Verhältnisses der Ausbringungsmengen von minimalen Grenzkosten und Betriebsminimum:

$$x_{mg} : x_{min} = 2 : 3$$

III. Ermittlung der Erlös- und Kostenfunktion

III.1 <u>Problemstellung</u>: Zu ermitteln ist die Erlös- und Gesamtkostenfunktion E(x) und K(x) eines Unternehmens am Markt (x als Unternehmensoutput in ME (Mengeneinheiten) E(x), K(x) in GE (Geldeinheiten)). Die Erlösfunktion E(x) ist dabei linear, die Kostenfunktion K(x) ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Es liegt damit eine (Funktions-) Bestimmungsaufgabe vor, für die folgende Voraussetzungen gelten:

III.2 Erlösfunktion:

$E(x) = px$ (p Marktpreis) $E'(x) = p$ (Grenzerlös) $e(x) = p$ (Stückerlös)

III.3 Gesamtkostenfunktion:

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $K_{fix} = d$ (Fixkosten) $K_{var}(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (variable Kosten) $K'(x) = K'_{var}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ (Grenzkosten) $k(x) = ax^2 + bx + c + d/x$ (Durchschnittskosten = Stückkosten) $k_{fix}(x) = d/x$ (fixe Durchschnittskosten = fixe Stückkosten) $k_{var}(x) = ax^2 + bx + c$ (variable Durchschnittskosten = variable Stückkosten) $k'(x) = 2ax + b - d/x^2$ (Grenzdurchschnittskosten = Grenzstückkosten) $k_{var}'(x) = 2ax + b$ (variable Grenzdurchschnittskosten = variable Grenzstückkosten)

III.4 Gewinnfunktion:

$G(x) = E(x) - K(x) = px - ax^3 - bx^2 - cx - d$ (Gewinn) $G'(x) = p - 3ax^2 - 2bx - c$ (Grenzgewinn) $g(x) = G(x)/x = e(x) - k(x) = p - ax^2 - bx - c - d/x$ (Stückgewinn)

III.5 Die für die Bestimmungsaufgabe wichtigen Eigenschaften der Erlös- und Kostenfunktion können dann wie folgt ausgewertet werden:

Marktpreis p: $E(x) = px$ Fixkosten y_{fix}: $K_{fix} = d = y_{fix}$ Gesamtkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $K(x_0) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = y_0$ Stückkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $k(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c + d/x_0 = y_0$ Variable Stückkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $k_{var}(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = y_0$ Grenzkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $K'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = y_0$ Gewinn G_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $G(x_0) = px_0 - ax_0^3 - bx_0^2 - cx_0 - d = G_0$ Stückgewinn g_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $g(x_0) = p - ax_0^2 - bx_0 - c - d/ x_0 = g_0$ Nutzenschwelle, Nutzengrenze bei Menge x_0: $G(x_0) = px_0 - ax_0^3 - bx_0^2 - cx_0 - d = 0$ Gewinnmaximum bei Ausbringungsmenge x_0: $G'(x_0) = p - 3ax_0^2 - 2bx_0 - c = 0$ Betriebsminimum bei Ausbringungsmenge x_0: $k_{var}'(x_0) = 2ax_0 + b = 0$ bzw.: $K'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = ax_0^2 + bx_0 + c = k_{var}(x_0)$ Kurzfristige Preisuntergrenze p_{kf} bei Menge x_0: $k_{var}(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = p_{kf}$ bzw. $G(x_0) = p_{kf}x_0 - ax_0^3 - bx_0^2 - cx_0 - d = -d = -K_{fix}$ Betriebsoptimum bei Ausbringungsmenge x_0: $k'(x_0) = 2ax_0 + b - d/x_0^2 = 0$ bzw.: $K'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = ax_0^2 + bx_0 + c + d/x_0 = k(x_0)$ Langfristige Preisuntergrenze p_{lf} bei Menge x_0: $k(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c + d/x_0 = p_{lf}$ bzw. $G(x_0) = p_{lf}x_0 - ax_0^3 - bx_0^2 - cx_0 - d = 0$

III.6 Das aus der Auswertung resultierende lineare Gleichungssystem ist dann z.B. mit dem Gauß-Algorithmus lösbar. Die Lösungen des linearen Gleichungssystems lauten dann: a, b, c, d, p.

Beispiele

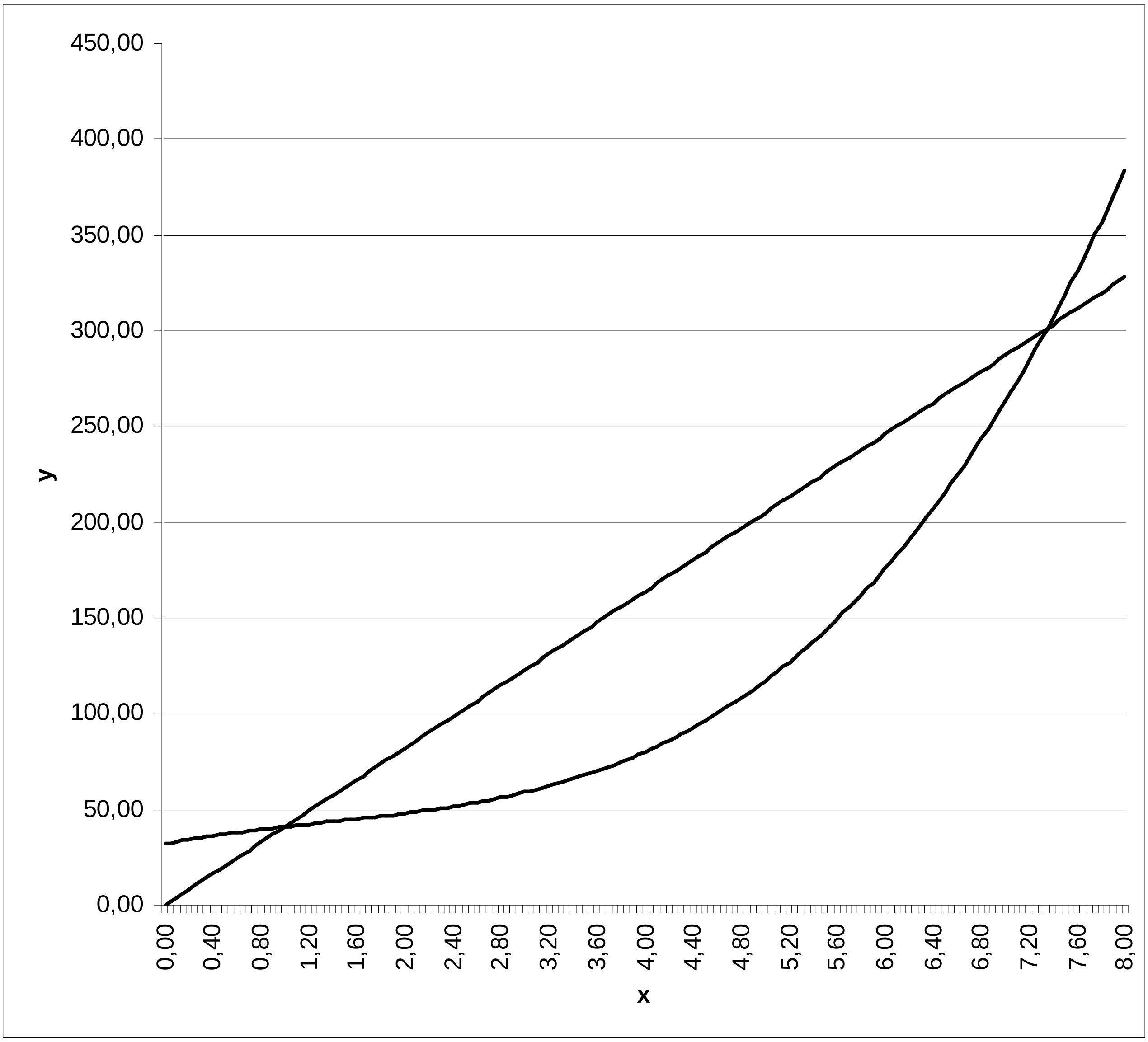
IV.1 Beispiel: Ein Unternehmen in einem Polypol eines vollkommenen Marktes hat als von einer Ausbringungsmenge x abhängige Erlös- und Gesamtkostenfunktion:

$$E(x) = 41x\,,\ K(x) = x^3 - 4x^2 + 12x + 32$$

I. Die Erlösfunktion ist vom Typ $E(x) = px$, wobei p>0 der Marktpreis des polypolistisch-vollkommenen Marktes für eine produzierte Einheit der Ausbringungsmenge bedeutet. Die Gesamtkostenfunktion ist ein kubische Parabel mit:

$$K(x) = K_{ges}(x) = K_{fix} + K_{var}(x) = K_{fix} + x \cdot k_{var}(x) =$$
$$32 + (x^3 - 4x^2 + 12x) = 32 + x(x^2 - 4x + 12)\,,$$

also mit: K_{fix} = 32 als fixen Kosten, wobei $K_{var}(x) = x^3 - 4x^2 + 12x$ die variablen Kosten, $k_{var}(x) = x^2 - 4x + 12$ die variablen Stückkosten sind.



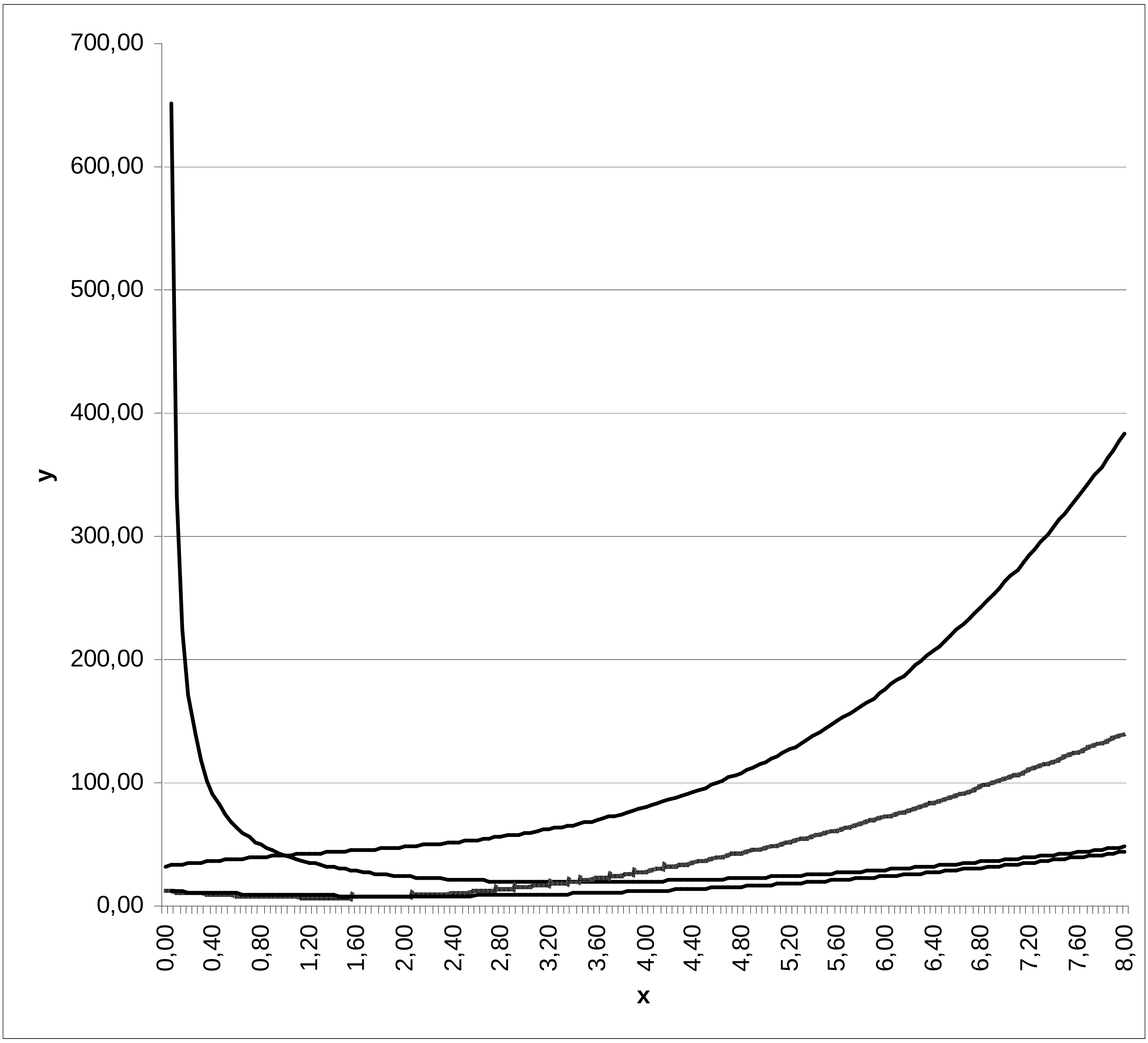
Erlös E(x), Gesamtkosten K(x)

II. Als Stückkosten (= Kosten pro produzierte Mengeneinheit) ergeben sich die fixen Stückkosten k_{fix}, die variablen Stückkosten k_{var} und die Gesamtstückkosten k_{ges} als:

$$k_{fix} = \frac{K_{fix}}{x} = \frac{32}{x}$$

$$k_{var} = \frac{K_{var}}{x} = x^2 - 4x + 12$$

$$k_{ges} = k_{fix} + k_{var} = \frac{K_{fix}}{x} + \frac{K_{var}}{x} = \frac{K_{ges}}{x} = \frac{32}{x} + x^2 - 4x + 12$$



Gesamtkosten K(x), Durchschnittskosten k(x), variable Durchschnittskosten k_{var}(x), Grenzkosten K'(x)

Die Grenzkosten K' = K'_{ges} = K'_{var} sind dann die Ableitung der Gesamtkosten K = K_{ges}, also:

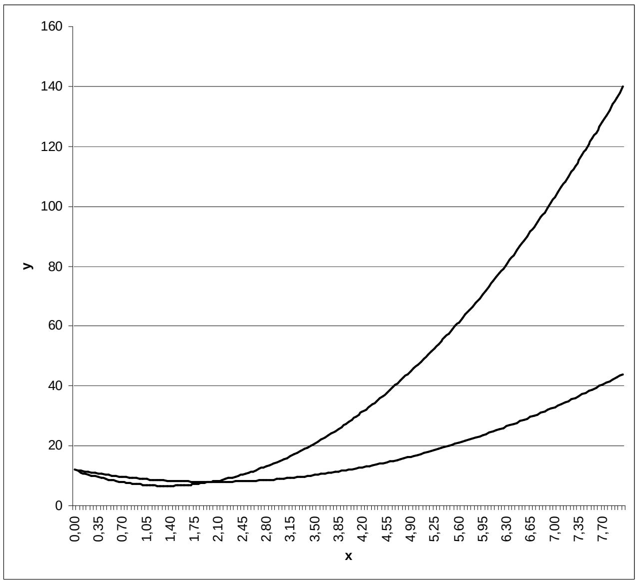
$$K'(x) = 3x^2 - 8x + 12$$

III. Bzgl. der Kostenfunktion K(x) können wir jetzt das Betriebsminimum oder die kurzfristige Preisuntergrenze $k_{var}(x_{min})$ bestimmen. Im Betriebsminimum x_{min} stimmen die (variablen) Grenzkosten K' = K'$_{var}$ mit den variablen Stückkosten k_{var} überein, die Grenzkosten schneiden die Funktion der variablen Stückkosten in deren Minimum. Es gilt also:

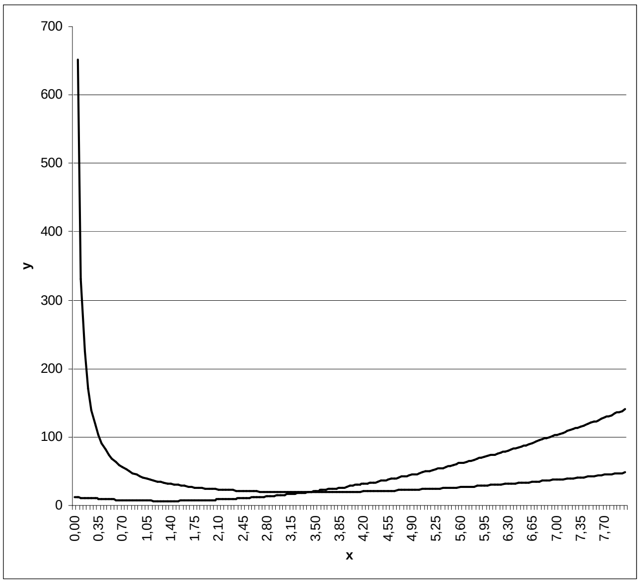
$$K'(x) = k_{\text{var}}(x)$$
$$3x^2 - 8x + 12 = x^2 - 4x + 12$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$2x(x-2) = 0$$
$$x = 2$$

mit: x_{min} = 2 und: $k_{var}(2)$ = $2^2 - 4 \cdot 2 + 12 = 8$ = p_{kf} als kurzfristige Preisuntergrenze. Damit werden bei x_{min} = 2 und p_{kf} = 8 nur die variablen Kosten gedeckt wegen:

$$E_{kf}(2) = 8 \cdot 2 = 16,\ K(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 32 = 48,\ E_{kf}(2) - K(2) = -32 = -K_{fix}.$$



Grenzkosten K'(x) = variable Stückkosten $k_{var}(x)$



Grenzkosten K'(x) = Stückkosten k(x)

IV. Bzgl. der Kostenfunktion K(x) können wir nun das Betriebsoptimum oder die langfristige Preisuntergrenze $k(x_{max})$ bestimmen. Dem Betriebsoptimum entspricht die Ausbringungsmenge x_{opt}, bei der die gesamten Stückkosten minimal sind. Es gilt also:

$$K'(x) = k(x)$$
$$3x^2 - 8x + 12 = \frac{32}{x} + x^2 - 4x + 12$$
$$3x^3 - 8x^2 + 12x = 32 + x^3 - 4x^2 + 12x$$
$$2x^3 - 4x^2 - 32 = 0$$
$$x^3 - 2x^2 - 16 = 0$$
$$x \approx 3{,}4$$

mit: x_{opt} = 3,4 und: k(3,4) = 19,37 = p_{lf} als langfristige Preisuntergrenze sowie:

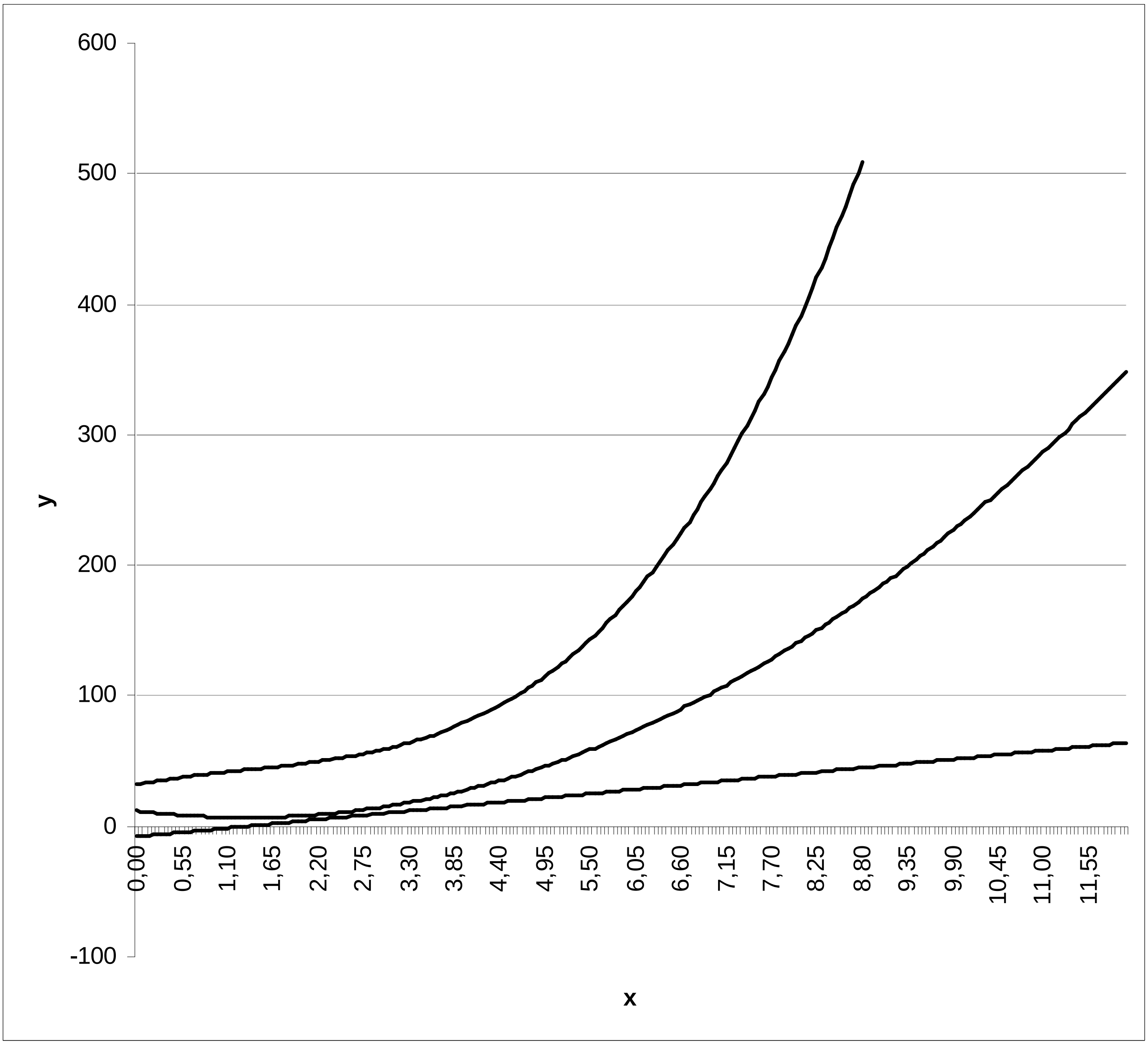
$$E_{lf}(2) = 19{,}37 \cdot 3{,}4 = 65{,}86,\ K(3{,}4) = 65{,}86,\ E_{lf}(3{,}4) - K(3{,}4) = 0\ .$$

V. Die Ausbringungsmenge x mit minimalem Kostenzuwachs ist die Menge x_{mg} mit: K''(x_{mg}) = 0, also dort, wo die Kostenfunktion K(x) ihren Wendepunkt besitzt. Damit gilt hinsichtlich dieses Minimums der Grenzkosten:

$$K''(x) = 6x - 8 = 0$$

$$6x = 8$$
$$x = \frac{4}{3}$$

Das Minimum gibt damit an, dass bei der Ausbringungsmenge $x_{mg} = \frac{4}{3}$ die Gesamtkosten am geringsten steigen.



Gesamtkosten K(x), Grenzkosten K'(x), Grenzkostenzuwachs K''(x)

VI. Der Gewinn G ist die Differenz von Erlös und Kosten, also:

$$G(x) = E(x) - K(x) = 41x - (x^3 - 4x^2 + 12x + 32)$$
$$= 41x - x^3 + 4x^2 - 12x - 32 = -x^3 + 4x^2 + 29x - 32$$

Es ist G(x) = 0 an der Nutzenschwelle x_s (break even point) und an der Nutzengrenze x_g. Zwischen x_s und x_g liegt die Gewinnzone mit: G(x) > 0. Es gilt mit $E'(x) = 41$:

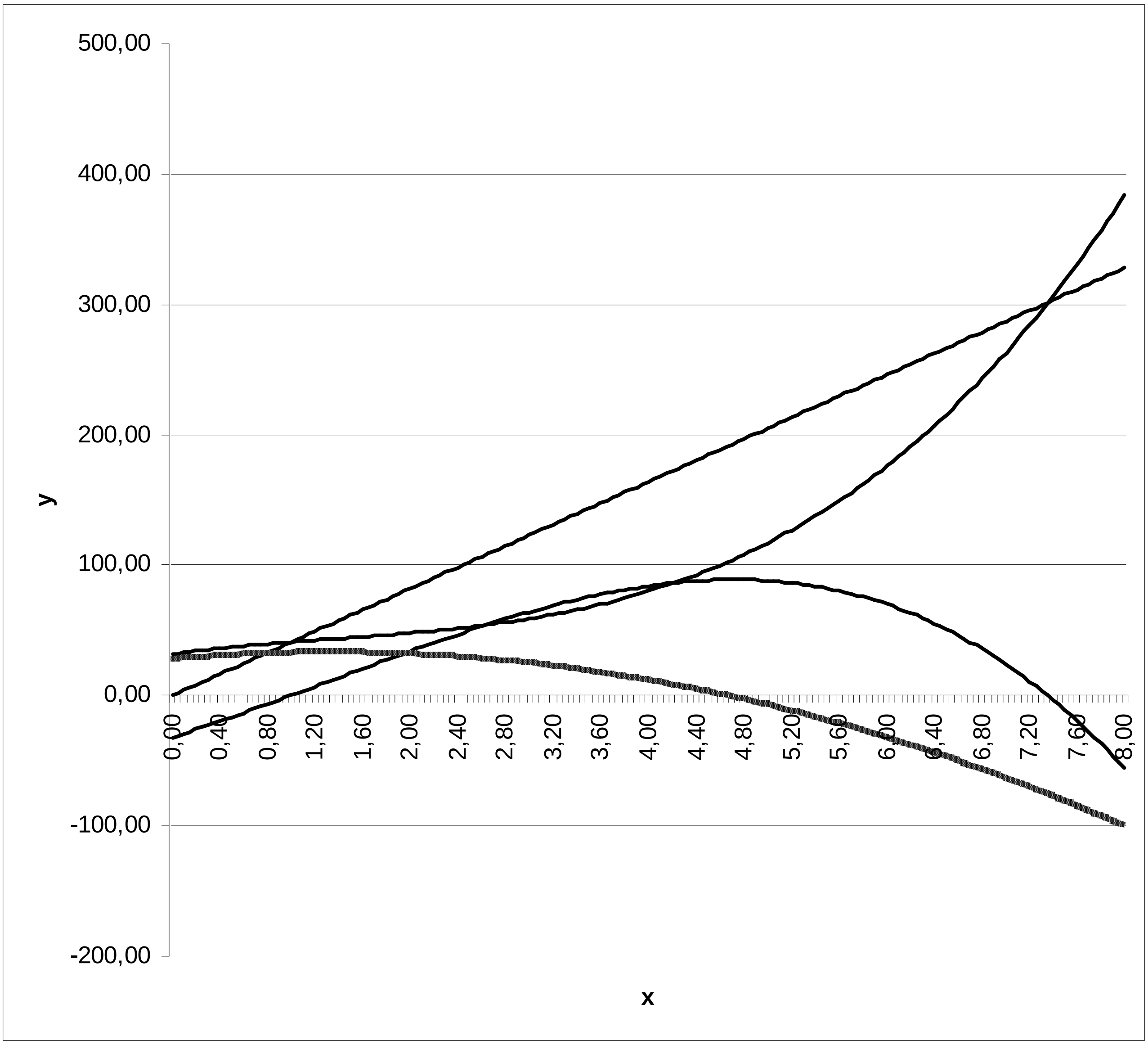
$$G(x) = 0$$
$$-x^3 + 4x^2 + 29x - 32 = 0$$
$$(x-1)(-x^2 + 3x + 32) = 0$$

$$x-1=0\,,\; -x^2+3x+32=0$$

$$x=1,\; x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot(-1)\cdot 32}}{2\cdot(-1)}=\frac{-3\pm\sqrt{137}}{-2}$$

$$x=1,\; x=7{,}4$$

Gewinnschwelle ist: x_s = 1, Gewinngrenze x_g = 7,4 mit: G(1) = G(7,4) = 0.



Erlös E(x) = Gesamtkosten K(x), Gewinn G(x), Grenzgewinn G'(x)

VI. Man erhält das <u>Gewinnmaximum</u> x_m über den Grenzgewinn G'(x) mit: G'(x) = 0. Damit gilt:

$$G'(x)=0$$

$$E'(x)-K'(x)=0$$

$$E'(x)=K'(x)$$

$$41=3x^2-8x+12$$

$$3x^2-8x-29=0$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot 3\cdot(-29)}}{2\cdot 3}=\frac{8\pm\sqrt{412}}{6}$$

$$x = 4{,}7$$

G_{max} = G(x_m) = G(4,7) = $-4{,}7^3 + 4 \cdot 4{,}7^2 + 29 \cdot 4{,}7 - 32 = 88{,}84$ ist dann der maximale Gewinn.

IV.2 Beispiel: Ein Unternehmen in einem Polypol eines vollkommenen Marktes hat als von einer Ausbringungsmenge x abhängige Erlös- und Gesamtkostenfunktion:

$$E(x) = 360x\,,\ K(x) = \frac{1}{8}x^3 - 15x^2 + 600x + 2000$$

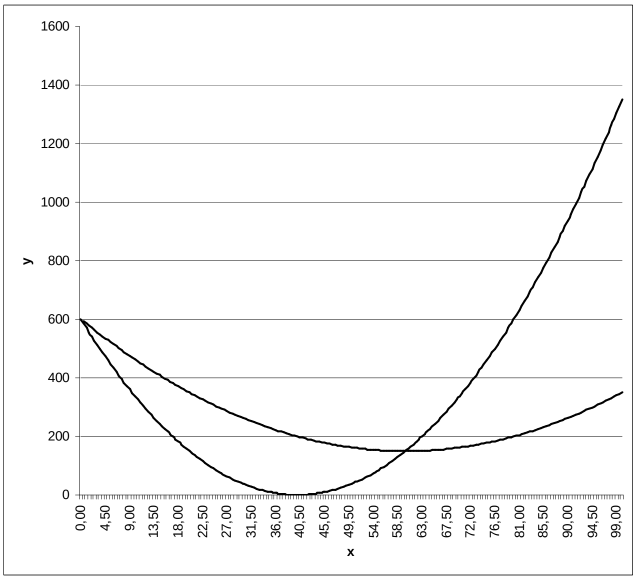
für $0 \le x \le 100$.

I. Hinsichtlich der Kostenfunktion gilt dann:

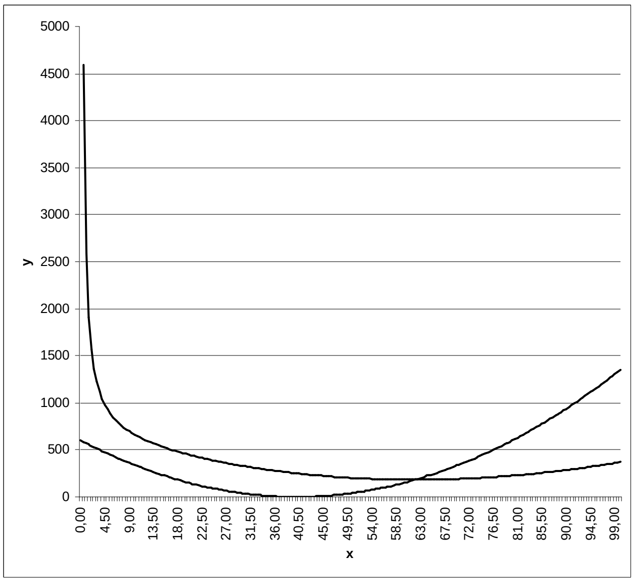
$$K_{fix}(x) = 2000\,,\ K_{\text{var}}(x) = \frac{1}{8}x^3 - 15x^2 + 600x$$

$$k_{\text{var}}(x) = \frac{1}{8}x^2 - 15x + 600\,,\ k(x) = \frac{1}{8}x^2 - 15x + 600 + \frac{2000}{x}$$

$$K'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 30x + 600\,,\ K''(x) = \frac{3}{4}x - 30$$



Betriebsminimum: $K'(x) = k_{var}(x)$



Betriebsoptimum: K'(x) = k(x)

II. Minimaler Kostenzuwachs liegt vor bei: K''(x) = 0 ⇔ $\frac{3}{4}x - 30 = 0$ ⇔ $\frac{3}{4}x = 30$ ⇔ x = 40.

III. Auf Grund von: $K'(x) = k_{var}(x)$ ⇔ $\frac{3}{8}x^2 - 30x + 600 = \frac{1}{8}x^2 - 15x + 600$ ⇔ $\frac{1}{4}x^2 - 15x = 0$ ⇔ $x^2 - 60x = 0$ ⇔ $x(x-60) = 0$ ⇔ x = 0, x = 60 ist x_{min} = 60 das Betriebsminimum mit $k_{var}(60) = 150 = p_{kf}$ als kurzfristiger Preisuntergrenze.

IV. Wegen: K'(x) = k(x) ⇔ $\frac{3}{8}x^2 - 30x + 600 = \frac{1}{8}x^2 - 15x + 600 + \frac{2000}{x}$ ⇔ $\frac{1}{4}x^2 - 15x - \frac{2000}{x} = 0$ ⇔ $x^3 - 60x^2 - 8000 = 0$ ⇔ x ≈ 62,2 ist x_{opt} ≈ 62,2 Betriebsoptimum mit $k(62{,}2) = 182{,}76 = p_{lf}$ als langfristiger Preisuntergrenze.

V. Break even point als Nutzenschwelle und Nutzengrenze ergeben sich aus: E(x) = K(x) $\Leftrightarrow\ 360x = \frac{1}{8}x^3 - 15x^2 + 600x + 2000 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{8}x^3 - 15x^2 + 240x + 2000 = 0 \ \Leftrightarrow$

$x^3 - 120x^2 + 1920x + 16000 = 0 \ \Leftrightarrow$ x ≈ 27, x ≈ 98,9. Nutzenschwelle ist also: $x_s \approx 27$, Nutzengrenze ist: $x_g \approx 98{,}9$ mit $G(x_s) = G(x_g) = 0$.

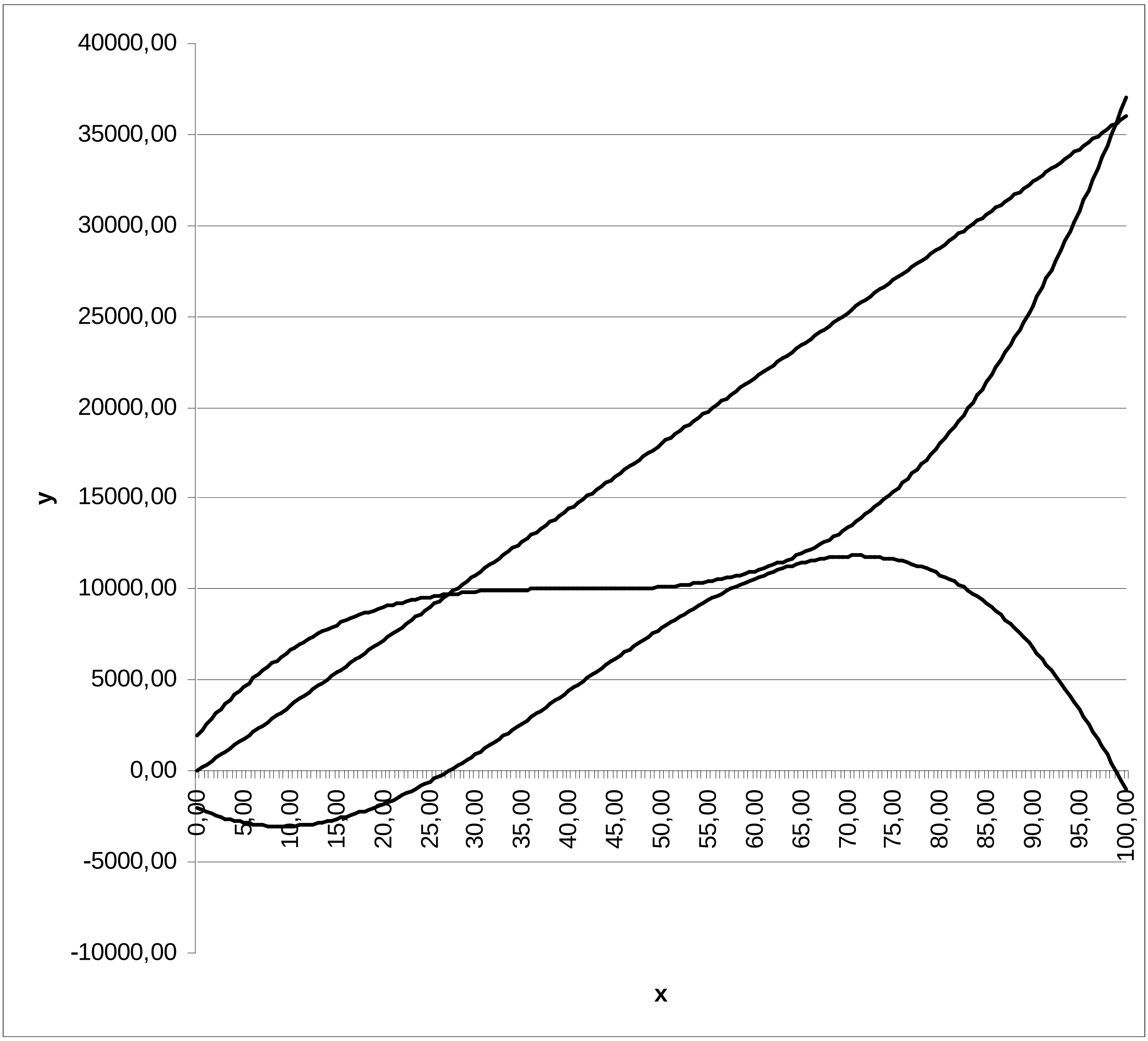
VI. Die Gewinnfunktion ist: $G(x) = E(x) - K(x) = 360x - (\frac{1}{8}x^3 - 15x^2 + 600x + 2000) =$

$-\frac{1}{8}x^3 + 15x^2 - 240x - 2000$. Die Ableitung der Gewinnfunktion ist: $G'(x) =$

$E'(x) - K'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 30x - 240$. Mit $G'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ -\frac{3}{8}x^2 + 30x - 240 = 0 \ \Leftrightarrow$

$3x^2 - 240x + 1920 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{240 \pm \sqrt{240^2 - 4\cdot 3\cdot 1920}}{2\cdot 3} = \frac{240 \pm \sqrt{34560}}{6} = \frac{240 \pm 185{,}9}{6} \ \Leftrightarrow$

[x ≈ 9], x ≈ 71 ergibt sich die gewinnmaximale Ausbringungsmenge $x_{max} \approx 71$ mit maximalem Gewinn $G(x_{max}) = 11836{,}13$.



Nutzenschwelle/-grenze: E(x) = K(x), Gewinnmaximum: G(x)

IV.3 Beispiel: Zu bestimmen sind die Kostenfunktion als ganz rationale Funktion 3. Grades und die linear-proportionale Erlösfunktion einer Unternehmung zu folgenden Bedingungen:

(1) Die Fixkosten haben eine Höhe von 8 GE (Geldeinheiten).
(2) Als Stückkosten ergeben sich bei einer Produktionsmenge von 4 ME (Mengeneinheiten) 6 GE.
(3) Bei einer Produktionsmenge von 3 ME befindet sich das Betriebsminimum.
(4) Der Verkaufspreis pro ME beträgt 8 GE.
(5) Der Gewinn bei einer Produktionsmenge von 5 ME beträgt 4,5 GE.

I. Zur Bestimmung von Kosten- und Erlösfunktion ist mit x als ME der folgende Ansatz gültig:

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (Kostenfunktion)
$K_{fix} = d$ (Fixkosten)
$K_{var}(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (variable Kosten)
$K'(x) = K'_{var}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ (Grenzkosten)
$k(x) = ax^2 + bx + c + d/x$ (Durchschnittskosten = Stückkosten)
$k_{fix}(x) = d/x$ (fixe Durchschnittskosten = fixe Stückkosten)
$k_{var}(x) = ax^2 + bx + c$ (variable Durchschnittskosten = variable Stückkosten)
$k'(x) = 2ax + b – d/x^2$ (Grenzdurchschnittskosten = Grenzstückkosten)
$k_{var}'(x) = 2ax + b$ (variable Grenzdurchschnittskosten = variable Grenzstückkosten)

$E(x) = px$ (Erlösfunktion, p als Markt-/Verkaufspreis)
$E'(x) = p$ (Grenzerlös)

$G(x) = E(x) – K(x) = px – ax^3 – bx^2 – cx – d$ (Gewinnfunktion)
$G'(x) = p – 3ax^2 – 2bx – c$ (Grenzgewinn)

II. Die Eigenschaften der Erlös- und Kostenfunktion können dann wie folgt ausgewertet werden:

Gesamtkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $K(x_0) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = y_0$
Stückkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $k(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c + d/x_0 = y_0$
Variable Stückkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $k_{var}(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = y_0$
Grenzkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $K'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = y_0$
Gewinn g_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $G(x_0) = px_0 – ax_0^3 – bx_0^2 – cx_0 – d = g_0$
Nutzenschwelle, Nutzengrenze bei Menge x_0: $G(x_0) = px_0 – ax_0^3 – bx_0^2 – cx_0 – d = 0$
Gewinnmaximum bei Ausbringungsmenge x_0: $G'(x_0) = p – 3ax_0^2 – 2bx_0 – c = 0$
Betriebsminimum bei Ausbringungsmenge x_0: $k_{var}'(x_0) = 2ax_0 + b = 0$ bzw.: $K'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = ax_0^2 + bx_0 + c = k_{var}(x_0)$
Kurzfristige Preisuntergrenze p_{kf} bei Menge x_0: $k_{var}(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = p_{kf}$ bzw. $G(x_0) = p_{kf}x_0 – ax_0^3 – bx_0^2 – cx_0 – d = -d = -K_{fix}$
Betriebsoptimum bei Ausbringungsmenge x_0: $k'(x_0) = 2ax_0 + b – d/x_0^2 = 0$ bzw.: $K'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = ax_0^2 + bx_0 + c + d/x_0 = k(x_0)$
Langfristige Preisuntergrenze p_{lf} bei Menge x_0: $k(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c + d/x_0 = p_{lf}$ bzw. $G(x_0) = p_{lf}x_0 – ax_0^3 – bx_0^2 – cx_0 – d = 0$

III. Es sind damit im Folgenden die Unbekannten a, b, c, d und p zu bestimmen, wobei die vorgenannten Bedingungen (1) bis (5) Verwendung finden (Bestimmungsaufgabe für Polynome). Und zwar gilt:

(1) $K(0) = K_{fix} = \underline{d = 8}$.
(2) $k(4) = a·4^2 + b·4 + c + d/4 = 16a + 4b + c + 2 = 6$ => $\underline{16a + 4b + c = 4}$.
(3) $k_{var}'(3) = 2a·3 + b = 0$ => $\underline{6a + b = 0}$.
(4) $\underline{p = 8}$ => $E(x) = 8x$.
(5) $G(5) = p·5 – a·5^3 – b·5^2 – c·5 – d = 40 – 125a – 25b – 5c – 8 = 4,5$ =>
$\underline{125a + 25b + 5c = 27,5}$.

IV. Es ergibt sich also aus der Auswertung der Bedingungen (1) bis (5) ein lineares Gleichungssystem, das mit dem Gauß-Algorithmus lösbar ist. Die Lösungen (a, b, c) lauten neben d = 8 und p = 8 auf Grund der folgenden Umformungen:

Lineares Gleichungssystem:

$+ 16a + 4b + 1c = 4$

$+ 6a + 1b = 0$

$+ 125a + 25b + 5c = 27,5$

Anfangstableau:

16 4 1 | 4

6 1 0 | 0

125 25 5 | 27.5

1. Schritt: 8*(*2*) - 3*(*1*) / 16*(*3*) - 125*(*1*)

16 4 1 | 4

0 -4 -3 | -12

0 -100 -45 | -60

2. Schritt: -1*(*3*) + 25*(*2*)

16 4 1 | 4

0 -4 -3 | -12

0 0 -30 | -240

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 16a + 4b + 1c = 4$

$- 4b - 3c = -12$

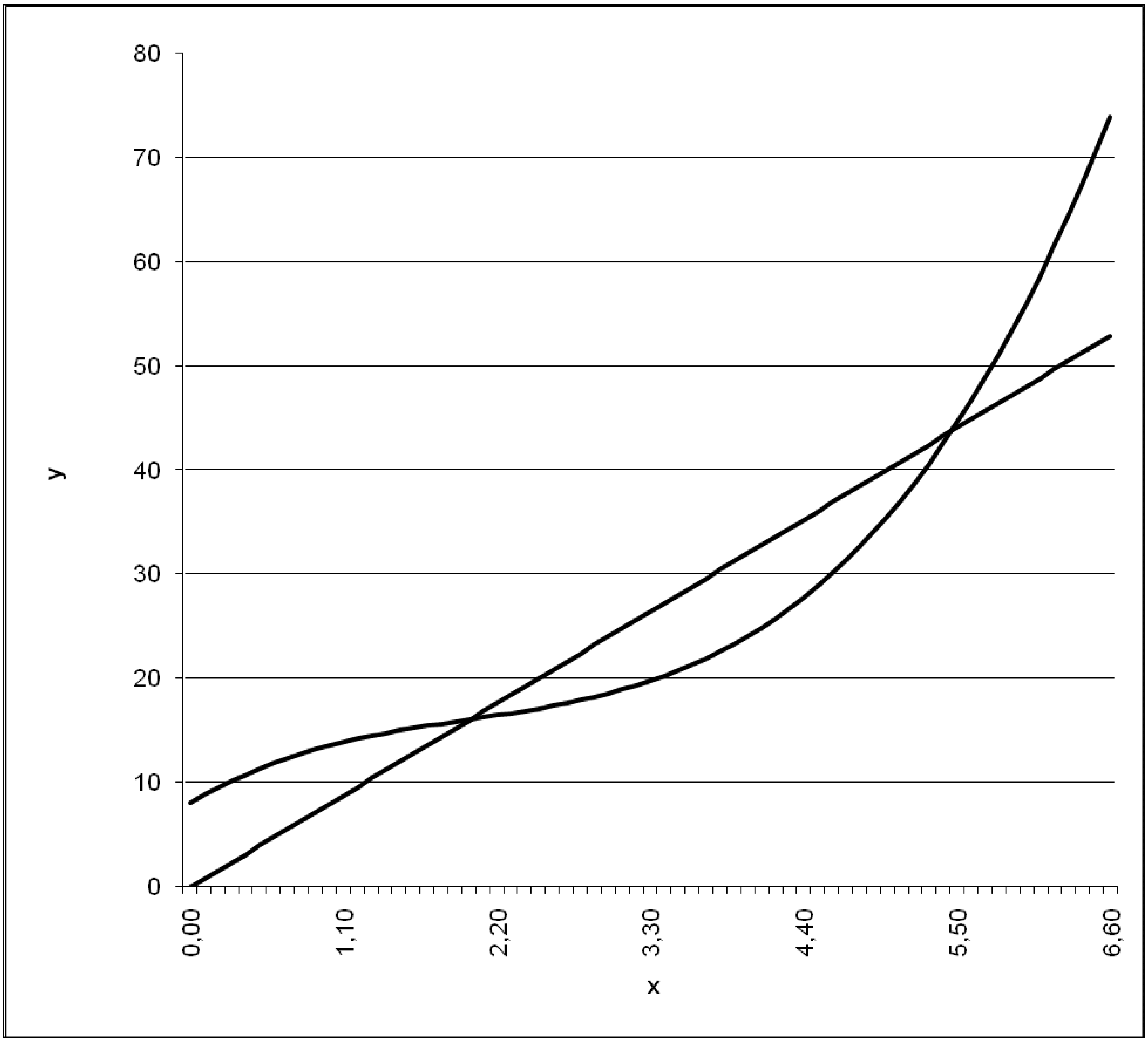
$- 30c = -240$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
c = 8, b = -3, a = 0.5.

Insgesamt lauten die gesuchten Funktionen:

$K(x) = 0,5x^3 – 3x^2 + 8x + 8$ (Kostenfunktion [GE])
$E(x) = 8x$ (Erlösfunktion [GE])
$G(x) = -0,5x^3 + 3x^2 – 8$ (Gewinnfunktion [GE]; Gewinnfunktion als Differenz von Erlös- und Kostenfunktion).

V. Die Zeichnung der Schaubilder von Kosten- und Erlösfunktion K(x) und E(x) ergibt die nachstehenden Kurven im Koordinatensystem:



Erlös E(x), Gesamtkosten K(x)

VI. Bei <u>Nutzenschwelle</u> und <u>Nutzengrenze</u> gilt:

$$E(x) = K(x) ,$$

also wegen $E(x) – K(x) = 0$:

$$G(x) = 0 .$$

Zur Bestimmung von Nutzenschwelle (break even point) und Nutzengrenze ist also die Gleichung:

$$-0{,}5x^3 + 3x^2 – 8 = 0$$

zu lösen. Damit ergibt sich:

$$0{,}5x^3 – 3x^2 + 8 = 0$$

und aus der obigen Zeichnung eine Lösung x = 2 ME, so dass eine Polynomdivision zu:

$(0{,}5x^3 – 3x^2 + 8):(x–2) = 0{,}5x^2 – 2x – 4$
$\underline{-(0{,}5x^3–x^2)}$
$\quad -2x^2 + 8$
$\quad \underline{-(-2x^2+4x)}$
$\qquad -4x + 8$
$\qquad \underline{-(-4x+8)}$
$\qquad\quad 0$

führt. Die quadratische Gleichung:

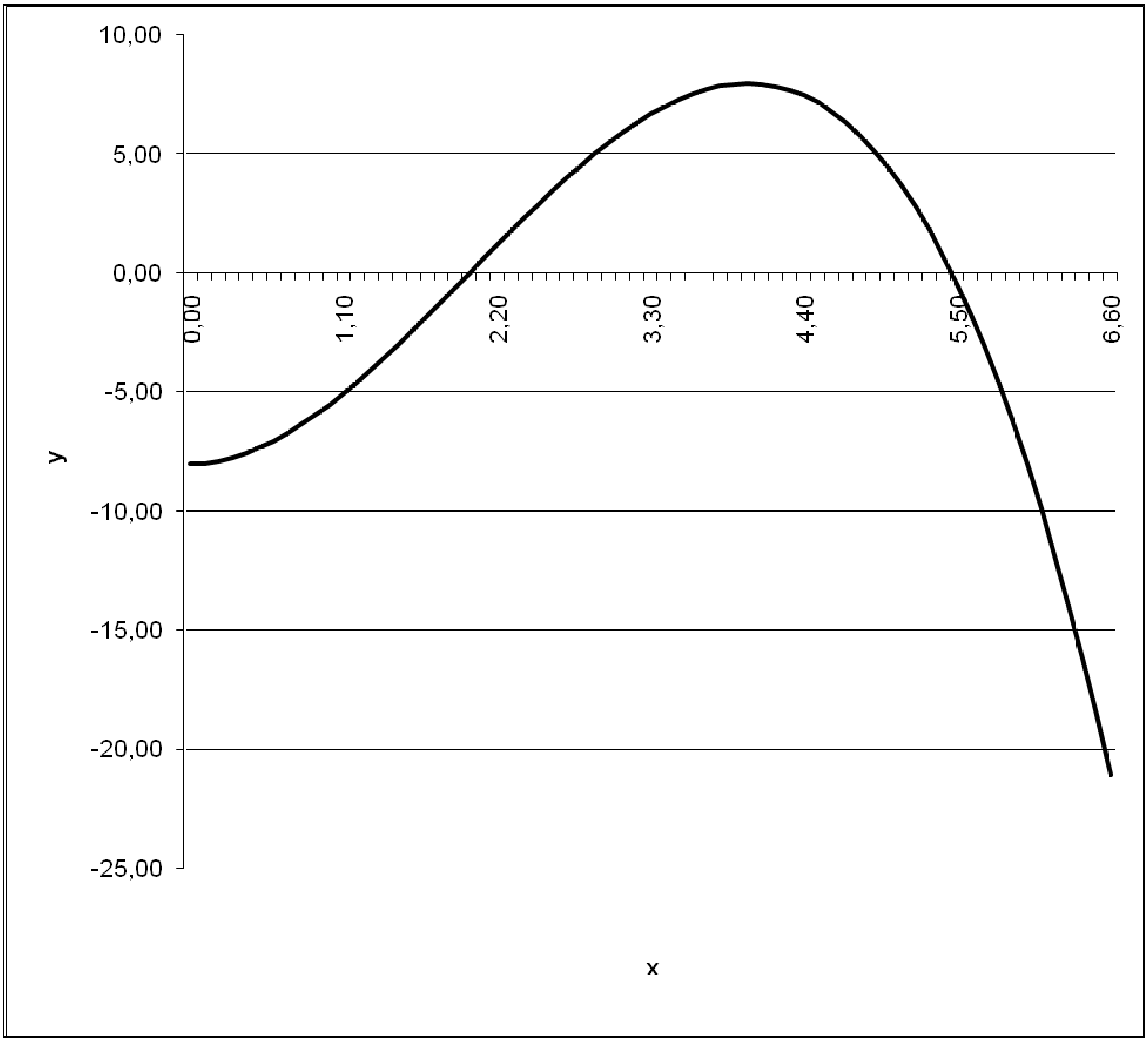
$$0{,}5x^2 – 2x – 4 = 0$$

hat dann die weiteren Lösungen:

$$[x = -3{,}46],\ x = 5{,}46\ ,$$

wobei die negative Lösung wegfällt. Nutzenschwelle ist also: x = 2 ME mit G(2) = 0 GE, Nutzengrenze x = 5,46 ME mit G(5,46) = 0 GE. Die Gewinnzone des Unternehmens liegt zwischen Nutzenschwelle und Nutzengrenze.

VII. Die <u>Gewinnfunktion</u> $G(x) = -0{,}5x^3 + 3x^2 – 8$ besitzt den Graphen:



Gewinnfunktion G(x)

VIII. Die <u>Produktionsmenge</u> x <u>mit</u> dem <u>maximalen Gewinn</u> errechnet sich aus dem Nullsetzen der Ableitung, mithin des Grenzgewinns:

$$G'(x) = 0$$

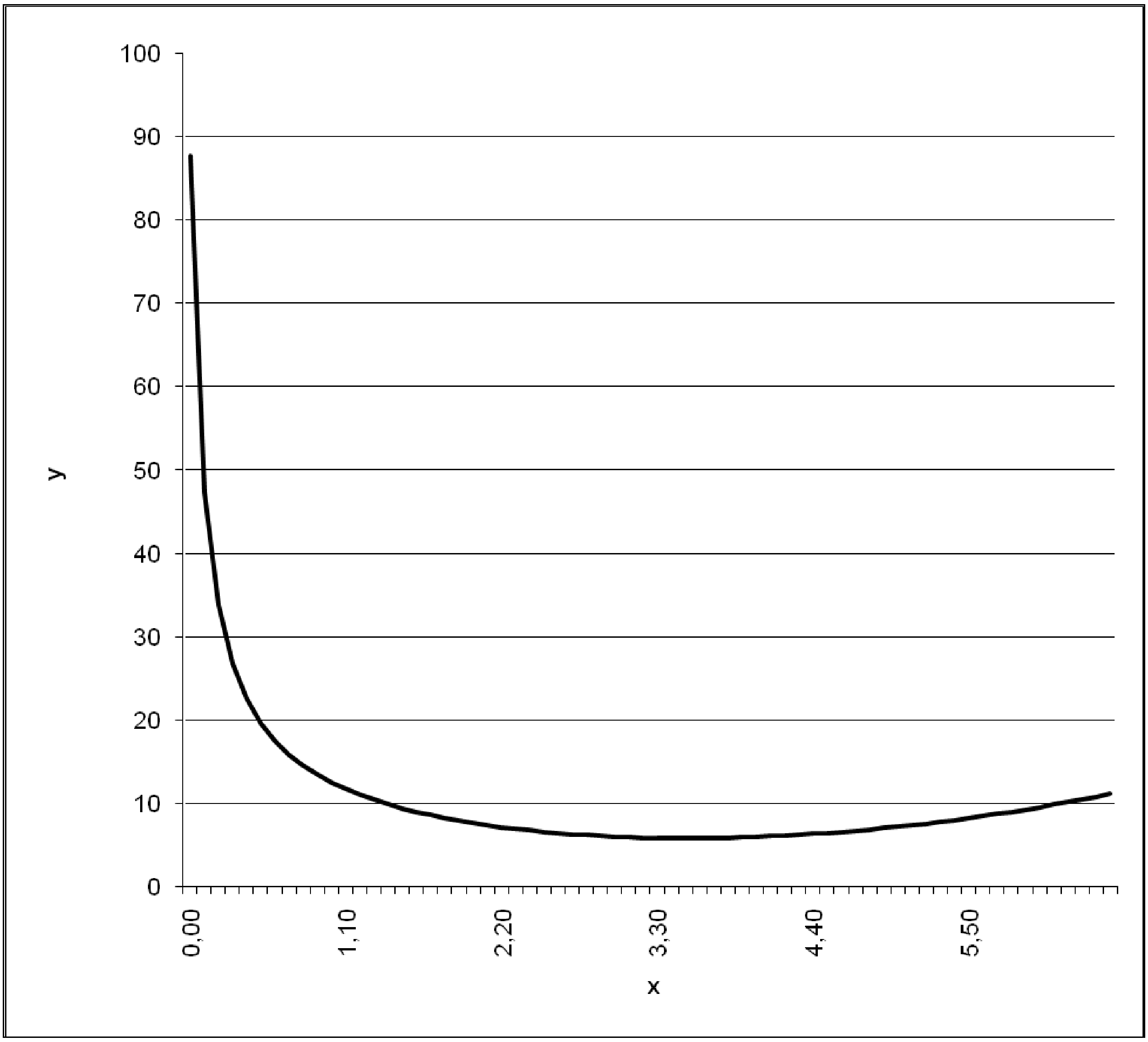
Also ergibt sich mit $G'(x) = = -1{,}5x^2 + 6x$:

$$-1{,}5x^2 + 6x = 0$$
$$x(-1{,}5x+6) = 0$$
$$x = 0,\ -1{,}5x+6 = 0$$
$$x = 0,\ 6 = 1{,}5x$$
$$[x=0],\ x = 4$$

Wegen $G''(x) = -3x + 6$ und $G''(4) = -3·4 + 6 = -6 < 0$ liegt bei der Produktionsmenge x = 4 ME das Gewinnmaximum vor. Der maximale Gewinn beträgt:

$$G(4) = 8 \text{ GE}.$$

IX. Die Stückkostenfunktion $k(x) = K(x)/x$, $x > 0$, lautet: $k(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 8 + 8/x$ und hat das Aussehen:



Durchschnittskosten k(x)

Das Minimum der Stückkosten k(x) errechnet sich mit:

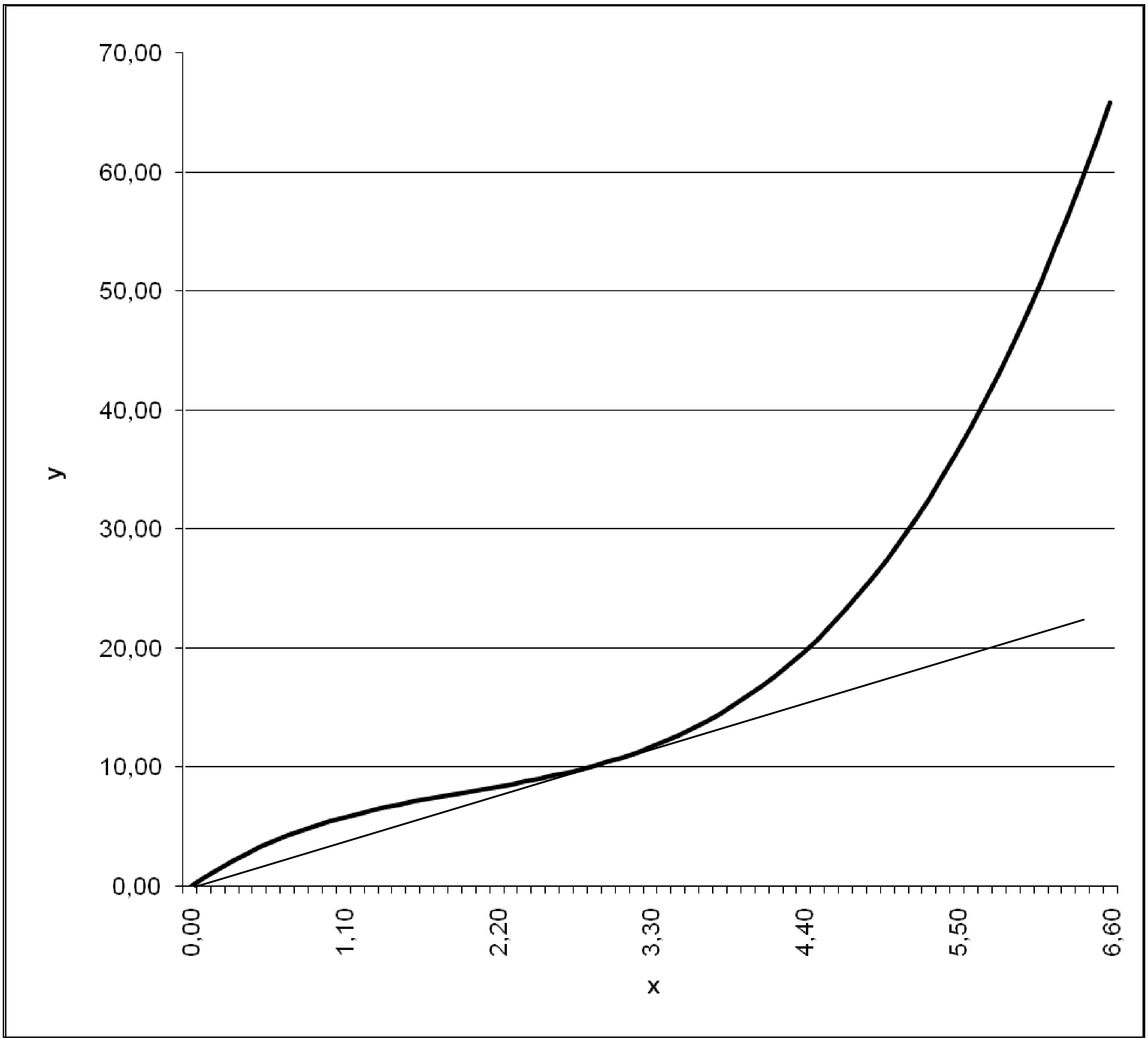
$$k'(x) = 0 \,,$$

also mit $k'(x) = x - 3 - 8/x^2$ aus:

$$x - 3 - 8/x^2 = 0$$
$$x^3 - 3x^2 - 8 = 0$$

U.a. aus der Zeichnung der Durchschnittskostenfunktion kann man das Minimum $x = 3{,}6$ ME entnehmen mit $k(3{,}6) = 5{,}9$ GE als minimalen Durchschnittskosten. Die Ausbringungsmenge der minimalen Stückkosten ist identisch mit dem Betriebsoptimum.

X. Bzgl. der Kostenfunktion $K(x)$ kann jetzt das Betriebsminimum oder die kurzfristige Preisuntergrenze $k_{var}(x_{min})$ bestimmt werden. Im Betriebsminimum x_{min} stimmen die (variablen) Grenzkosten $K' = K'_{var}$ mit den variablen Stückkosten k_{var} überein, die Grenzkosten schneiden die Funktion der variablen Stückkosten in deren Minimum. Die kurzfristige Preisuntergrenze stellt den Marktpreis $k_{var}(x_{min}) \leq p$ dar, zu dem im Betriebsminimum das Unternehmen die Warenmenge x_{min} absetzen kann, wenn es bereit ist, dabei einen Verlust in Höhe der fixen Kosten K_{fix} zu machen, also: $G(x_{min}) = -K_{fix}$. Grafisch stellt sich das Betriebsminimum als die Stelle dar, wo die Tangente vom Koordinatenursprung die Funktion der variablen Gesamtkosten $K_{var}(x)$ berührt. Hier ist: $K_{var}(x) = 0,5x^3 – 3x^2 + 8x$.



Variable Gesamtkosten $K_{var}(x)$, Ursprungstangente an $K_{var}(x)$

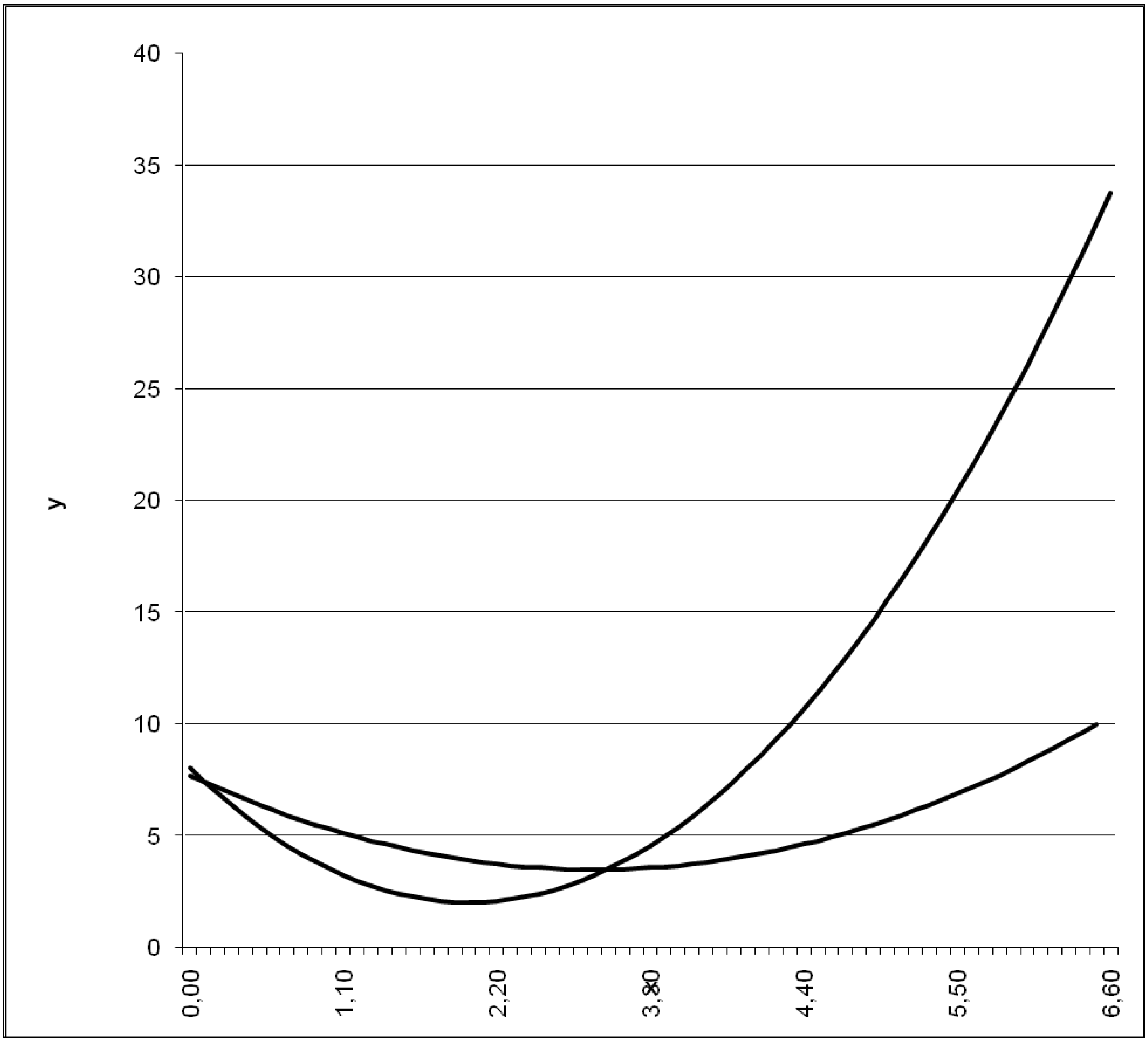
Rechnerisch gilt auf Grund der Tatsache, dass an der Stelle x die Tangentensteigung $K_{var}'(x)$ identisch mit der Steigung der Gerade durch den Ursprung O(0|0) und den Punkt $P(x|\ K_{var}(x))$ sein muss:

$$k_{var}(x) = K_{var}(x)/x = K_{var}'(x)$$

und damit:

$$(0,5x^3 – 3x^2 + 8x)/x = 1,5x^2 – 6x + 8$$
$$0,5x^2 – 3x + 8 = 1,5x^2 – 6x + 8$$
$$x^2 – 3x = 0$$
$$x(x–3) = 0$$
$$[x = 0],\ x = 3$$

gemäß der Bedingung (3) in 1). Die kurzfristige Preisuntergrenze $k_{var}(3) = 3,5$ GE liegt beträchtlich unter dem hier angenommenen Marktpreis p = 8 GE.



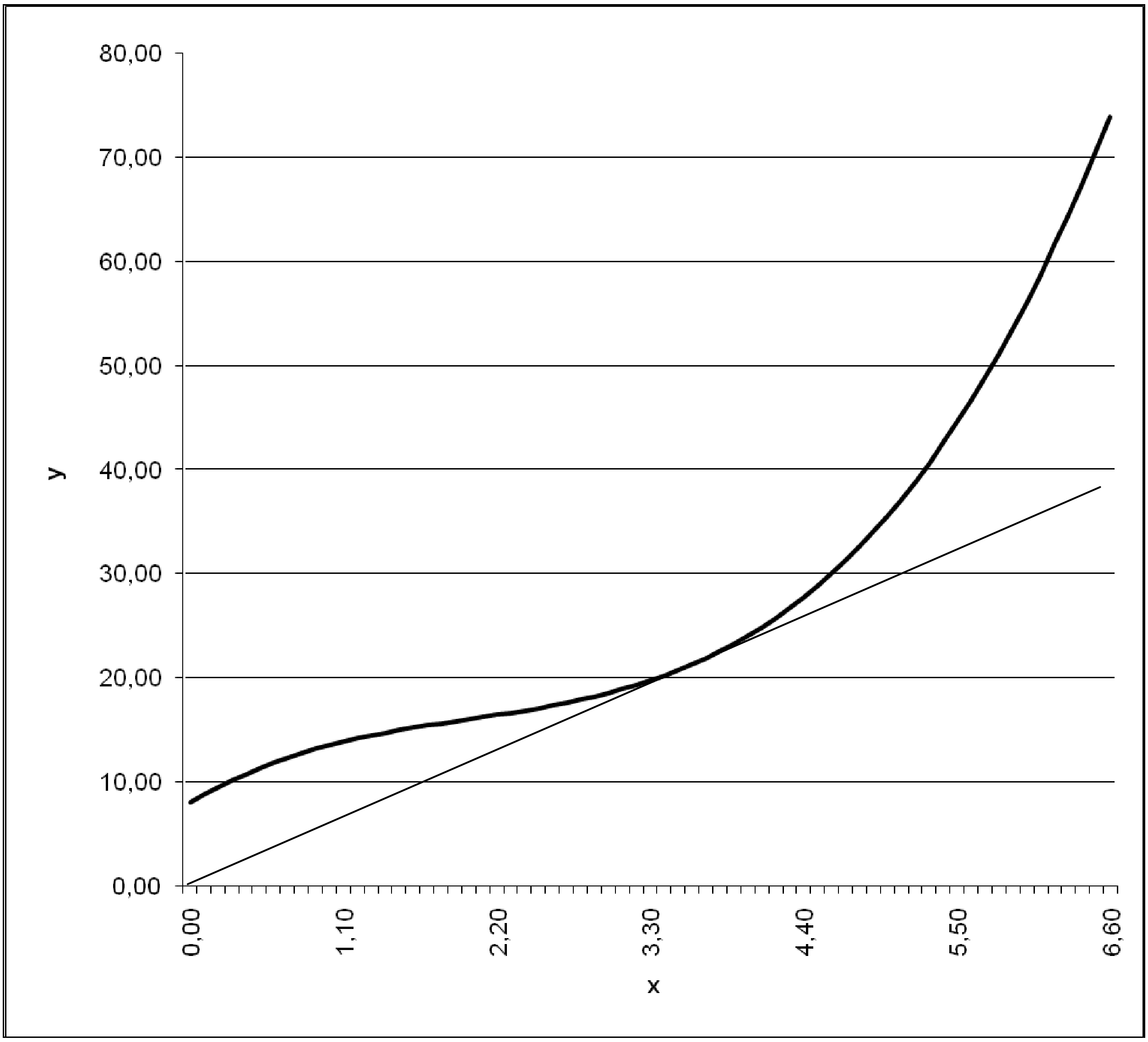
Grenzkosten K‘(x), variable Stückkosten $k_{var}(x)$

Da sich das Betriebsminimum nur auf die variablen Stückkosten bezieht, haben Änderungen bei den Fixkosten K_{fix} (etwa Senkung um 2 GE) hierauf keine Auswirkung. Entsprechendes gilt auch für die Ausbringungsmenge im Gewinnmaximum, da die Grenzkosten dieselben bleiben und G‘(x) = 0, also E‘(x) = K‘(x) gilt. Hingegen erhöht sich im (gleich bleibenden) Gewinnmaximum der maximale Gewinn um 2 GE, wenn die Fixkosten um 2 GE sinken.

XI. Eine weitere Vorgehensweise ergibt sich für die Ermittlung des Betriebsoptimums wie folgt. Bzgl. der Kostenfunktion K(x) entspricht das Betriebsoptimum der Ausbringungsmenge x_{opt}, bei der die gesamten Stückkosten minimal sind. Die langfristige Preisuntergrenze kann als $k(x_{opt})$ bestimmt werden. Des Weiteren lässt sich das Betriebsoptimum grafisch als die Ausbringungsmenge bestimmen, wo die Tangente vom Koordinatenursprung die Funktion der Gesamtkosten K(x) berührt mit: $K(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 8x + 8$.
Rechnerisch gilt:

$$k(x) = K(x)/x = K'(x)$$
$$(0{,}5x^3 - 3x^2 + 8x + 8)/x = 1{,}5x^2 - 6x + 8$$
$$0{,}5x^2 - 3x + 8 + 8/x = 1{,}5x^2 - 6x + 8$$
$$x^2 - 3x - 8/x = 0$$
$$x^3 - 3x^2 - 8 = 0$$
$$x = 3{,}6$$

Das Betriebsoptimum liegt bei x = 3,6 ME (siehe auch weiter oben), die langfristige Preisuntergrenze ist k(3,6) = 5,9 GE.



Gesamtkosten K(x), Ursprungstangente an K(x)

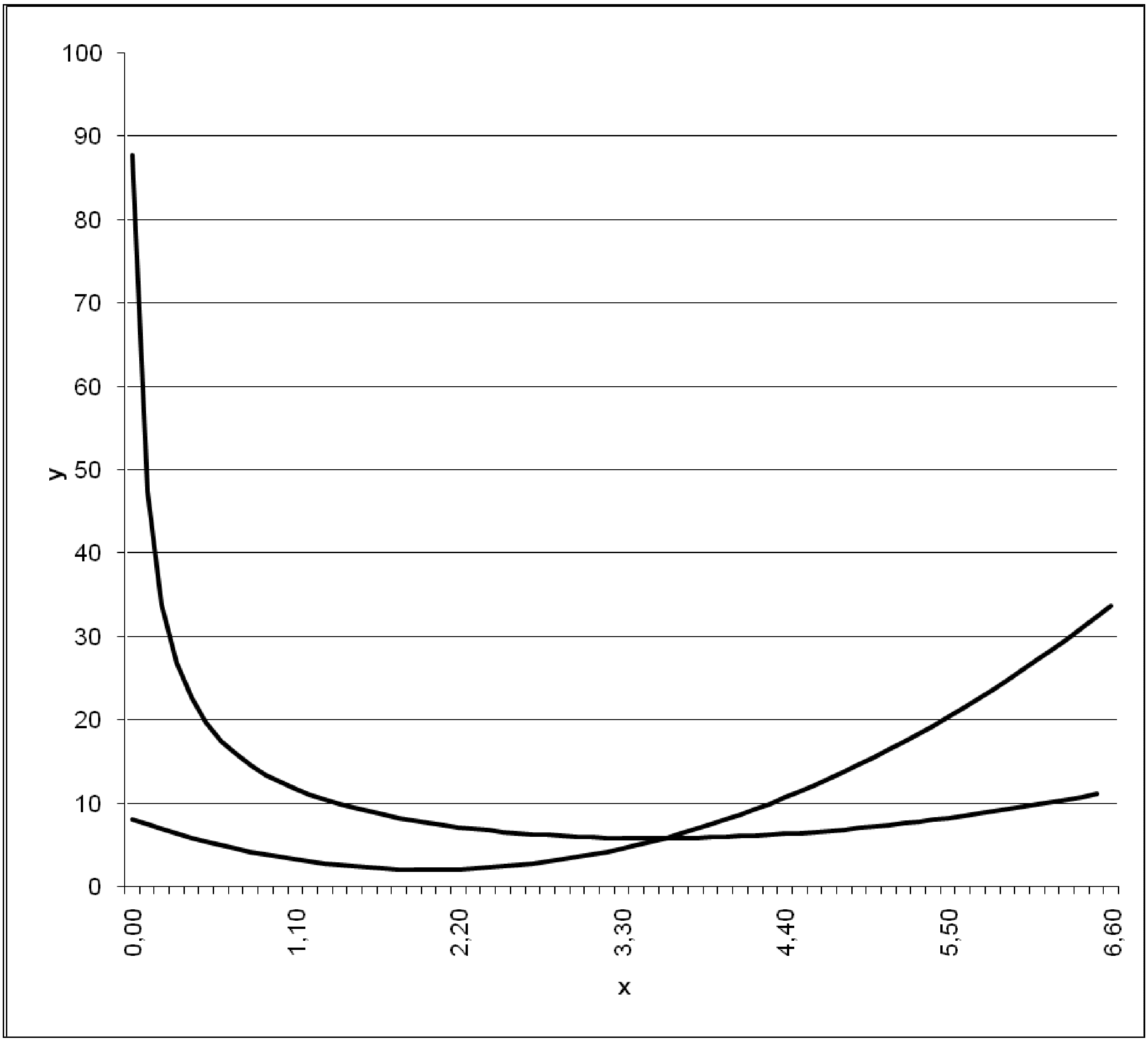
XII. Die <u>Ausbringungsmenge</u> x <u>mit minimalem Kostenzuwachs</u> ist die Menge x_{mg} mit: $K''(x_{mg}) = 0$, also dort, wo die Kostenfunktion K(x) ihren Wendepunkt besitzt. Damit gilt hinsichtlich dieses Minimums der Grenzkosten bei:

$$K(x) = 0{,}5x^3 – 3x^2 + 8x + 8$$
$$K'(x) = 1{,}5x^2 – 6x + 8$$
$$K''(x) = 3x – 6$$

die folgende Gleichung:

$$K''(x) = 0$$
$$3x – 6 = 0$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Das Minimum gibt damit an, dass bei der Ausbringungsmenge x_{mg} = 2 ME die Gesamtkosten am geringsten steigen.



Grenzkosten K‘(x), Stückkosten k(x)

XIII. Während wir bisher die Situation eines Unternehmens in einem Polypol eines vollkommenen Marktes beschrieben haben, soll nun die Unternehmung die Stellung eines Monopolisten am Markt einnehmen (Angebotsmonopol). Die Erlösfunktion (als Parabel) ist nun:

$$E^*(x) = -3x^2 + 32x$$

bei unveränderten Gesamtkosten:

$$K(x) = 0{,}5x^3 – 3x^2 + 8x + 8.$$

Nutzenschwelle x = 3,3 ME und Nutzengrenze x = 6,75 ME sind aus der Gleichung

$$E^*(x) = K(x)$$

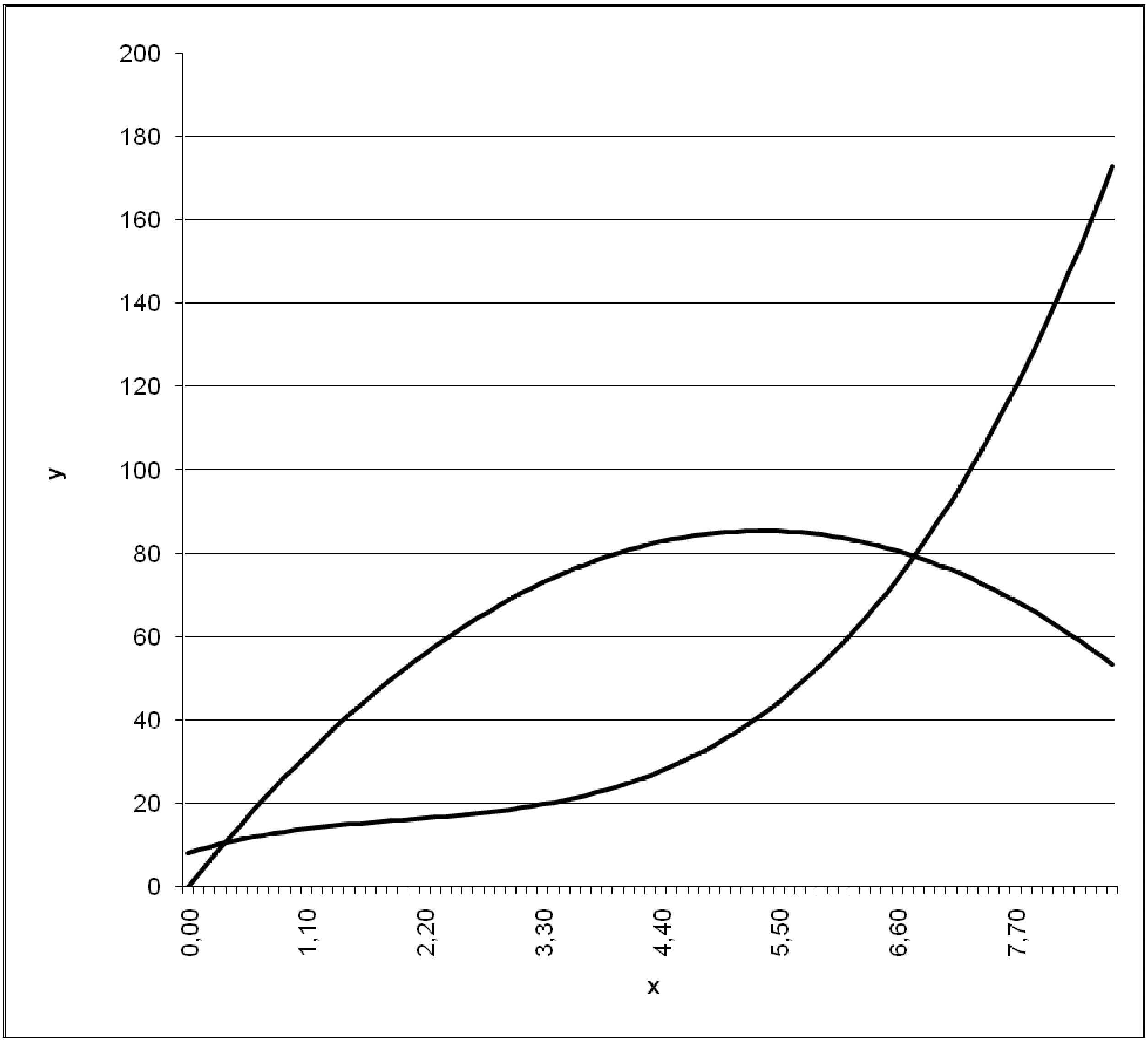
zu bestimmen, die Gewinnfunktion G(x) ist: G(x) = E*(x) – K(x), also:

$$G(x) = -0{,}5x^3 + 24x – 8$$

mit:

$$G'(x) = -1{,}5x^2 + 24$$
$$G''(x) = -3x$$

als Ableitungen.



Erlös E(x), Gesamtkosten K(x)

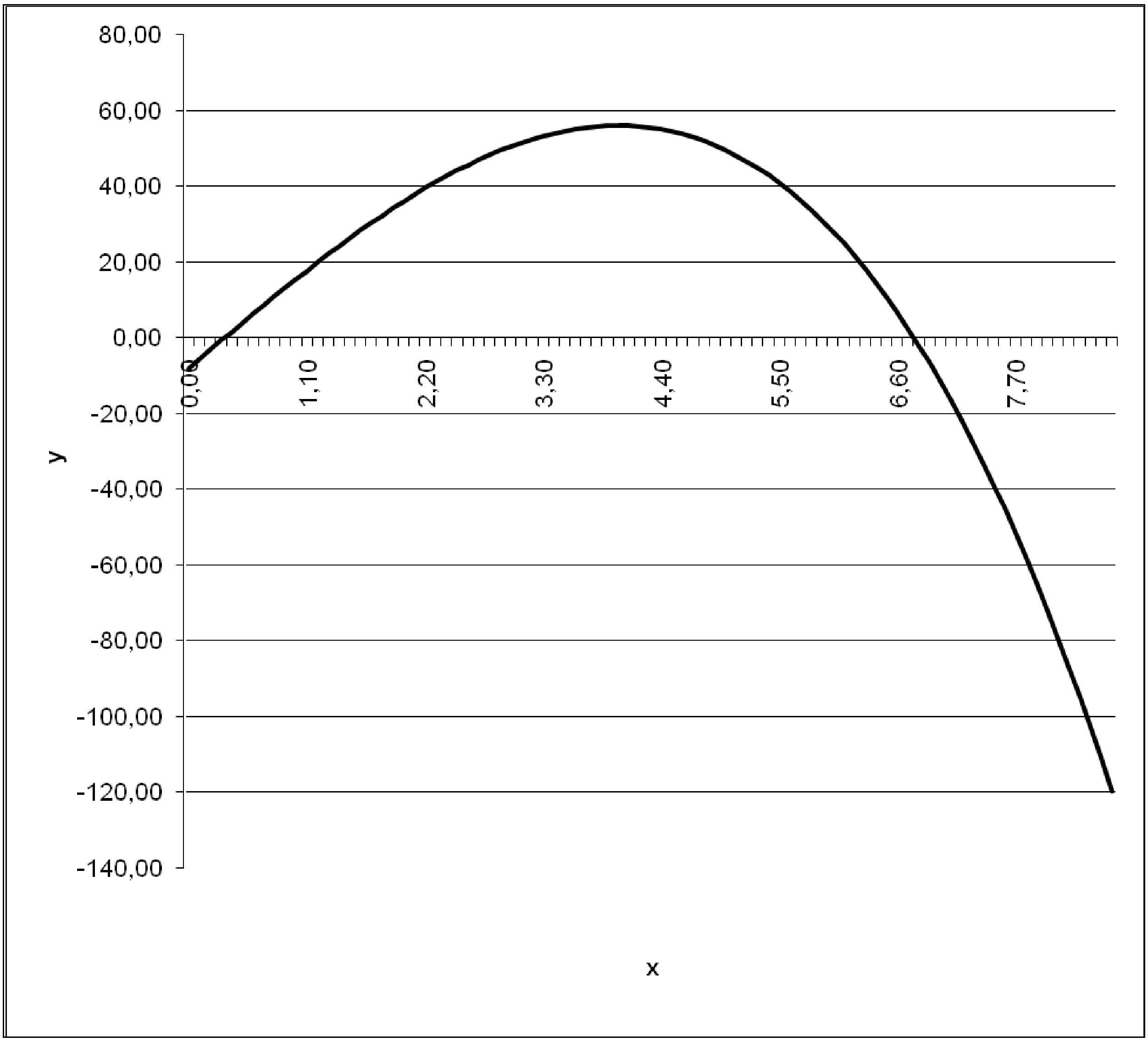
Zur Ermittlung des Gewinnmaximums ist wieder die 1. Ableitung gleich 0 zu setzen, also:

$$G'(x) = 0$$
$$-1{,}5x^2 + 24 = 0$$
$$24 = 1{,}5x^2$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$

Hier ist x = 4 ME die Lösung wegen $G''(4) = -12 < 0$ (Maximum) und mit G(4) = 56 GE. Der Erlös des Unternehmens beträgt bei der gewinnmaximalen Ausbringungsmenge x = 4 ME: E*(4) = 80 GE. Der Verkaufspreis p* ergibt sich als:

$$p^* = E^*(x)/x$$

und mithin als: p* = 80/4 = 20 GE. Der Verkaufspreis liegt also beträchtlich höher als p = 8 GE in der weiter oben dargestellten Polypolsituation des Unternehmens.
Abschließend sei noch die Gewinnfunktion $G(x) = -0{,}5x^3 + 24x – 8$ skizziert mit dem Gewinnmaximum bei der Ausbringungsmenge x = 4 ME.



Gewinnfunktion G(x)

IV.4 Beispiel: Durch die nachfolgenden theoretischen Überlegungen wollen wir folgenden, schon oben angesprochen Sachverhalt nachweisen: Es gilt unter den Voraussetzungen einer kubischen Kostenfunktion hinsichtlich des Verhältnisses der Ausbringungsmengen bei minimalen Grenzkosten (x_{mg}) und beim Betriebsminimum (x_{min}): $x_{mg} : x_{min} = 2 : 3$.
Die Kostenfunktion sei: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, die variablen Kosten sind daher: $K_{var}(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, die variablen Stückkosten: $k_{var}(x) = ax^2 + bx + c$. Im Betriebsminimum sind die variablen Stückkosten minimal, d.h. für die entsprechende Ausbringungsmenge x_{min} gilt: $k'_{\text{var}}(x_{\min}) = 0$. Also ergibt sich mit $k'_{var}(x) = 2ax + b$ die Gleichung:

$$k'_{var}(x) = 0$$
$$2ax + b = 0$$
$$2ax = -b$$
$$x = -b/2a$$

Damit ist $x_{min} = -b/2a$. Die Grenzkosten sind: $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Das Minimum der Grenzkosten wird erreicht bei x_{mg} mit: $K''(x_{mg}) = 0$. Wegen $K''(x) = 6ax + 2b$ rechnen wir:

$$K''(x) = 0$$
$$6ax + 2b = 0$$
$$6ax = -2b$$
$$x = -2b/6a = -b/3a$$

Es ist also: x_{mg} = -b/3a. Wir bilden nun das Verhältnis der beiden Ausbringungsmengen und erhalten:

$$\frac{x_{mq}}{x_{\min}} = \frac{\frac{-b}{3a}}{\frac{-b}{2a}} = \frac{b}{3a} \cdot \frac{2a}{b} = \frac{2}{3}$$

Damit gilt in der Tat: $x_{mg} : x_{min} = 2 : 3$.

Literatur

WÖHE, GÜNTER, Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, München [11]1975
WOLL, ARTUR, Allgemeine Volkswirtschaftslehre, München [7]1981

Essen 2010f