Michael Buhlmann

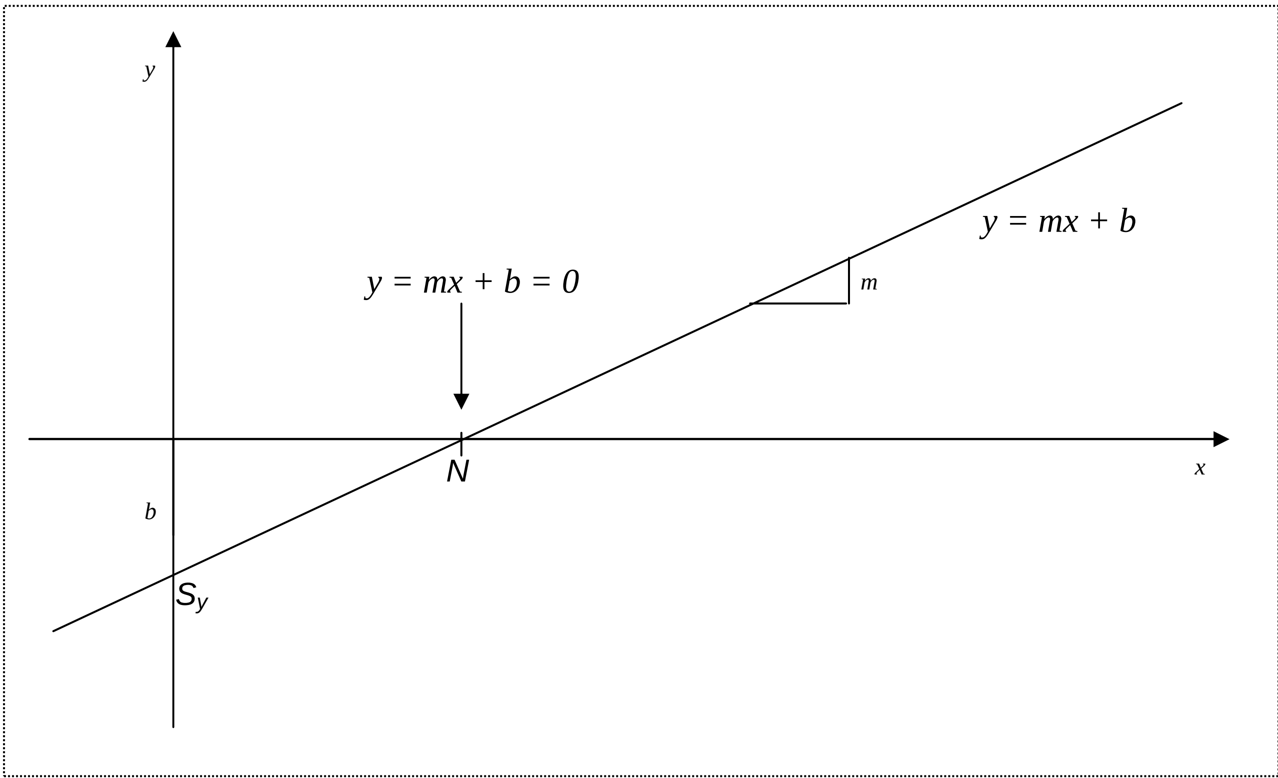
Mathematik > Funktionen > Geradenmodellierung

Lineare Funktionen g: y = mx + b lassen sich als <u>Geraden</u> im kartesischen x-y-Koordinatensystem darstellen. Dabei bedeutet die reelle Zahl m die Steigung der Geraden, die reelle Zahl b den y-Achsenabschnitt. Die Gerade schneidet die Achsen des Koordinatensystems im Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y(0|b)$ und der Nullstelle als Schnittpunkt mit der x-Achse N(-b/m|0). Die Geradensteigung m errechnet sich zwischen zwei Geradenpunkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ mit dem Differenzenquotienten als:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

der y-Achsenabschnitt b ergibt sich aus dem Schnittpunkt mit der y-Achse oder bei vorgegebenem m durch Einsetzen eines Punktes $P(x_1|y_1)$ (Punktprobe) in die Geradengleichung mit:

$$b = y_1 – mx_1.$$



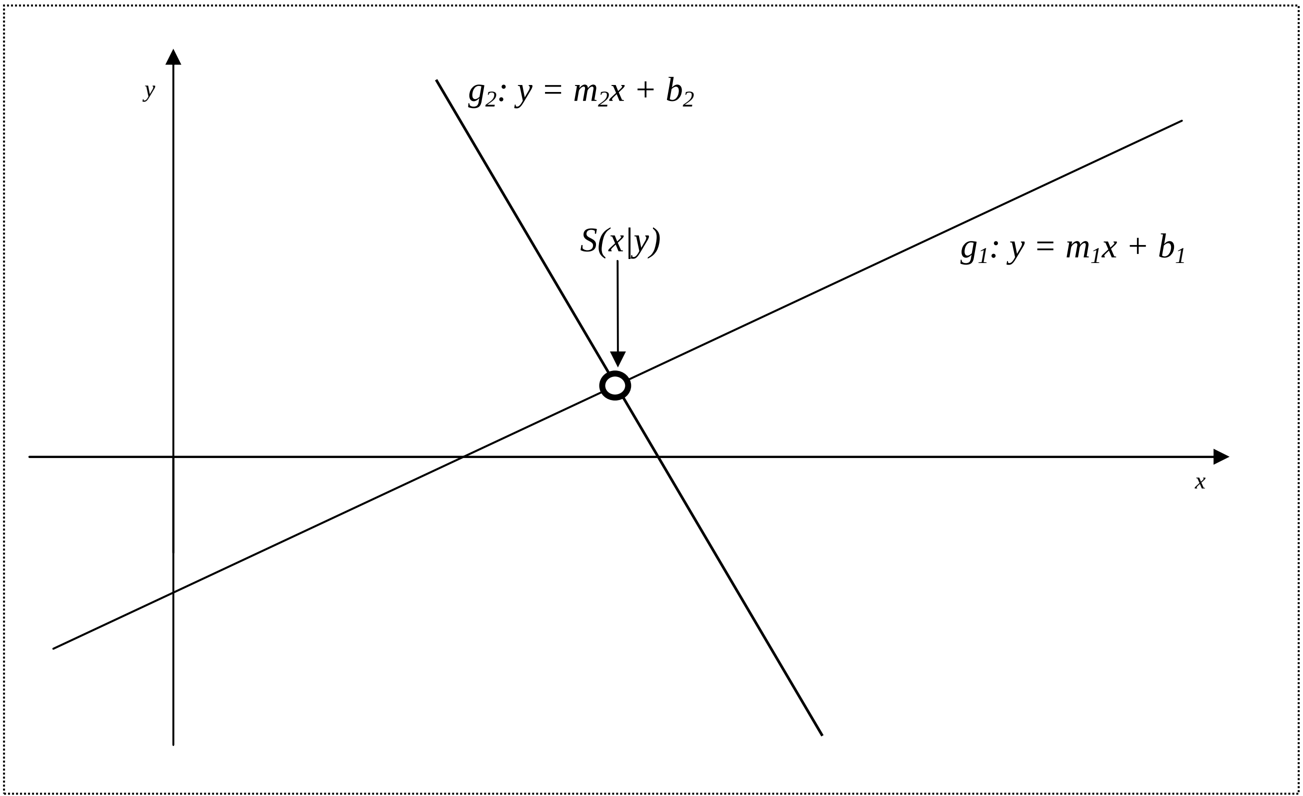
Sind zwei lineare Funktionen g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$ gegeben, so interessiert im Fall, dass die Geraden nicht parallel zueinander liegen, der Schnittpunkt der Geraden, d.h. es gilt:

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2 \Rightarrow$$

$$x = x_S = -\frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} \Rightarrow$$

$$y_S = -\frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} m_1 + b_1 = -\frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} m_2 + b_2$$

mit: $S(x_S|y_S) = S(-\frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} | -\frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} m_1 + b_1) = S(-\frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} | -\frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} m_2 + b_2)$ als Schnittpunkt.



Modellierung ist das Übertragen von realen Sachverhalten in ein mathematisches Modell zum Zweck der Anwendung mathematischer Methoden beim Lösen von realen Problemen. Einfache mathematische Modelle lassen sich mit Hilfe von linearen Funktionen und Geraden gestalten.

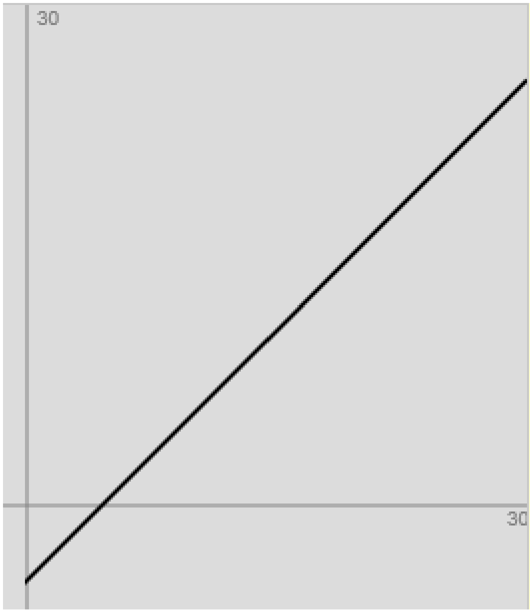
Beispiel 1: Für ein Schulfest besorgt eine Schulklasse Orangensaft, um diesen zu verkaufen. Ein 5-Liter-Kanister Orangensaft kostet € 4,50, ein 0,2-Liter-Glas Orangensaft soll beim Schulfest für € 1,- verkauft werden. Wie viele Getränke müssen pro Kanister verkauft werden, damit sich der Kauf des Orangensaftes durch die Schulklasse lohnt, mit welchem Gewinn ist maximal zu rechnen?

Lösung: Pro Kanister stehen Kosten in Höhe von € 4,50 Einnahmen in Höhe von € 1x entgegen, wobei die Variable x [Anzahl] für die Anzahl der verkauften Gläser Orangensaft steht. Wir erhalten mit b=-4,5 und m=1 die lineare Funktion (Gerade) $y = x – 4,5$ [€] mit: $0 \leq x \leq 25$ (= 5 Liter / 0,2 Liter) definiert ist.

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	-4,5	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5
x	8	9	10	11	12	13	14	15
y	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5
x	16	17	18	19	20	21	22	23
y	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5	18,5
X	24	25						
y	19,5	20,5						

Graph:



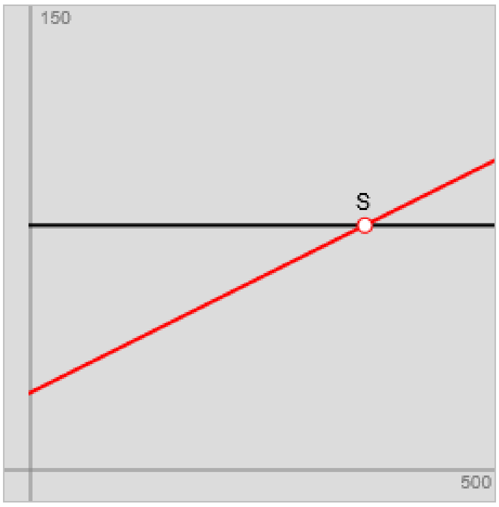
Wird kein Glas Orangensaft verkauft, ist also x=0, so beträgt der Verlust y = -4,50 €, werden alle 25 Gläser verkauft mit x = 25, so kommt ein Gewinn in Höhe von y = 25–4,50 = 20,50 € zusammen. Die Punkte P(0|-4,5) als y-Achsenabschnittspunkt und Q(25|20,5) liegen somit auf der Geraden und begrenzen diese. Der maximale Gewinn beträgt € 20,50. Der Wertetabelle entnimmt man zudem, dass ab dem fünften verkauften Glas ein Gewinn entsteht. Nullsetzen der Geradengleichung führt dementsprechend auf:

y = 0 => x–4,5 = 0 => x = 4,5

als Grenze zur Gewinnzone des Orangensaftverkaufs.

Beispiel 2: Verglichen werden sollen die Tarife zweier Autovermieter für einen Mietwagen desselben Typs. Autovermieter A verlangt für drei Tage pauschal einen Betrag von € 79,-, Autovermieter B für denselben Zeitraum eine Grundpauschale von € 25,- und zusätzlich € 0,15 pro gefahrenem Kilometer. Bei welchen Kilometerzahlen ist Autovermieter A, bei welchen Autovermieter B günstiger?

Lösung: Wir stellen zunächst die linearen Funktionen (Geraden) der Autovermieter A und B hinsichtlich der zu fahrenden (gefahrenen) Kilometer x [km] und der daraus resultierenden Kosten y [€] auf. Für den Autovermieter A ergibt sich wegen des Pauschalbetrags von € 79,- die konstante Funktion: A: y = 79. Für den Autovermieter B gilt wegen der Grundpauschale b = € 25,- und den Kosten pro gefahrenem Kilometer m = € 0,15 die Gerade: B: y = 0,15x + 25. Einzeichnen der beiden Geraden A und B in ein x-y-Koordinatensystem führt auf:



Die Graphen der beiden linearen Funktionen schneiden sich im Schnittpunkt S, der als Kilometergrenze dafür gelten kann, ab der der eine Autovermieter günstiger als der andere ist. Die Ermittlung des Schnittpunkts erfolgt durch Gleichsetzen der Geraden A und B:

y = 79 = 0,15x+25 ⇔ 54 = 0,15x ⇔ x = 360.

Bei x = 360 km sind die anfallenden Kosten in Höhe von y = 79 € bei beiden Autovermietern gleich hoch. Bis 360 gefahrenen Kilometer ist somit der Autovermieter B günstiger, ab 360 km der Autovermieter A. Beim Buchen eines Mietwagens sollte man also schon vorher wissen, wie viel Kilometer damit gefahren werden sollen.

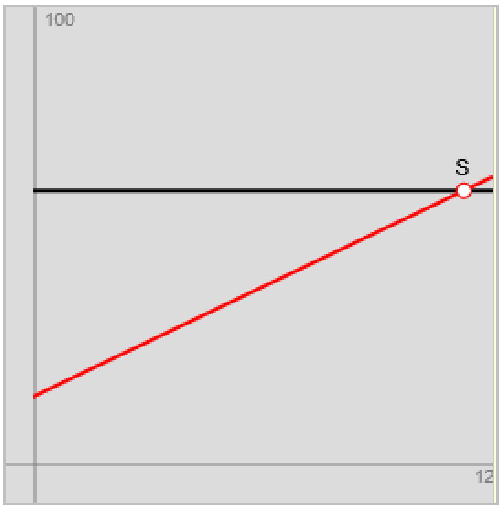
Beispiel 3: Bezogen auf ein Kalenderjahr (12 Monate) sollen Handytarife miteinander verglichen werden. Ein Prepaidtarif P benötigt einmal im Jahr eine Aufladung in Höhe von € 15,-, ansonsten werden monatsweise nach Bedarf Internet-Flats zu je € 3,99 zugebucht. Dagegen kostet ein vertraglich gebundener Smartphonetarif V mit begrenztem Datenvolumen € 4,99 pro Monat. Stelle die Tarife P und V grafisch dar. Welcher Tarif ist günstiger?

Lösung: Wir stellen zunächst die linearen Funktionen (Geraden) der Tarife P und V bezogen auf ein Jahr dar. Beim Vertragstarif V sind im Jahr 12·4,99 = 59,88 € zu zahlen, beim Prepaidtarif P sind es € 15,- und zusätzlich € 3,99x mit x als Anzahl der Monate, für die eine Internetflat gebucht wurde, 0 ≤ x ≤ 12. Die Geraden lauten dementsprechend: P: y = 3,99x + 15, V: y = 59,88 [€]. Die Wertetabellen der beiden linearen Funktionen lauten:

	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	y	15,00	18,99	22,98	26,97	30,96	34,95	38.94	42,93	46,92	50,91	54,90	58,89	62,88
V	y	59,88	59,88	59,88	59,88	59,88	59,88	59,88	59,88	59,88	59,88	59,88	59,88	59,88

Schon aus den Wertetabellen ist ablesbar, dass sich der Vertragstarif V erst lohnt, wenn beim Prepaidtarif P 12 Mal eine Internet-Flat zugebucht wurde. Grafisch erkennt man dies auch am Geradenschnittpunkt

S(11,25|59,88) gemäß:

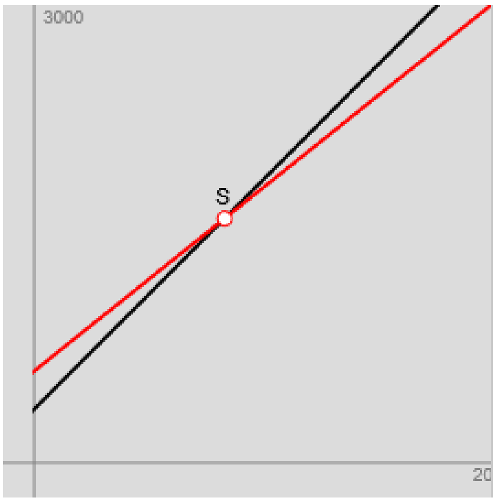


bzw. gemäß:

y = 59,88 = 3,99x+15 ⇔ 44,88 = 3,99x ⇔ x = 11,25.

Beispiel 4: Ein produzierendes Unternehmen will Waren im Umfang von einigen Tonnen verschicken. Dazu stehen die Alternativen LKW (L) und Bahn (B) zur Verfügung. Pro LKW sind mit Be- und Entladungskosten in Höhe von € 350,- zu rechnen, die Kosten pro Tonne Ladung betragen € 150,-. Bei der Bahn fallen (mit Anfahrt zum Bahnhof) Be- und Entladungskosten in Höhe von € 600,- an; hier sind pro Tonne Ladung beim Versand € 120,- zu veranschlagen. Ab wie viel Tonnen Ladung ist der Transport mit der Bahn günstiger?

Lösung: Die Menge der verschickten Waren sei x [t], die Kosten des Versands werden durch die Variable y [€] beschrieben. Für den LKW-Versand können demgemäß veranschlagt werden: L: y = 150x+350, für den Bahn-Versand B: y = 120x+600.



Der Warenversand mit der Bahn ist ab der durch den Schnittpunkt S angegeben Tonnenzahl x günstiger. Der Schnittpunkt errechnet sich als:

y = 150x+350 = 120x+600 ⇔ 30x+350 = 600 ⇔ 30x = 250 ⇔ x = 25/3 ≈ 8,33.

Ab einer Ladung von 8,33 Tonnen ist also der Versand mit der Bahn günstiger.

Literaturhinweise: REINHARDT, F., dtv-Atlas Schulmathematik (= dtv 3099), München ^{3}2003, S.78f (lineare Funktionen).

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 02.2018