Michael Buhlmann

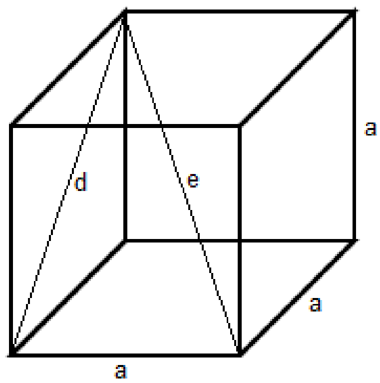
Mathematik-Formelsammlung
> Geometrie
> Geometrische Körper I

Geometrische Körper zeichnen sich durch ihre drei Dimensionen Länge, Breite, Höhe aus sowie durch ebene (Würfel, Quader, Prisma, Pyramide) und gekrümmte (Zylinder, Kegel, Kugel), durch die Körperkanten begrenzte Flächenstücke aus, die die Oberfläche des Körpers ausmachen. Jeder Körper besitzt dann besondere Eigenschaften z.B. hinsichtlich Oberfläche und Rauminhalt (Volumen).

Würfel

Ein aus sechs Quadraten bestehender Würfel – zueinander rechtwinklig angeordnet – ist durch seine Kantenlänge a gegeben, die die Grundfläche G, die Oberfläche O und das Volumen V bestimmt.

Würfel



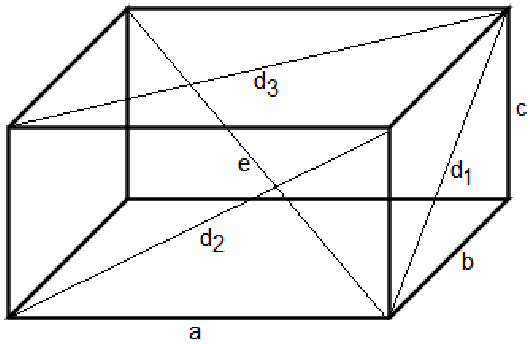
Grundfläche	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Oberfläche	$O = 6a^2$	$a = \sqrt{\frac{O}{6}}$	
Volumen	$V = a^3$	$a = \sqrt[3]{V}$	
Flächendiagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$	
Raumdiagonale	$e = a\sqrt{3}$	$a = \frac{e}{\sqrt{3}}$	

Würfel

Quader

Ein aus sechs Rechtecken bestehender Quader – zueinander rechtwinklig angeordnet – ist durch seine Kantenlängen a, b, c gegeben, die die Grundfläche G, die Oberfläche O und das Volumen V bestimmen.

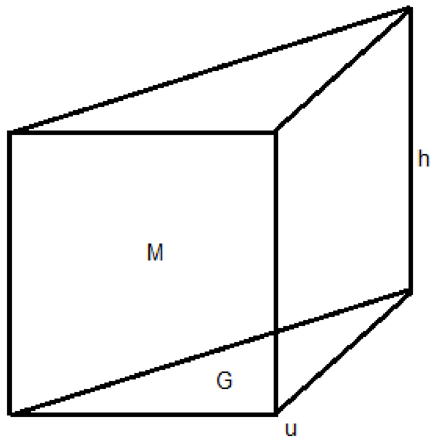
Quader



Grund-/Deckfläche	$G = ab$	$a = \frac{G}{b}$	$b = \frac{G}{a}$
Quaderumfang	u = 2a+2b	$a = \frac{u}{2} - b$	$b = \frac{u}{2} - a$
Mantelfläche	$M = uc$	$u = \frac{M}{c}$	$c = \frac{M}{u}$
Oberfläche	O = 2G + M	M = O – 2G	$G = \frac{O - M}{2}$
	$O = 2(ab + ac + bc)$		
	$a = \frac{O - 2bc}{2(b+c)}$	$b = \frac{O - 2ac}{2(a+c)}$	$c = \frac{O - 2ab}{2(a+b)}$
Volumen	$V = G \cdot c = abc$	$G = \frac{V}{c}$	
	$a = \frac{V}{bc}$	$b = \frac{V}{ac}$	$c = \frac{V}{ab}$
Flächendiagonalen	$d_1 = \sqrt{b^2 + c^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$	$d_3 = \sqrt{a^2 + b^2}$
Raumdiagonale	$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$		
Quader			

Prismen

Ein (gerades) Prisma ist durch die Größen Umfang u, Grundflächeninhalt G und Prismenhöhe h bestimmt. Es gilt für die Mantelfläche M, die Oberfläche O und das Volumen V. Besondere Prismen sind Würfel, Quader und Säulen.

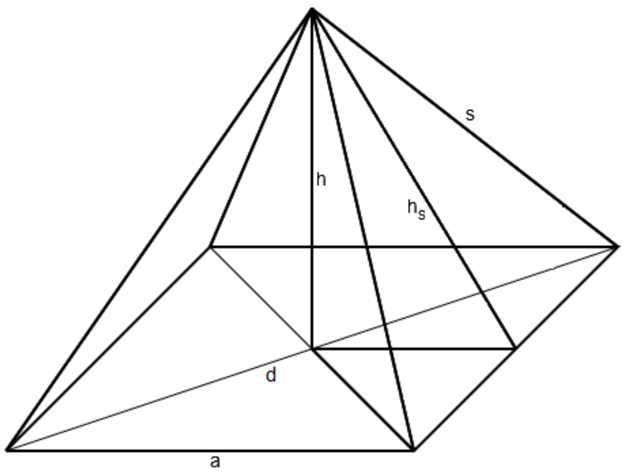


Prismen			
Grundfläche (Dreieck)	$G = \frac{1}{2} g h_{Dr}$	$u = a + b + c$	
Grundfläche (Quadrat)	$G = a^2$	$u = 4a$	
Grundfläche (Rechteck)	$G = ab$	$u = 2a + 2b$	
Grundfläche (Parallelogramm)	$G = a h_a = b h_b$	$u = 2a + 2b$	
Grundfläche (Trapez)	$G = \frac{1}{2}(a + c) h_{Tr}$	$u = a + b + c + d$	
Oberfläche	$O = 2G + M$	$M = O - 2G$	$G = \frac{O - M}{2}$
Volumen	$V = G \cdot h$	$G = \frac{V}{h}$	$h = \frac{V}{G}$
Prismen			

Quadratische Pyramiden

Eine <u>Pyramide mit quadratischer Grundfläche</u> ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Seitenkante s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.

Quadratische Pyramiden

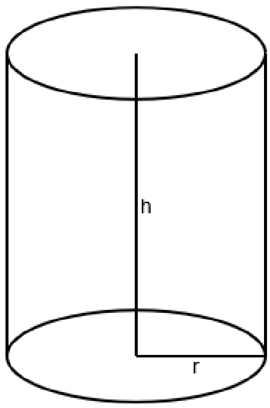


Grundfläche	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen-diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramidenhöhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
Oberfläche	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$		
	$G = O - M$	$M = O - G$	
		$h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} a^2 h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Quadratische Pyramiden			

Zylinder

Ein (gerader) Zylinder mit einem Kreis als Grundfläche ist durch den Radius r des Kreises mit Durchmesser d und Kreisumfang u sowie durch die Zylinderhöhe h bestimmt, weiter durch die Grundfläche G, die Oberfläche O, die Mantelfläche M und das Volumen V.

Zylinder

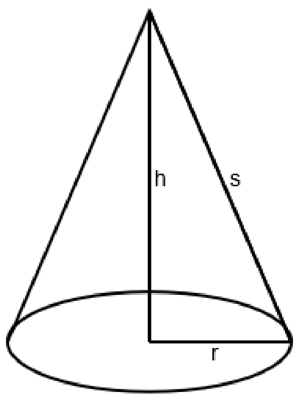


Grundfläche, Radius	$G=\pi r^2$	$r=\sqrt{\frac{G}{\pi}}$	
Durchmesser	$d=2r$	$r=\frac{d}{2}$	
Kreisumfang	$u=2\pi r$	$u=\pi d$	$r=\frac{u}{2\pi}$
Mantelfläche	$M=2\pi rh$	$r=\frac{M}{2\pi h}$	$h=\frac{M}{2\pi r}$
Oberfläche	$O=2\cdot G+M=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r(r+h)$		
	$G=\frac{O-M}{2}$	$M=O-2\cdot G$	
		$r=-\frac{h}{2}+\sqrt{\frac{h^2}{4}+\frac{O}{2\pi}}$	$h=\frac{O}{2\pi r}-r$
Volumen	$V=G\cdot h=\pi r^2 h$	$r=\sqrt{\frac{V}{\pi h}}$	$h=\frac{V}{\pi r^2}$
Radius, Höhe	$r=\frac{2V}{M}$	$h=\frac{M^2}{4\pi V}$	$h=\frac{V}{G}$

Zylinder

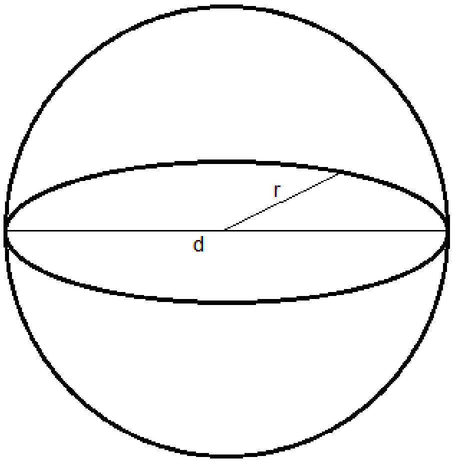
Kegel

Ein (gerader) Kegel mit einem Kreis als Grundfläche ist durch den Radius r des Kreises mit Durchmesser d und Kreisumfang u sowie durch die Kegelhöhe h bestimmt, weiter durch die Mantellinie s, durch die Grundfläche G, die Oberfläche O, die Mantelfläche M und das Volumen V.

Kegel			
			
Grundfläche, Radius	$G = \pi r^2$	$r = \sqrt{\frac{G}{\pi}}$	
Durchmesser	$d = 2r$	$r = \frac{d}{2}$	
Kreisumfang	$u = 2\pi r$	$u = \pi d$	$r = \frac{u}{2\pi}$
Mantelfläche	$M = \pi rs$	$r = \frac{M}{\pi s}$	$s = \frac{M}{\pi r}$
Mantellinie, Höhe	$s^2 = r^2 + h^2$	$r^2 = s^2 - h^2$	$h^2 = s^2 - r^2$
Oberfläche	$O = G + M = \pi r^2 + \pi rs = \pi r(r+s)$		
	$G = O - M$	$M = O - G$	
		$r = -\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{O}{\pi}}$	$s = \frac{O}{\pi r} - r$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$	$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$	$h = \frac{3V}{\pi r^2}$
Kegel			

Kugeln

Eine Kugel ist durch den Radius r bestimmt, weiter durch ihren Durchmesser d, den Kugelumfang u, die Oberfläche O und das Volumen V.

Kugeln			
			
Radius, Durchmesser	$d = 2r$	$r = \frac{d}{2}$	
Kugelumfang	$U = 2\pi r$	$U = \pi d$	$r = \frac{U}{2\pi}$
Oberfläche	$O = 4\pi r^2$	$r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}}$	
Volumen	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$	$r = \frac{3V}{O}$
Kugeln			