Michael Buhlmann

Mathematik-Formelsammlung
> Statistik
> Normalverteilung N(μ,σ²)

(Stetige) Häufigkeitsverteilungen von stochastischen Zufallsvariablen X genügen der Normalverteilung N(μ,σ²) mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, wobei für die Standardnormalverteilung N(0,1) (Erwartungswert μ=0, Standardabweichung σ=1) gilt:

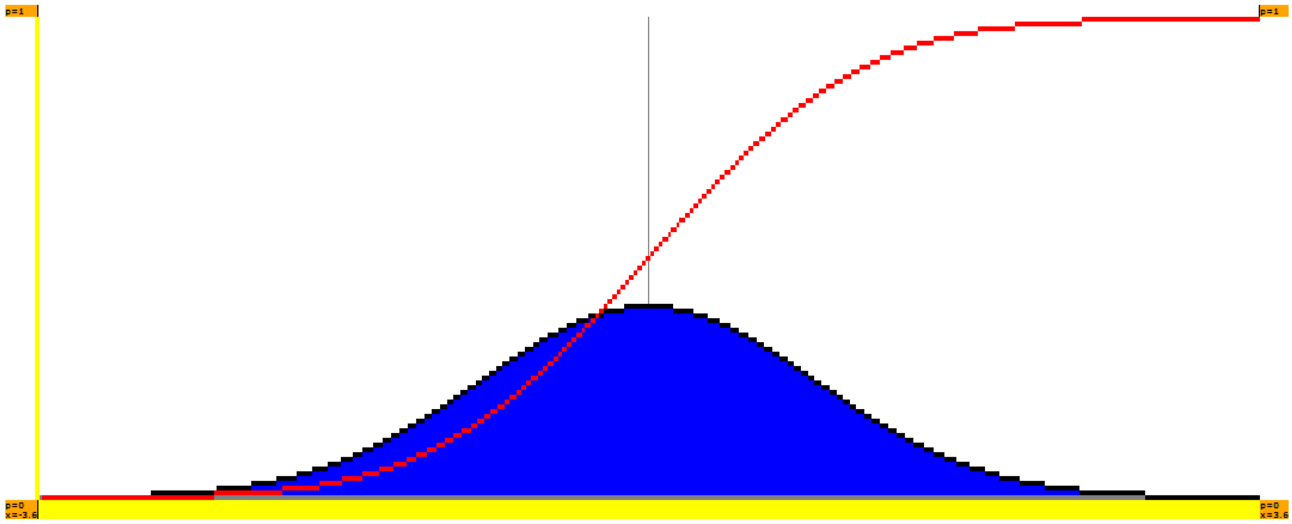
Dichtefunktion: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, Verteilungsfunktion: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$

und für die allgemeine Dichtefunktion f(x) und Verteilungsfunktion F(x) der N(μ,σ²)-verteilten Zufallsvariablen:

Dichtefunktion $f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,

Verteilungsfunktion $p(X \le x) = F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt$

d.h.: jede normalverteilte Zufallsvariable lässt sich auf die Standardnormalverteilung zurückführen:



φ(x), Φ(x)

Die nichtnegative bzw. positive Dichtefunktion ist stetig mit: f(-∞) = f(∞) = 0, die Verteilungsfunktion ist die Stammfunktion der Dichtefunktion mit: F(-∞) = 0, F(∞) = 1, F(μ) = 0,5. Für die Verteilungsfunktion gelten dann die folgenden Rechenregeln:

$p(X \le x) = F(x)$, $p(X \ge x) = 1 - F(x)$, $p(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
$p(X \le \mu + x) = 1 - p(X \le \mu - x) = p(X \ge \mu - x)$ (Symmetrie)

Es gilt weiter:

$$\boxed{p(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma)=0{,}683,\ p(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma)=0{,}954,\ p(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma)=0{,}997 \text{ (Sigma-Regeln)}}$$

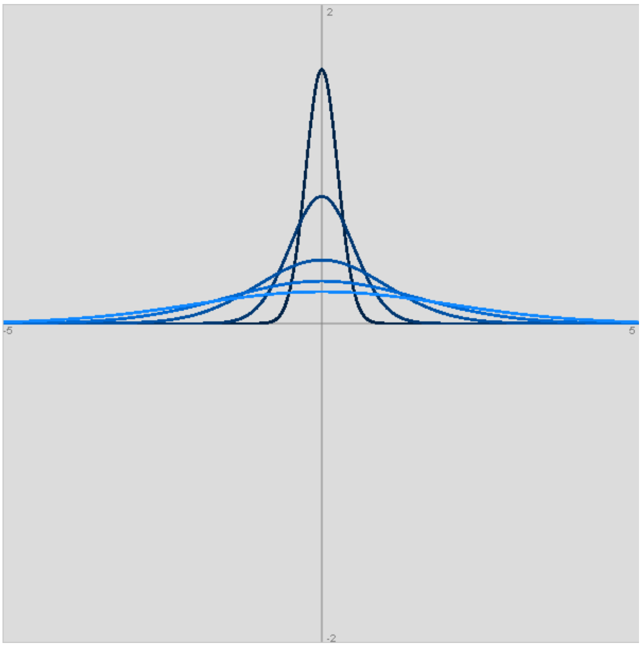
Schließlich ist x_α das <u>α-Quantil</u> der stetigen Normalverteilungsfunktion mit:

$$\boxed{F(x_\alpha) = \alpha \text{ bzw. } x_\alpha = F^{-1}(\alpha)}$$

Quantile der Standardnormalverteilung N(0,1) werden mit u_α bezeichnet.

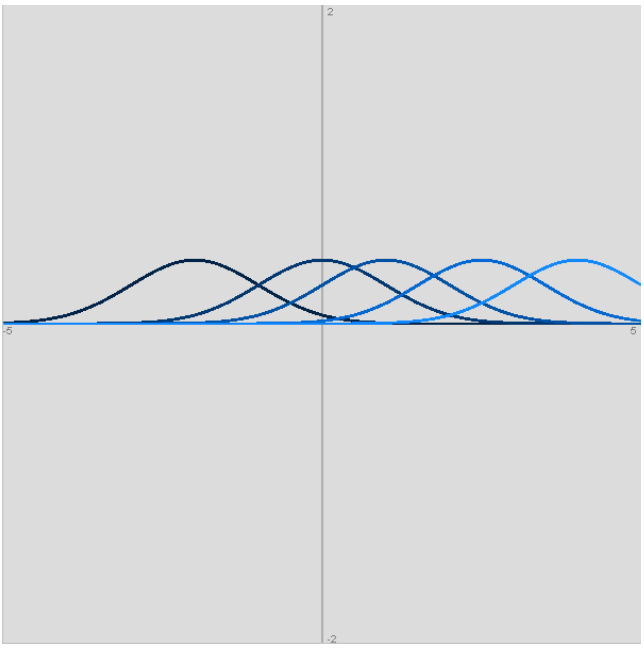
Erwartungswert μ und Standardabweichung σ (Varianz σ^2) bewirken dann eine Verschiebung Dichtefunktion f(x) der Normalverteilung N(0,1) entlang der x-Achse bzw. eine Streckung oder Stauchung:

a) Streckung (σ<1), Stauchung (σ>1) (μ=0):



N(0;0,0625), N(0;025), N(0;1), N(0;2,25), N(0;4)

b) Verschiebung nach links (μ<0), nach rechts (μ>0) (σ=1):



N(-2;1), N(0;1), N(1;1), N(2,5;1), N(4;1)