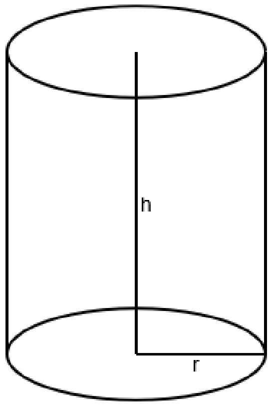
Michael Buhlmann

Mathematik > Geometrie > Kegel, Zylinder

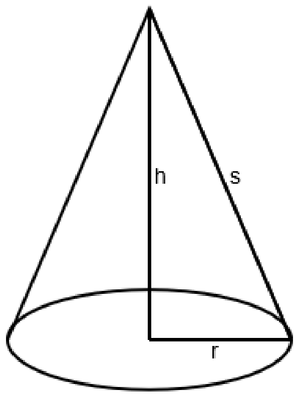
Zylinder

Ein (gerader) Zylinder mit einem Kreis als Grundfläche ist durch den Radius r des Kreises mit Durchmesser d und Kreisumfang u sowie durch die Zylinderhöhe h bestimmt, weiter durch die Grundfläche G, die Oberfläche O, die Mantelfläche M und das Volumen V. Es gilt: $d=2r$, $u=2\pi r$, $G=\pi r^2$, $M=2\pi rh$, $O=2G+M$, $V=Gh$.



Kegel

Ein (gerader) Kegel mit einem Kreis als Grundfläche ist durch den Radius r des Kreises mit Durchmesser d und Kreisumfang u sowie durch die Kegelhöhe h bestimmt, weiter durch die Mantellinie s, durch die Grundfläche G, die Oberfläche O, die Mantelfläche M und das Volumen V. Es gilt: $d=2r$, $u=2\pi r$, $s=\sqrt{r^2+h^2}$, $G=\pi r^2$, $M=\pi rs$, $O=G+M$, $V=Gh/3$.



Kegel- und Zylindervolumen

Es seien nun ein Kegel und ein Zylinder mit gleichem Radius $r > 0$ und gleicher Höhe $h > 0$ gegeben. Das Zahlenverhältnis von Kegel- zu Zylindervolumen ist auf Grund von Kegelvolumen V_K mit:

$$V_K = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

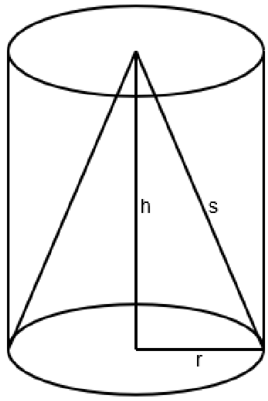
und von Zylindervolumen V_Z mit:

$$V_Z = Gh = \pi r^2 h$$

immer gleich, nämlich:

$$\frac{V_K}{V_Z} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\pi r^2 h} = \frac{1}{3},$$

also: 1:3.



Kegel- und Zylinderoberfläche

Wieder seien ein Kegel und ein Zylinder mit gleichem Radius r > 0 und gleicher Höhe h > 0 gegeben. Das Zahlenverhältnis von Kegel- und Zylinderoberfläche ist hingegen nicht konstant, sondern hängt vom Verhältnis zwischen (Kegel-, Zylinder-) Höhe und (Kegel-, Zylinder-) Radius ab. Mit Kegeloberfläche O_K bei:

$$O_K = G + M = \pi r^2 + \pi r s = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

und Zylinderoberfläche O_Z bei:

$$O_Z = 2G + M = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

ergibt sich:

$$\frac{O_K}{O_Z} = \frac{\pi r^2 + \pi r s}{2\pi r^2 + 2\pi r h} = \frac{\pi r(r+s)}{2\pi r(r+h)} = \frac{r+s}{2(r+h)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{r+s}{r+h}.$$

Mit s = $\sqrt{r^2 + h^2}$ folgt weiter, wenn wir das Verhältnis von (Kegel-, Zylinder-) Höhe zu (Kegel-, Zylinder-) Radius betrachten:

$$\frac{O_K}{O_Z} = \frac{1}{2}\cdot\frac{r+s}{r+h} = \frac{1}{2}\cdot\frac{r+\sqrt{r^2+h^2}}{r+h} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{r}\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)}{\frac{1}{r}(r+h)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{1}{r}\sqrt{r^2+h^2}}{1+\frac{h}{r}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{1+\left(\frac{h}{r}\right)^2}}{1+\frac{h}{r}}.$$

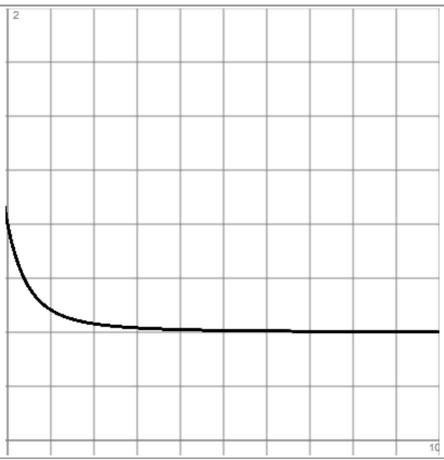
Setzen wir x = $\frac{h}{r}$, also gleich dem Verhältnis zwischen Höhe h und Radius r, so wird aus dem Oberflächenverhältnis O_K/O_Z die Verhältnisfunktion v(x) mit:

$$v(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+x}, \ x > 0.$$

Die Funktion v(x) hat das folgende Aussehen (Wertetabelle, Graph):

Wertetabelle:		
x = h/r	v(x)	Verhältnis Höhe:Radius
0	1	-
0.25	0.8123	h = 0.25r
0.5	0.706	h = 0.5r
0.75	0.6429	h = 0.75r
1	0.6036	h = 1r
1.25	0.578	h = 1.25r
1.5	0.5606	h = 1.5r
1.75	0.5483	h = 1.75r
2	0.5393	h = 2r
2.25	0.5326	h = 2.25r
2.5	0.5275	h = 2.5r
2.75	0.5235	h = 2.75r
3	0.5203	h = 3r
3.25	0.5177	h = 3.25r
3.5	0.5156	h = 3.5r
3.75	0.5138	h = 3.75r
4	0.5123	h = 4r
4.25	0.5111	h = 4.25r
4.5	0.51	h = 4.5r
4.75	0.5091	h = 4.75r
5	0.5083	h = 5r
5.25	0.5076	h = 5.25r
5.5	0.5069	h = 5.5r
5.75	0.5064	h = 5.75r
6	0.5059	h = 6r
6.25	0.5055	h = 6.25r
6.5	0.5051	h = 6.5r
6.75	0.5048	h = 6.75r
7	0.5044	h = 7r
7.25	0.5042	h = 7.25r
7.5	0.5039	h = 7.5r
7.75	0.5037	h = 7.75r
8	0.5035	h = 8r
8.25	0.5033	h = 8.25r
8.5	0.5031	h = 8.5r
8.75	0.5029	h = 8.75r
9	0.5028	h = 9r
9.25	0.5026	h = 9.25r
9.5	0.5025	h = 9.5r
9.75	0.5024	h = 9.75r
10	0.5023	h = 10r

Graph:



Es gilt:

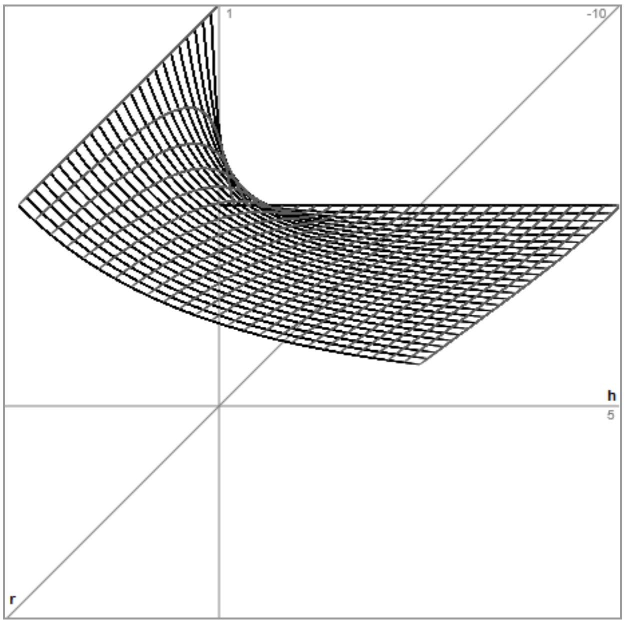
x -> +∞: v(x) -> 0,5 (= y als waagerechte Asymptote von v(x))
x -> 0: v(x) -> 1,

was wiederum bedeutet: Vergrößert sich das Verhältnis zwischen (Kegel-, Zylinder-) Höhe h und (Kegel-, Zylinder-) Radius r, so nähert sich die Verhältniszahl O_K/O_Z der Oberflächen beider Körper der Zahl 0,5, dem Verhältnis 1:2; nimmt der Radius r gegenüber der Höhe h ab, so nähert sich die Verhältniszahl O_K/O_Z der Oberflächen beider Körper der Zahl 1, dem Verhältnis 1:1.

Zweidimensional betrachtet, lautet die Verhältnisfunktion v*(r,h):

$$v^*(r,h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{r + \sqrt{r^2 + h^2}}{r + h}$$

und besitzt das folgende Aussehen:



Literaturhinweise: dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München [3]2003, S.196-201; Duden. Schulwissen: Mathematik 5. bis 10. Klasse, Berlin-Mannheim-Zürich [2]2011, S.306f, 316f (Kegel, Zylinder)

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 12.2019