Michael Buhlmann

Mathematik > Geometrie > Möndchen des Hippokrates

Hippokrates von Chios

Über den Mathematiker Hippokrates von Chios der griechischen Antike ist wenig bekannt. Er soll um die Mitte des 5. Jahrhunderts v.Chr. gelebt haben, von der Ägäisinsel Chios stammen und als Erster ein (nicht mehr erhaltenes) mathematisches Lehrbuch verfasst haben. Hippokrates ist der Beweis der „Quadratur" des „Möndchens" gelungen, d.h. die (geometrische) Rückführung des Flächeninhalts eines Halbkreisteils auf den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks. An der Quadratur des Kreises soll er (logischerweise) gescheitert sein.

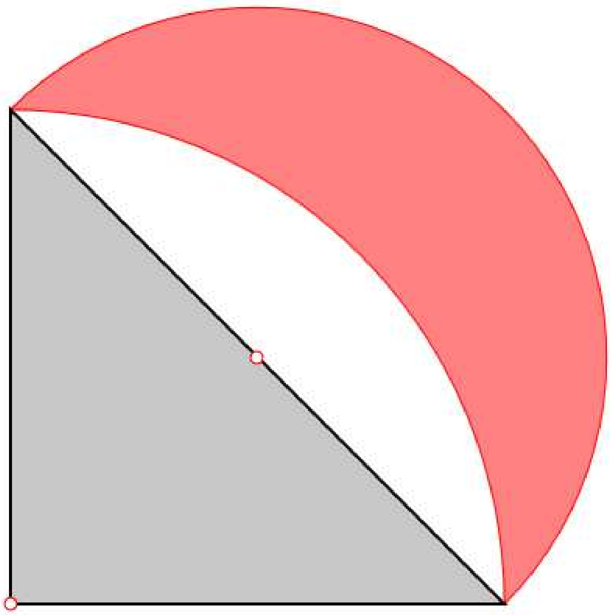
Möndchen des Hippokrates

I. Die Möndchen des Hippokrates kommen in der Geometrie in einigen Varianten vor. Über einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck stellt sich der Flächeninhalt eines Kreisteils aus Halbkreis abzüglich des Teils eines Viertelkreises, der den Halbkreis überdeckt, als Flächeninhalt des Dreiecks dar. Dazu sei r die Länge der zwei Katheten des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks, $r\sqrt{2}$ die Hypotenuse, r_1 die halbe Hypotenuse $r/2\cdot\sqrt{2}$. r ist der Radius eines Viertelkreises mit der Dreiecksecke mit rechtem Winkel als Mittelpunkt, r_1 der Radius eines Halbkreises mit Mittelpunkt auf der Hypotenusenmitte. Der Flächeninhalt des Halbkreises ist dann:

$$A_{Hkr} = \frac{1}{2}\pi r_1^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{2r^2}{4} = \frac{1}{4}\pi r^2,$$

der des Viertelkreises:

$$A_{Vkr} = \frac{1}{4}\pi r^2.$$



Möndchen des Hippokrates über gleichschenkligem rechtwinkligen Dreieck

Halbkreis und Viertelkreis haben also denselben Flächeninhalt. Vom Flächeninhalt des Halbkreises soll nun aber nur der Flächeninhalt, der in den Halbkreis hineinragt, abgezogen werden. Dieser ist aber der Flächeninhalt eines Kreisabschnitts als Differenz von Flächeninhalt des Viertelkreises und des Dreiecks. Mit $A_\Delta = \frac{1}{2} r^2$ erhalten wir:

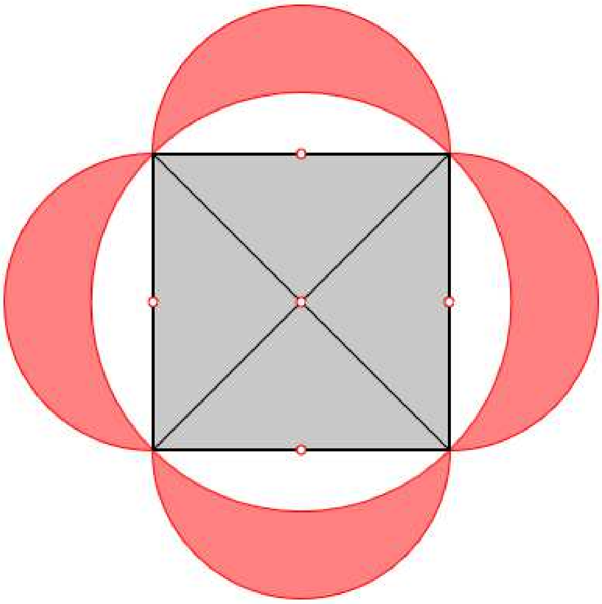
$$A_{Vkr} - A_\Delta = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Der Flächeninhalt des Möndchens ist der Flächeninhalt des Halbkreises abzüglich dem des Kreisabschnitts:

$$A_{Möndchen} = A_{Hkr} - (A_{Vkr} - A_\Delta) = A_{Hkr} - A_{Vkr} + A_\Delta = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 + \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2} r^2 = A_\Delta .$$

Flächeninhalt des Möndchens und Dreieckflächeninhalt sind somit identisch.

II. Die „Quadratur" der Möndchen des Hippokrates erfolgt, wenn wir vier Möndchen mit den vier dazugehörigen gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken wie folgt zusammensetzen:



„Quadratur" der Möndchen des Hippokrates

Dabei stimmt der Gesamtflächeninhalt der vier Möndchen mit dem Flächeninhalt des Quadrats überein. Ist nämlich a die Seitenlänge des Quadrats, so ist r = a/2·√2 der Radius jedes der Viertelkreise mit dem Schnittpunkt der Quadratdiagonalen als Mittelpunkt, r_1 = a/2 der Radius jedes der vier Halbkreise mit der Mitte der Quadratseitenlänge als Mittelpunkt. Nach I. erhalten wir für jedes der vier Möndchen die Identität der Flächeninhalte:

$$A_{Möndchen} = A_\Delta = \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2}{4} = \frac{1}{4} a^2 .$$

Der Gesamtflächeninhalt A der vier Möndchen ist dann:

$$A = 4A_{Möndchen} = 4A_\Delta = 4 \cdot \frac{1}{4} a^2 = a^2 = A_Q .$$

und damit gleich dem Flächeninhalt des Quadrats A_Q, womit die „Quadratur" der Möndchenflächen gelungen ist.

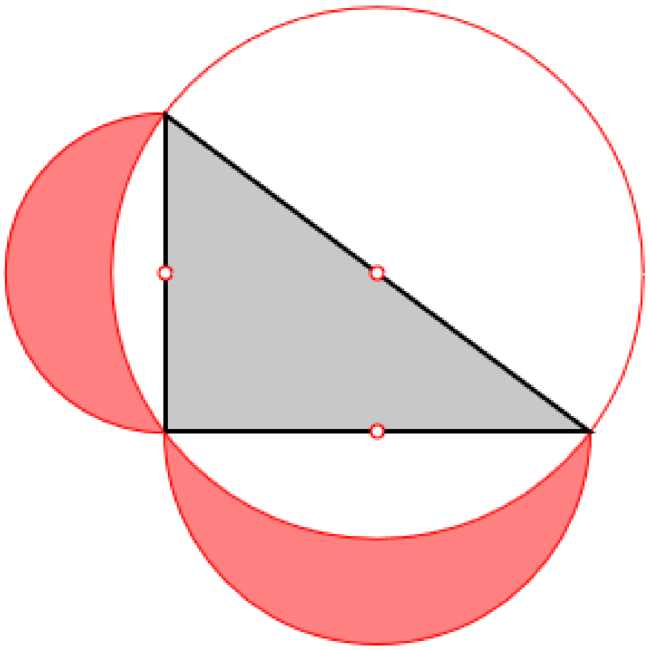
III. Betrachten wir ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b sowie der Hypotenuse c, so gilt zunächst der Satz des Pythagoras:

$$a^2+b^2=c^2,$$

umgestellt zu:

$$a^2+b^2-c^2=0.$$

Wir betrachten die drei Halbkreise über den drei Dreieckseiten mit den Mittelpunkten auf den Dreieckseiten und den Radien $r_a = a/2$, $r_b = b/2$ und $r_c = c/2$. Der Halbkreis über der Hypotenuse sei zum Dreieck hin gerichtet, die anderen Halbkreise vom Dreieck weg.



Möndchen des Hippokrates über rechtwinkligem Dreieck

Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks berechnet sich über die Katheten:

$$A_\Delta=\frac{1}{2}ab,$$

die Flächeninhalte der Halbkreise sind:

$$A_a=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4}=\frac{1}{8}a^2,\ A_b=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{4}=\frac{1}{8}b^2,\ A_c=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{4}=\frac{1}{8}c^2.$$

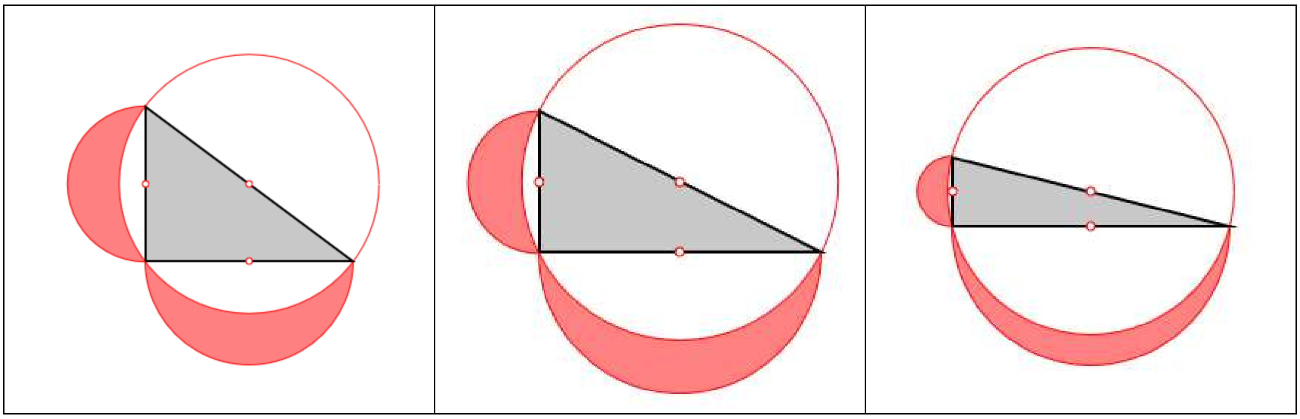
Der Halbkreis über der Hypotenuse überlappt die Halbkreise über den Katheten in zwei Kreisabschnitten, deren Flächeninhalt sich aus der Differenz von Flächeninhalt A_c des Halbkreises und Dreiecksflächeninhalt A_Δ ergibt. Folglich gilt für die Gesamtfläche A der beiden Möndchen:

$$A=A_a+A_b-(A_c-A_\Delta)=A_a+A_b-A_c+A_\Delta=\frac{1}{8}a^2+\frac{1}{8}b^2-\frac{1}{8}c^2+\frac{1}{2}ab=$$

$$\frac{1}{8}(a^2+b^2-c^2)+\frac{1}{2}ab=\frac{1}{8}\cdot 0+\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ab=A_\Delta$$

auf Grund von $a^2+b^2-c^2=0$, d.h. des Satzes des Pythagoras. Der Flächeninhalt der Möndchen ist mithin mit dem des Dreiecks identisch.

Geometrisch ist noch zu bemerken, dass der Halbkreis über der Hypotenuse ein Thaleskreis ist und somit das Dreieck an der Ecke des rechten Winkels schneidet, so dass die Kreisabschnitte in der Tat Teile der Kathetenhalbkreise sind. Zu beachten ist ferner, dass sich die Flächenanteile der beiden Möndchen nicht im rechtwinkligen Dreieck widerspiegeln. Die oben genannte Identität der Flächeninhalte der zwei Möndchen auf der einen und des rechtwinkligen Dreiecks auf der anderen Seite gilt nur insgesamt.



Möndchen des Hippokrates über rechtwinkligen Dreiecken

Literatur: HERRMANN, D., Die antike Mathematik (= Springer Spektrum), Berlin-Heidelberg 2014, S.51-56; https://de.wikipedia.org/wiki/Möndchen_des_Hippokrates (Möndchen des Hippokrates); WUßING, H., 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise, Bd.1: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton, Berlin-Heidelberg 2008, S.172f.

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 02.2019