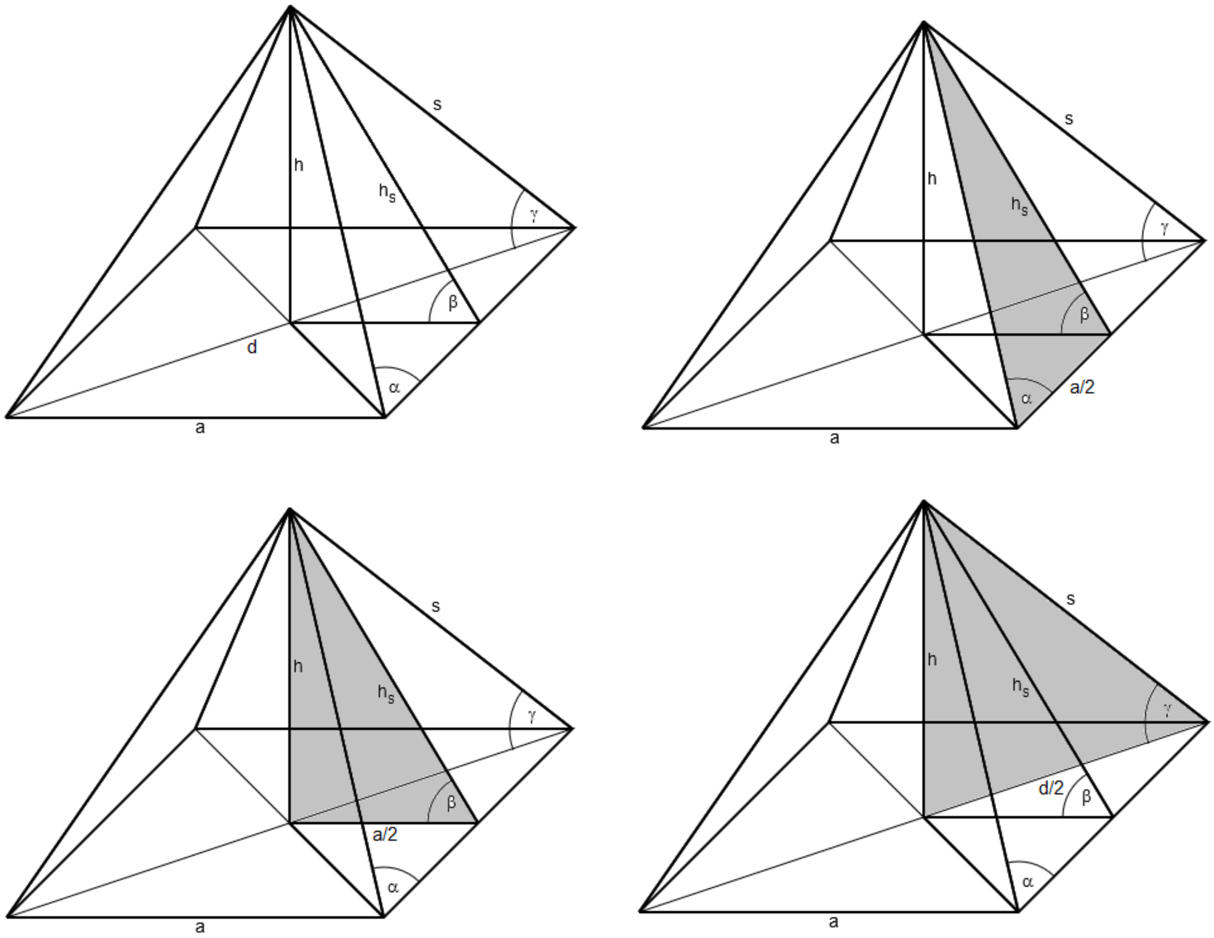
Michael Buhlmann

Mathematik > Geometrie > Quadratische Pyramiden

Einleitung

Eine regelmäßige Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Seitenkante s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.



Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

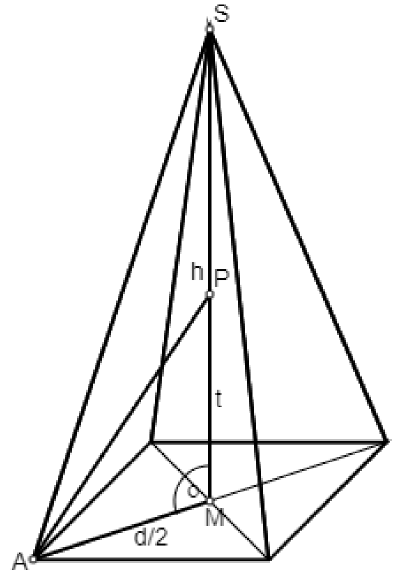
Formelsammlung:

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen-diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$	$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$	$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden-höhe	$s^2 = h^2 + \left(\dfrac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\dfrac{d}{2}\right)^2$	$\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$

Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
Oberfläche	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$		
	$G = O - M$	$M = O - G$	
		$h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan\beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan\gamma = \frac{2h}{d}$

Punkt mit gleichem Abstand zu den Pyramidenecken

Eine regelmäßige quadratische Pyramide habe im Folgenden die Ecken A, B, C, D der quadratischen Grundfläche G mit Seitenlänge a und die Pyramidenspitze S mit Pyramidenhöhe h. Ein Punkt P, der (innerhalb, unterhalb des Pyramideninneren) denselben Abstand zu den Pyramidenecken A, B, C, D, S besitzt, muss wegen der Regelmäßigkeit (Symmetrie) der Pyramide auf der Pyramidenhöhe h (oder deren Verlängerung) liegen. Ist t der Abstand des Punktes zur Grundfläche G (bzw. zum Mittelpunkt M der Grundfläche), so hat P den Abstand h–t zur Pyramidenspitze S. Der Abstand von P z.B. zur Ecke A ist nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{t^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ mit $d = a\sqrt{2}$ als Grundflächendiagonale.



Wir bestimmen im Folgenden die Unbekannte t als Höhe des Punktes P über der Grundfläche. Mit $\overline{PS} = h - t$ und $\overline{PA} = \sqrt{t^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{t^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{t^2 + \frac{a^2}{2}}$ soll gelten:

$$\overline{PS} = \overline{PA}$$

$$h - t = \sqrt{t^2 + \frac{a^2}{2}} \qquad \text{(Quadrieren)}$$

$$(h-t)^2 = t^2 + \frac{a^2}{2} \qquad \text{(2. binomische Formel)}$$

$$h^2 - 2ht + t^2 = t^2 + \frac{a^2}{2} \qquad | -t^2$$

$$h^2 - 2ht = \frac{a^2}{2} \qquad | -h^2$$

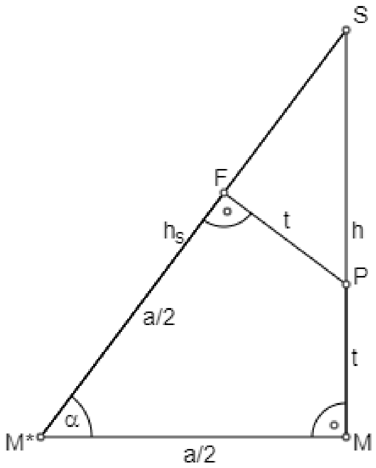
$$-2ht = \frac{a^2}{2} - h^2 \qquad | :(-2h)$$

$$t = \frac{\frac{a^2}{2} - h^2}{-2h} = \frac{h^2 - \frac{a^2}{2}}{2h}$$

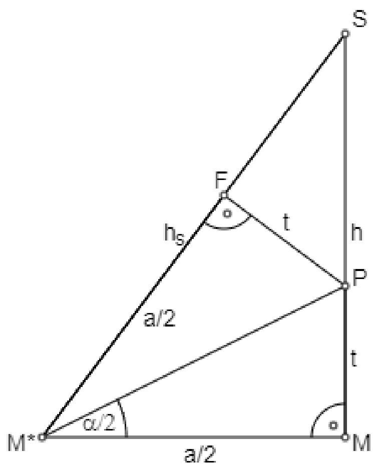
Die Höhe des Punktes P über der Grundfläche beträgt also: $t = \frac{h^2 - \frac{a^2}{2}}{2h}$. Ist $h^2 < a^2/2 \Leftrightarrow h < a/\sqrt{2}$, also $t < 0$, so liegt der Punkt P unterhalb der Pyramidengrundfläche. Beachte die Rationalität der Zahl t, wenn nur a und h auch rational sind.

Punkt mit gleichem Abstand zu den Pyramidenflächen

Eine regelmäßige quadratische Pyramide habe wieder die Ecken A, B, C, D der quadratischen Grundfläche G mit Seitenlänge a und die Pyramidenspitze S mit Pyramidenhöhe h. Ein Punkt P, der (innerhalb des Pyramideninneren) denselben Abstand zu den Mantelflächen der Pyramide ABS, BCS, CDS, ADS sowie zur Grundfläche ABCD besitzt, muss wegen der Regelmäßigkeit (Symmetrie) der Pyramide auf der Pyramidenhöhe h liegen. Der Abstand des Punktes zur Grundfläche ABCD (bzw. zum Mittelpunkt M der Grundfläche), sei t. Betrachtet werde nun der Parallelschnitt durch die Pyramide entlang von Höhe h und Seitenhöhe h_s (mit M* als Fußpunkt der Seitenhöhe h_s auf der Grundkante und der Seitenhöhe h_s als Höhe des gleichschenkligen Mantelflächendreiecks ΔADS):



Es gilt: $\overline{PF} = \overline{PM} = t$ mit zwei rechten Winkeln an den Ecken M (auf der Grundfläche) und F (auf der Seitenhöhe); die rechten Winkel ergeben sich aus der Vorgabe, dass Abstände zur Grund- und Mantelfläche immer senkrecht auf den Flächen stehen. Wegen den zwei rechten Winkeln und den gleichen Längen t ist das Viereck M*MPF ein Drache, so dass die Strecke $\overline{PM*}$ die Figur des Drachen und den Winkel α halbiert.



Bestimmt sich der Winkel α mit $\tan\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a}$, so lässt sich t im rechtwinkligen Dreieck ΔM*MP berechnen als:

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{t}{\frac{a}{2}} \Rightarrow t = \frac{a}{2}\tan(\frac{\alpha}{2}).$$

Der Fußpunkt F, der auf der Mantelfläche der Pyramide dem Punkt P am nächsten liegt, liegt auf der Seitenhöhe h_S in einem Abstand von a/2 von der Grundkante entfernt. Die Höhe h_F des Fußpunkts über der Grundfläche betragt: $h_F = \frac{a}{2}\sin\alpha$. Dies gilt für alle vier Fußpunkte aller vier Mantelfächendreiecke.

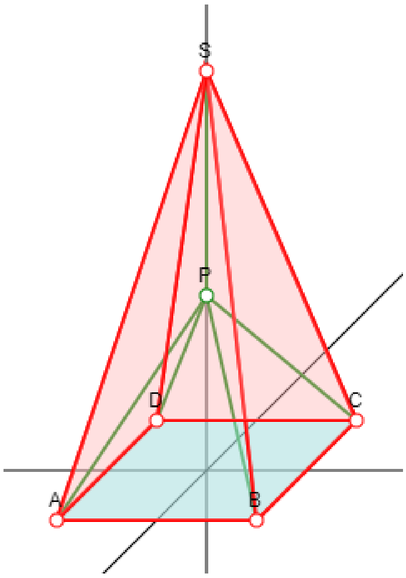
Beispiel

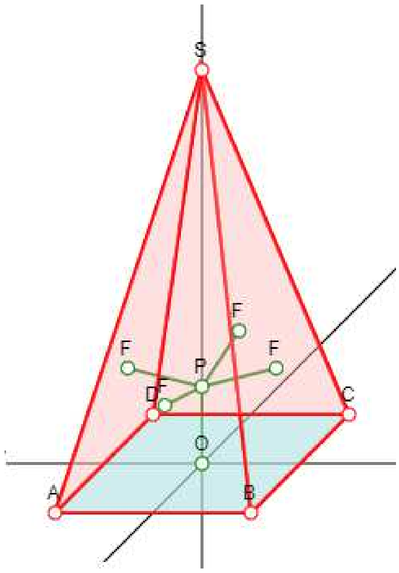
Gegeben sie eine regelmäßige quadratische Pyramide mit Grundkantenlänge a = 4 cm und Höhe h = 8 cm.

a) Der Punkt P, der von allen Pyramidenecken denselben Abstand hat, liegt

t = $\frac{8^2 - \frac{4^2}{2}}{2 \cdot 8} = \frac{64-8}{16} = \frac{56}{16}$ = 3,5 cm

über der Grundfläche. Der Abstand des Punktes zu den Pyramidenecken beträgt: d(P,S) = 8 – 3,5 = 4,5 cm.





b) Der Punkt P, der von allen Pyramidenflächen denselben Abstand hat, liegt t = 1,563 cm über der Grundfläche wegen:

$$\tan\alpha = \frac{2h}{a} = \frac{2 \cdot 8}{4} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(4) = 76°$$

$$t = \frac{a}{2}\tan(\frac{\alpha}{2}) \Rightarrow t = \frac{4}{2}\tan\left(\frac{76°}{2}\right) = 2\tan(38°) = 1{,}563 \text{ cm.}$$

Der Abstand des Punktes zu den Pyramidenflächen beträgt folglich auch: d(P,O) = t = 1,563 cm.