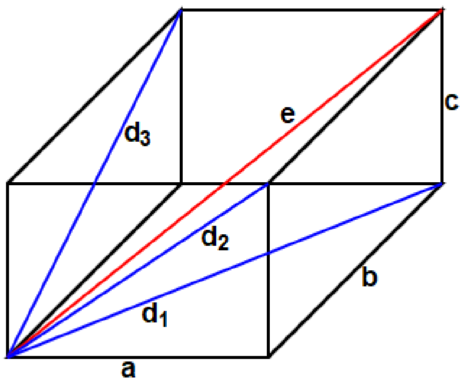
Michael Buhlmann

Mathematik > Geometrie > Quader

<u>Quader</u> gehören als geometrische Körper mit 8 Ecken, 12 (als dreimal je 4 gleich lange) Kanten und 6 (als dreimal je 2 kongruente) Rechteckflächen zu den Prismen mit rechten Winkeln und parallelen gegenüberliegenden Seitenflächen. Es seien im Folgenden a, b, c die <u>Kantenlängen</u> eines Quaders, $d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$, $d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$, $d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$ die <u>Flächendiagonalen</u>, $e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ die <u>Raumdiagonale</u> des Quaders (gemäß dem Satz des Pythagoras.



Aus den Gleichungen:

(1) $a^2 + b^2 = d_1^2$
(2) $a^2 + c^2 = d_2^2$
(3) $b^2 + c^2 = d_3^2$
(4) $a^2 + b^2 + c^2 = e^2$

ergeben sich durch Umstellen, Subtraktion und Addition der Gleichungen (1) bis (4) die folgenden Formeln zur Bestimmung der Kanten- oder Diagonallängen im Quader:

Gegeben:	Berechnungen			
a, b, c	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
a, b, d_1	-			
a, b, d_2	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$	$c = \sqrt{d_2^2-a^2}$	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
a, b, d_3	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$	$c = \sqrt{d_3^2-b^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
a, b, e	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$	$c = \sqrt{e^2-a^2-b^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$
a, c, d_1	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$	$b = \sqrt{d_1^2-a^2}$	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
a, c, d_2	-			
a, c, d_3	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$	$b = \sqrt{d_3^2-c^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
a, c, e	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$	$b = \sqrt{e^2-a^2-c^2}$	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$
b, c, d_1	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$	$a = \sqrt{d_1^2-b^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

b, c, d_2	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$	$a = \sqrt{d_1^2-c^2}$	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
b, c, d_3	-			
b, c, e	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$	$a = \sqrt{e^2-b^2-c^2}$	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$
a, d_1, d_2	$b = \sqrt{d_1^2-a^2}$	$c = \sqrt{d_2^2-a^2}$	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
a, d_1, d_3	$b = \sqrt{d_1^2-a^2}$	$c = \sqrt{d_3^2-b^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
a, d_2, d_3	$c = \sqrt{d_2^2-a^2}$	$b = \sqrt{d_3^2-c^2}$	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
a, d_1, e	$b = \sqrt{d_1^2-a^2}$	$c = \sqrt{e^2-a^2-b^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$
a, d_2, e	$c = \sqrt{d_2^2-a^2}$	$b = \sqrt{e^2-a^2-c^2}$	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$
a, d_3, e	-			
b, d_1, d_2	$a = \sqrt{d_1^2-b^2}$	$c = \sqrt{d_2^2-a^2}$	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
b, d_1, d_3	$a = \sqrt{d_1^2-b^2}$	$c = \sqrt{d_3^2-b^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
b, d_2, d_3	$c = \sqrt{d_3^2-b^2}$	$a = \sqrt{d_2^2-c^2}$	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
b, d_1, e	$a = \sqrt{d_1^2-b^2}$	$c = \sqrt{e^2-a^2-b^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$
b, d_2, e	-			
b, d_3, e	$c = \sqrt{d_3^2-b^2}$	$b = \sqrt{e^2-a^2-c^2}$	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$
c, d_1, d_2	$a = \sqrt{d_2^2-c^2}$	$b = \sqrt{d_1^2-a^2}$	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
c, d_1, d_3	$b = \sqrt{d_3^2-c^2}$	$a = \sqrt{d_1^2-b^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
c, d_2, d_3	$a = \sqrt{d_2^2-c^2}$	$b = \sqrt{d_3^2-c^2}$	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
c, d_1, e	-			
c, d_2, e	$a = \sqrt{d_2^2-c^2}$	$b = \sqrt{e^2-a^2-c^2}$	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$
c, d_3, e	$b = \sqrt{d_3^2-c^2}$	$a = \sqrt{e^2-b^2-c^2}$	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$
d_1, d_2, d_3	$a = \sqrt{\frac{d_2^2+d_1^2-d_3^2}{2}}$	$b = \sqrt{\frac{d_1^2+d_3^2-d_2^2}{2}}$	$c = \sqrt{\frac{d_3^2+d_2^2-d_1^2}{2}}$	$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
d_1, d_2, e	$c = \sqrt{e^2-d_1^2}$	$b = \sqrt{e^2-d_2^2}$	$a = \sqrt{e^2-b^2-c^2}$	$d_3 = \sqrt{b^2+c^2}$
d_1, d_3, e	$c = \sqrt{e^2-d_1^2}$	$a = \sqrt{e^2-d_3^2}$	$b = \sqrt{e^2-a^2-c^2}$	$d_2 = \sqrt{a^2+c^2}$
d_2, d_3, e	$b = \sqrt{e^2-d_2^2}$	$a = \sqrt{e^2-d_3^2}$	$c = \sqrt{e^2-a^2-b^2}$	$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$

Wir betrachten rechnerisch noch den Fall, wenn die drei Flächendiagonalen d_1, d_2, d_3 gegeben sind. Aus den Gleichungen:

(1) $a^2 + b^2 = d_1^2$
(2) $a^2 + c^2 = d_2^2$
(3) $b^2 + c^2 = d_3^2$

folgt durch Subtraktion (2) – (1) zunächst:

(2a) $d_2^2 - d_1^2 = c^2 - b^2$,

dann durch Addition (2a) + (3) (insgesamt also: (3) + (2) – (1)):

(3a) $d_3^2 + d_2^2 - d_1^2 = 2c^2 \Leftrightarrow c^2 = \frac{d_3^2 + d_2^2 - d_1^2}{2} \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{d_3^2 + d_2^2 - d_1^2}{2}}$.

Entsprechend erhalten wir gemäß (1) + (3) – (2): $b = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_3^2 - d_2^2}{2}}$ und gemäß (2) + (1) – (3):

$a = \sqrt{\frac{d_2^2 + d_1^2 - d_3^2}{2}}$.

Bei zwei Flächendiagonalen und der Raumdiagonale gilt die nachstehende Vorgehensweise. Aus den Gleichungen:

(1) $a^2 + b^2 = d_1^2$
(2) $a^2 + c^2 = d_2^2$
(3) $b^2 + c^2 = d_3^2$
(4) $a^2 + b^2 + c^2 = e^2$

folgt durch entsprechende Subtraktionen:

(4) – (1): $e^2 - d_1^2 = c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{e^2 - d_1^2}$

(4) – (2): $e^2 - d_2^2 = b^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{e^2 - d_2^2}$

(4) – (3): $e^2 - d_3^2 = a^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{e^2 - d_3^2}$.

www.michael-buhlmann.de / Michael Buhlmann, 02.2023