

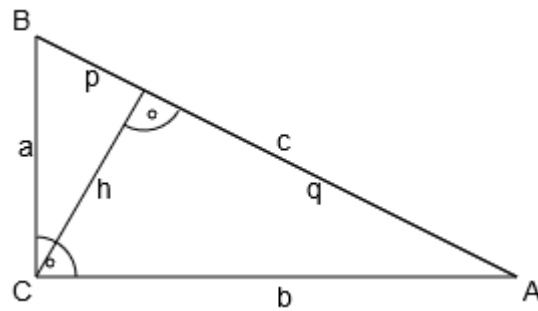
Pythagoras von Samos

Der antik-griechische Philosoph und Mathematiker Pythagoras (*ca.570-†n.510 v.Chr.) stammte wohl von der Ägäisinsel Samos und war Sohn des Kaufmanns Mnesarchos. Lehrer des jungen Pythagoras war u.a. der Philosoph Pherekydes von Syros; Pythagoras selbst unternahm Bildungsreisen nach Ägypten und Babylonien und stand nach seiner Rückkehr nach Samos in Opposition zum dortigen Tyrannen Polykrates (538-522 v.Chr.), worauf er ins griechische Unteritalien floh (532/31 v.Chr.). Dort trat Pythagoras als Lehrer und Philosoph in Kroton in Erscheinung, wo – auch dank seiner rhetorischen Fähigkeiten – seine Schule aufblühte. Pythagoras und seine Anhänger hatten auch politischen Einfluss in Kroton, wie der Konflikt der Polis mit Sybaris und die Zerstörung der Nachbarstadt (510 v.Chr.) zeigen. Doch musste Pythagoras auf Grund danach in Kroton ausbrechender innerer politischer Streitigkeiten nach Metapont ausweichen. Dort ist er zu einem unbekanntem Zeitpunkt verstorben.

Widersprüchlich schildert die erst spät einsetzende antike Überlieferung zu Pythagoras – u.a. die Lebensbeschreibung des Pythagoras von Iamblichos (*ca.240/45-†ca.320/25 n.Chr.) – dessen „religiös-philosophische“ Lehre zwischen „Schamanismus“ und „Wissenschaft“. Von daher ist die Zuschreibung des Satzes des Pythagoras oder der Betrachtung kommensurabler und inkommensurabler Zahlenverhältnisse an Pythagoras durchaus umstritten, während überlieferte musiktheoretische (Harmonielehre), astronomische (Sphären-/Himmelsharmonie) oder religiöse Aussagen (Seelenwanderung) heute eher Pythagoras zugeordnet werden. Die wie auch immer gestaltete Lehre des Pythagoras wurde von seinen Schülern und Anhängern, den Pythagoreern (Gruppenbildungen innerhalb der Pythagoreer: „Akusmatiker“, „Mathematiker“, „Exoteriker“, „Esoteriker“, „Pythagoreer“, „Pythagoristen“) weitergetragen. Zumindest galt dies für das 5. und 4. Jahrhundert v.Chr., bis der Pythagoreismus (als Lehre des Pythagoras; wohl zuletzt in Tarent) vielfach zurücktrat, um ab dem 1. Jahrhundert v.Chr. in Gestalt eines platonischen bzw. neuplatonischen Neupythagoreismus wieder in Erscheinung zu treten. Demgemäß blieb in der Antike auch das Interesse an der Person des Pythagoras erhalten, der fast einhellig eine positive Wertschätzung als „weiser Philosoph“ erfuhr. Dieses Ansehen der Person Pythagoras übertrug sich auch ins Mittelalter, in der frühen Neuzeit, gerade auch in der Epoche der Renaissance und des Humanismus, stand weitgehend die noch heute bestehende antike Überlieferung zu Pythagoras zur Verfügung.

Satz des Pythagoras (PYTHAGORAS?)

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit den Ecken A, B, C, den (den Ecken jeweils gegenüberliegenden) Seiten a, b, c und einem rechten Winkel an der Ecke C ($\gamma = 90^\circ$). Die gegenüber dem rechten Winkel liegende Seite c heißt Hypotenuse, die an dem rechten Winkel liegenden Seiten a und b Katheten.

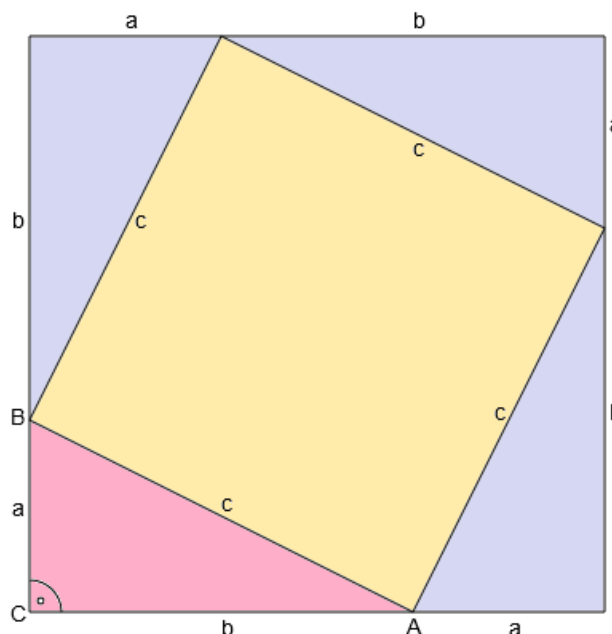


Rechtwinkliges Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck gilt dann der sog. Satz des Pythagoras, wonach die Summe der Quadrate der Kathetenlängen das Quadrat der Hypotenusenlänge ergibt:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Zum Beweis des Satzes kann das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten a und b in ein Quadrat der Seitenlänge a+b eingebunden werden:



Quadrate, rechtwinklige Dreiecke und Satz des Pythagoras

Dann sind die vier rechtwinkligen Dreiecke, die sich um das Quadrat in der Mitte gruppieren, jeweils zueinander kongruent (Kongruenzsatz SWS mit den Katheten a und b als Seiten und dem rechten Winkel als Winkel zwischen den Seiten). Die Flächen dieser vier

Dreiecke sind somit gleich groß, nämlich: $A_{\Delta} = \frac{1}{2}ab$, das Quadrat in der Mitte besitzt als

Flächeninhalt: $A_{Qc} = c^2$, das gesamte Quadrat mit der Seitenlänge a+b als Flächeninhalt:

$A_{Qab} = (a+b)^2$. Laut Konstruktion gilt die nachstehende Identität zwischen den Flächen:

$$A_{Qab} = A_{Qc} + 4A_{\Delta},$$

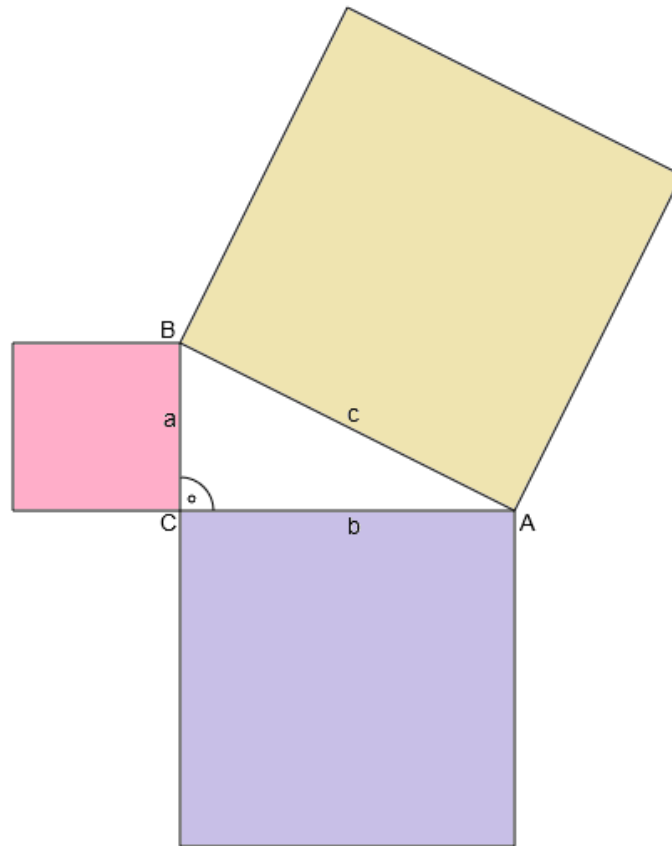
woraus folgt:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab \quad (1. \text{ Binomische Formel})$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \quad | -2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

womit der Satz des Pythagoras bewiesen ist.



Satz des Pythagoras

Durch Umstellen der Formel gilt noch:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}.$$

Im Übrigen gilt die Umkehrung des Satzes des Pythagoras: Verhalten sich die drei Seiten a , b , c in einem Dreieck $\triangle ABC$ gemäß $a^2 + b^2 = c^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig mit einem rechten Winkel an der Ecke C .

Höhensatz

Aus dem Satz des Pythagoras folgen ein paar wichtige Sätze zu rechtwinkligen Dreiecken, unter diesen der Höhensatz. Ist im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ h die Höhe auf der Hypotenuse c , so teilt die Höhe die Hypotenuse in die zwei Hypotenusenabschnitte p und q mit: $p+q = c$. Dann gilt:

$$h^2 = pq .$$

Ein Beweis des Höhensatzes erfolgt mit dem Satz des Pythagoras, wenn dieser auf die beiden rechtwinkligen Teildreiecke mit den Seiten a (Hypotenuse), h (Kathete) und p (Kathete) angewendet wird. Zur Erinnerung: Die Höhe steht senkrecht auf der Hypotenuse, so dass zwischen h und p ein rechter Winkel besteht. Es ergibt sich somit:

$$a^2 = h^2 + p^2 \text{ (1)}.$$

Entsprechend gilt für das rechtwinklige Teildreieck mit den Seiten b (Hypotenuse), h (Kathete) und q (Kathete):

$$b^2 = h^2 + q^2 \quad (2).$$

Die Addition der beiden Identitäten (1) und (2) führt auf:

$$a^2 + b^2 = (h^2 + p^2) + (h^2 + q^2) \quad (\text{Satz des Pythagoras, Zusammenfassen})$$

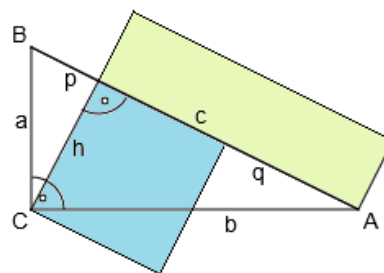
$$c^2 = 2h^2 + p^2 + q^2 \quad (c = p+q)$$

$$(p+q)^2 = 2h^2 + p^2 + q^2 \quad (1. \text{ Binomische Formel})$$

$$p^2 + 2pq + q^2 = 2h^2 + p^2 + q^2 \quad | -p^2, -q^2$$

$$2pq = 2h^2 \quad | :2$$

$$h^2 = pq.$$



Höhensatz

Kathetensätze (EUKLID)

Es folgen die Kathetensätze, die dem griechischen Mathematiker Euklid (wahrscheinlich 3. Jahrhundert v.Chr.) zugeschrieben werden. Danach gilt im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Katheten a und b sowie der durch die Dreieckshöhe h in die zwei Hypotenusenabschnitte p und q zerteilte Hypotenuse c mit: $p+q = c$:

$$a^2 = cp, \quad b^2 = cq.$$

Zum Beweis der Kathetensätze ist wieder der Satz des Pythagoras in den von der Höhe geteilten beiden rechtwinkligen Teildreiecken heranzuziehen. So gilt im rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten a (Hypotenuse), h (Kathete) und p (Kathete):

$$a^2 = h^2 + p^2,$$

worauf nach dem Höhensatz $h^2 = pq$ folgt:

$$a^2 = pq + p^2.$$

Ausklammern von p führt wegen $c = p+q$ auf:

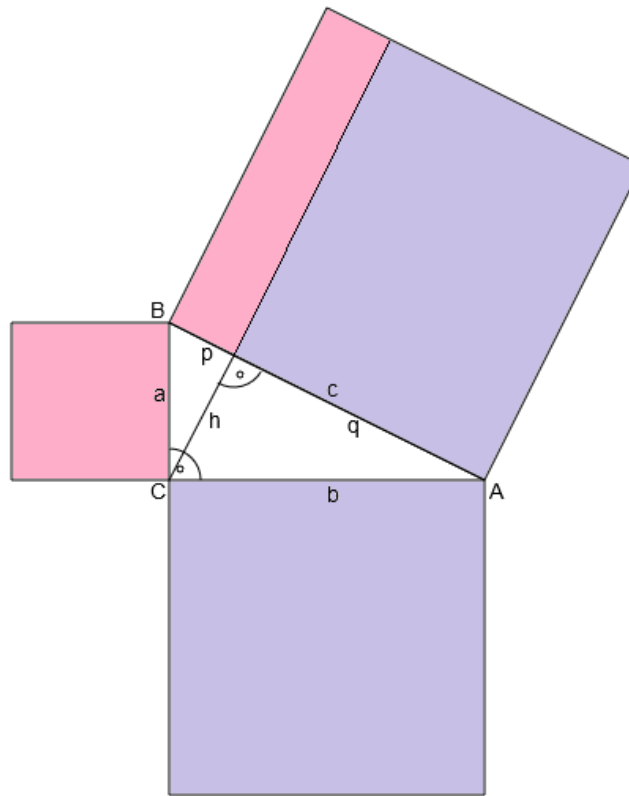
$$a^2 = p(q+p) = pc = cp.$$

Entsprechend gilt im rechtwinkligen Teildreieck mit den Seiten b (Hypotenuse), h (Kathete) und q (Kathete):

$$b^2 = h^2 + q^2 \quad (\text{Höhensatz})$$

$$b^2 = pq + q^2 \quad (\text{Ausklammern von } q, c = p+q)$$

$$b^2 = q(p+q) = qc = cq.$$



Kathetensätze

Reziproker Höhensatz (LARS HIRSCHBACH)

Eine interessante Anwendung des Satzes des Pythagoras ist der hier so genannte reziproke Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit der Höhe h auf der Hypotenuse c und Katheten a und b . der Satz lautet:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}.$$

Wie beim Satz des Pythagoras geht hier der Beweis über den Flächeninhalt des Dreiecks, der als: $A_{\Delta} = \frac{1}{2}ab$ und als: $A_{\Delta} = \frac{1}{2}ch$ dargestellt werden kann, also:

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$$

| ·2

$$ab = ch$$

(Satz des Pythagoras: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$)

$$ab = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot h$$

| ()²

$$a^2b^2 = (a^2 + b^2) \cdot h^2$$

| (a²+b²)

$$\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} = h^2$$

(Kehrwertbildung)

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{h^2}$$

(Aufteilung in zwei Brüche)

$$\frac{a^2}{a^2b^2} + \frac{b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{h^2}$$

(Kürzen der beiden Brüche)

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{h^2}$$

(Vertauschen der Brüche)

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}.$$

Aus der Identität $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = h^2$ im obigen Beweis lässt sich noch eine Höhen-Kathetenformel ableiten. Diese lautet (nach Wurzelziehen):

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Folgerung aus dem reziproken Höhensatz (MICHAEL BUHLMANN)

Die Identität $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = h^2$ im obigen Beweis zum reziproken Höhensatz lässt sich wegen des Satzes des Pythagoras und $a^2 + b^2 = c^2$ noch schreiben als:

$$h^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2},$$

eine Folgerung, die somit Hypotenuse c , Katheten a , b und Hypotenusenhöhe h in einem rechtwinkligen Dreieck in Beziehung zueinander setzt, also – nach Wurzelziehen –:

$$h = \frac{ab}{c}.$$

Dualer Satz des Pythagoras (IMMO DIENER)

In der sog. ebenen polareuklidischen Geometrie, d.h. dem die euklidische und dualeuklidische Geometrie enthaltenden mathematischen Begriffssystem (absoluter Mittelpunkt unendlich ferne Elemente, projektiver Abschluss) gilt der duale Satz des Pythagoras:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2},$$

so dass sich hier primaler und dualer Satz des Pythagoras gegenüberstehen:

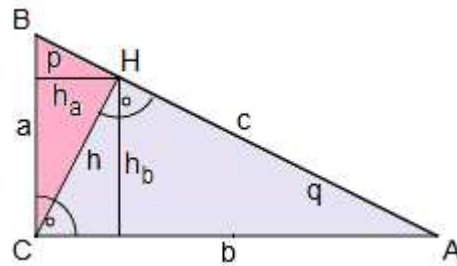
$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (primal), } a^{-2} + b^{-2} = h^{-2} \text{ (dual)}$$

auch auf Grund des symmetrischen Satzes des Pythagoras:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{c}{h}, \quad ab = ch.$$

Ist H der Fußpunkt der Höhe h im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ und sind h_a , h_b die Höhen in den rechtwinkligen Dreiecken $\triangle AHC$, $\triangle BHC$, so gilt für diese Höhen und die Hypotenusenabschnitte p , q des Dreiecks $\triangle ABC$ mit $c = p+q$ noch die Beziehung:

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)^2.$$



Höhen der untereinander ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke

Wir folgern nämlich unter Verwendung des dualen Satzes des Pythagoras sowie des Höhensatzes:

$$\Delta BHC: \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{q^2}, \Delta AHC: \frac{1}{h_b^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{p^2}$$

(Addition der Gleichungen)

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{p^2}$$

(Zusammenfassen)

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{1}{q^2}$$

(Höhensatz)

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{pq} + \frac{1}{q^2}$$

(1. binomische Formel)

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)^2$$

Grundlegend für den primalen und dualen Satz des Pythagoras sowie die Folgerungen daraus ist im Übrigen die untereinander bestehende Ähnlichkeit der Dreiecke ΔABC , ΔAHC , ΔBHC .

Literatur: DIENER, I., Polareuklidische Geometrie. Der duale Satz des Pythagoras und das Basler Problem. Zusammenfassung des Vortrags im Kolloquium Mathematik und Geisteswissenschaft, 20. Oktober 2018 (https://mas.goetheanum.org/fileadmin/mas/downloads/Mathematik/201910_PEGeometrie_Diener/201810_Diener_MuG-Okt-2018.pdf); DIENER, I., Polareuklidische Geometrie. Unendlichferne Peripherie und absoluter Mittelpunkt: Eine duale Erweiterung der klassischen Geometrie (= Springer Spektrum), Berlin-Heidelberg 2021; HERRMANN, D., Die antike Mathematik (= Springer Spektrum), Berlin-Heidelberg 2014, S.23-50; HIRSCHBACH, L., [Reziproker] Höhensatz [im Zwei- und Dreidimensionalen. Beweise], [Bad Soden 2019]; Iamblichos, Pythagoras. Legende, Lehre, Lebensgestaltung. Griechisch und deutsch, hg. v. M. VON ALBRECHT [(= BdAW GR)], Darmstadt [Zürich-München] ²1985; HEATH, T., History of Greek Mathematics, Bd.1, Oxford 1921, S.65-117, 141-169; https://de.wikipedia.org/wiki/Polareuklidische_Geometrie (Polareuklidische, primale, duale Geometrie); <https://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras> (Pythagoras); https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras (Satz des Pythagoras); STILLWELL, J., Mathematics and its History (= Undergraduate Texts in Mathematics), New York ³2010, S.1-16; WUßING, H., 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise, Bd.1: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton, Berlin-Heidelberg 2008, S.158-177.

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 04.2019-07.2021