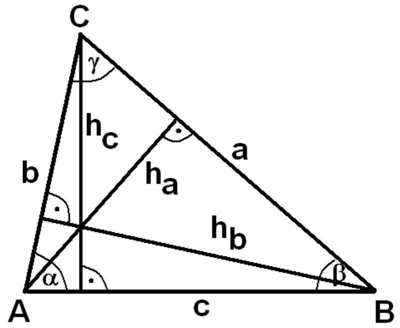
Michael Buhlmann

Mathematik > Geometrie > Sinus- und Kosinussatz

Sinus- und Kosinussatz

Eine geometrische Figur aus drei Punkten A, B, C und deren Verbindungsstrecken heißt Dreieck ΔABC. Es sei im Folgenden gegeben ein beliebiges Dreieck ΔABC mit den Seiten *a, b, c*, den Winkeln α, β, γ und den Höhen h_a, h_b, h_c. Bei Berechnungen in beliebigen Dreiecken spielen insbesondere der Sinus- und der Kosinussatz eine Rolle.

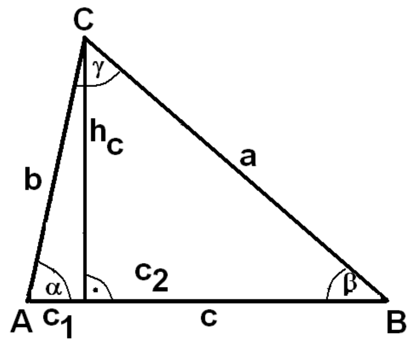


Sinus- und Kosinussatz				
Winkelsumme	α+β+γ = 180°	α = 180°-β-γ	β = 180°-α-γ	γ = 180°-α-β
Umfang	u = a + b + c	a = u – b – c	b = u – a – c	c = u – a – b
Flächeninhalt	$A=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$	$A=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$		$A=\frac{1}{2}ac\sin\beta$
Höhen	$h_a=b\sin\gamma=c\sin\beta$ $h_b=a\sin\gamma=c\sin\alpha$ $h_c=a\sin\beta=b\sin\alpha$			
Sinussatz	$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},\ \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma},\ \frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$			
Kosinussatz	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ $b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$			
Winkel	$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$	$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$		$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Herleitung

Bekanntlich errechnet sich in einem rechtwinkligen Dreieck der Sinus eines Winkels als Quotient aus Gegenkathete und Hypotenuse. Teilt man das beliebige Dreieck ΔABC etwa durch die Höhe h_c, die senkrecht auf der Seite c steht, so entstehen zwei rechtwinklige

Dreiecke mit den Seiten b und h_c als Hypotenuse und Kathete sowie dem Winkel α bzw. mit den Seiten a und und h_c als Hypotenuse und Kathete sowie dem Winkel β.



Gemäß dem Sinus im rechtwinkligen Dreieck folgt:

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a},$$

so dass Division der beiden Gleichungen

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\frac{h_c}{b}}{\frac{h_c}{a}} \underset{Kürzen}{\Leftrightarrow} \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \underset{\cdot b,:\sin\alpha}{\Leftrightarrow} \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

ergibt. Wegen:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

infolge einer weiteren Unterteilung des beliebigen Dreiecks ΔABC durch die Höhe h_a folgt daraus der <u>Sinussatz</u>:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Für die erste der drei Formeln des <u>Kosinussatzes</u> gilt auf Grund der obigen Unterteilung des beliebigen Dreiecks ΔABC durch die Höhe h_c die Herleitung:

$$a^2 = h_c^2 + c_2^2 = h_c^2 + (c-c_1)^2 = h_c^2 + c^2 - 2cc_1 + c_1^2 = c^2 - 2cc_1 + h_c^2 + c_1^2 = c^2 - 2cc_1 + b^2 =$$
$$b^2 + c^2 - 2cc_1 = b^2 + c^2 - 2cb\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

wobei im rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse b und Kathete h_c für den Kosinus des Winkels α gilt:

$$\cos\alpha = \frac{c_1}{b} \Leftrightarrow c_1 = b\cos\alpha.$$

Entsprechend sind die übrigen Formeln des Kosinussatzes zu ermitteln:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Was hier für spitzwinklige beliebige Dreiecke ΔABC hergeleitet wurde, gilt auch mit geringen Abweichungen für die Dreiecke ΔABC, die einen stumpfen Winkel enthalten.

Beispiele

I. Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten und ein Winkel, der gegenüber einer der Seiten liegt, bzw. zwei Winkel und eine Seite vorgegeben, so verwenden wir den Sinussatz zur Berechnung der fehlenden Dreieckstücke.

a) Aufgabe: Gegeben: a = 4 cm, b = 6 cm, α = 30°. Gesucht: c, β, γ.
Lösung: Es ist:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$$ = 0,75 => β = 48,6°

=> γ = 180° – 30° – 48,6° = 101,4°

und weiter: $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ = 7,8 cm.

b) Aufgabe: Gegeben: b = 8 cm, c = 10 cm, γ = 80°. Gesucht: a, α, β.
Lösung: Es gilt:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{b}{c}\sin\gamma$$ = 0,79 => β = 52°

=> α = 180° – 80° – 52° = 48°
und weiter:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a = c\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$ = 8 cm.

c) Aufgabe: Gegeben: c = 16 cm, α = 40°, β = 70°. Gesucht: a, b, γ.
Lösung: Es ist zunächst:

γ = 180° – 40° – 70° = 70°,
womit ein gleichschenkliges Dreieck vorliegt. Damit gilt: b = c = 16 cm. Weiter rechnen wir:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a = c\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$ = 10,9 cm.

d) Aufgabe: Gegeben: a = 4 cm, α = 55°, β = 35°. Gesucht: b, c, γ, A.
Lösung: Es ist zunächst:

γ = 180° – 55° – 35° = 90°.
Es liegt also ein rechtwinkliges Dreieck vor, so dass sich mit $\sin\gamma = 1$ ergibt:

$$\frac{1}{\sin 55°} = \frac{c}{4}$$ => c = 4,9 cm.

Nach dem Satz des Pythagoras ($a^2 + b^2 = c^2$) gilt dann: $b^2 = 4{,}9^2 - 4^2$ => b = 2,8 cm. Die Fläche des Dreiecks errechnet sich in diesem Fall als:

$$A = \frac{ab}{2}$$ = 5,6 cm^2.

II. Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten mit dazwischenliegendem Winkel oder drei Seiten vorgegeben, so verwenden wir zur Berechnung der fehlenden Dreieckstücke den Kosinussatz.

a) Aufgabe: Gegeben: a = 8,8 cm, b = 6,1 cm, γ = 108°. Gesucht: c, α, β.
Lösung: Wir bestimmen die Seite c gemäß:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 8{,}8^2 + 6{,}1^2 - 2\cdot 8{,}8\cdot 6{,}1\cdot\cos 108°$$ = 147,8 => c = 12,2 cm.

Nun wenden wir zur Bestimmung des Winkels α den Sinussatz an:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma$$ = 0,69 => α = 43,3°

=> β = 180° – 108° – 43,3° = 28,7°.

b) <u>Aufgabe</u>: Gegeben: a = 6 cm, b = 8 cm, c = 12 cm. Gesucht: α, β, γ, A.
<u>Lösung</u>: Um beispielsweise den Winkel α zu bestimmen, formen wir den Kosinussatz wie folgt um:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Leftrightarrow 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Damit gilt:
$\cos\alpha$ = 0,9 => α = 26,4°.
Weiter ist: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$ = 0,59 => β = 36,3°
=> γ = 180° – 26,4° – 36,3° = 117,3°.
Die Fläche des Dreiecks errechnet sich als:
$A = \frac{1}{2}ac\sin\beta$ = 42,48 cm².

III. Nicht jede Vorgaben von Seiten und/oder Winkeln führen wirklich auf ein existierendes Dreieck, wenn Zahlen auftreten, die außerhalb der Bereiche für Sinus und Kosinus ($-1 \le \sin\alpha, \cos\alpha \le 1$) liegen.

<u>Aufgabe</u>: Gegeben: a = 4 cm, b = 6 cm, α = 60°. Gesucht: c, β, γ.
<u>Lösung</u>: Es ist nach dem Sinussatz:
$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$ = 1,3 => Dreieck existiert nicht.

<u>Literatur</u>: dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München ³2003, S.192-195 (Sinus-, Kosinussatz); https://de.wikipedia.org/wiki/Kosinussatz (Kosinussatz); https://de.wikipedia.org/wiki/Sinussatz (Sinussatz).

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 10.2022