Michael Buhlmann

Mathematik > Geometrie > Konstruktion des Wertes einer Wurzel

Geometrische Konstruktionsverfahren

Reelle Zahlen w können mit Hilfe geometrischer Figuren konstruiert und als Strecken innerhalb dieser Figuren dargestellt werden. Im Folgenden wird eine Konstruktion zur Bestimmung des Wertes w einer Wurzel einer reellen Zahl x vorgestellt, d.h.: der (ungefähre) Wert $w = \sqrt{x}$ kann als Strecke innerhalb einer Figur gemessen werden, nachdem diese Strecke mit Länge w durch ein besonderes Konstruktionsverfahren aus einer Strecke mit Länge x gewonnen wurde. Das Konstruktionsverfahren basiert auf dem Satz des Thales und den Satz des Pythagoras, d.h. es gilt:

Satz des Thales: Ist die Strecke $\overline{AB}$ zwischen zwei Punkten A, B der Durchmesser eines (Thales-) Kreises und liegt ein Punkt C, der nicht A und nicht B ist, auf dem Kreis, so sind die Punkte A, B, C Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit rechtem Winkel bei C.

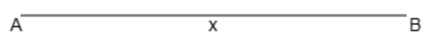
Satz des Pythagoras: In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C heißen die den Ecken A, B gegenüberliegenden Seiten a, b Katheten, die der Ecke C und dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite c Hypotenuse. Dann gilt hinsichtlich der Quadrate der Seitenlängen a, b, c:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

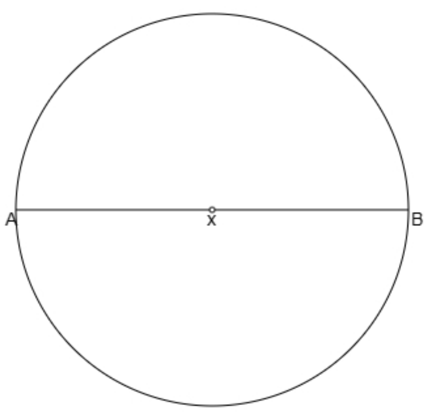
Konstruktionsverfahren

Das nachfolgend vorgestellte Verfahren konstruiert für eine reelle Zahl $x > 1$ als Strecke ein Strecke, die die Länge $w = \sqrt{x}$ besitzt:

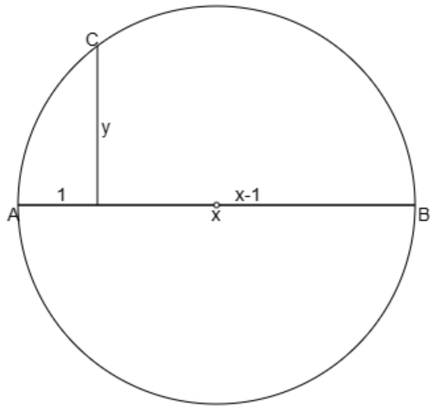
Schritt 1: Zeichne eine Strecke mit der Länge x. Die Endpunkte der Strecke heißen A und B, die Strecke sei mit $\overline{AB}$ bezeichnet.



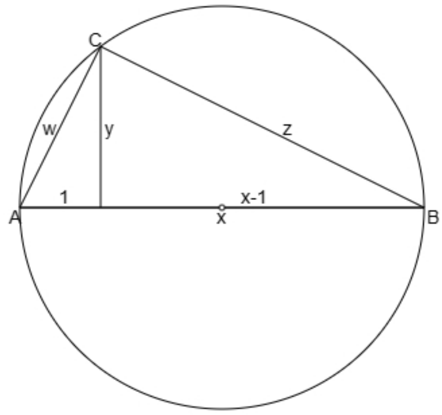
Schritt 2: Um den Mittelpunkt (M) der Strecke $\overline{AB}$ wird der Thaleskreis mit Durchmesser $d = x$ und Radius $r = x/2$ gezeichnet. Die Eckpunkte A, B der Strecke $\overline{AB}$ liegen auf dem Thaleskreis.



Schritt 3: Die Strecke $\overline{AB}$ wird (wegen x > 1) in zwei Teilstrecken der Länge 1 und der Länge x-1 unterteilt. Im (Unterteilungs-) Punkt (T), in dem die Strecke $\overline{AB}$ unterteilt wurde, wird eine Senkrechte zur Strecke $\overline{AB}$ gebildet. Diese Senkrechte schneidet den Thaleskreis (u.a.) im Punkt C. Die Strecke zwischen dem Unterteilungspunkt (T) und C hat die Länge y.

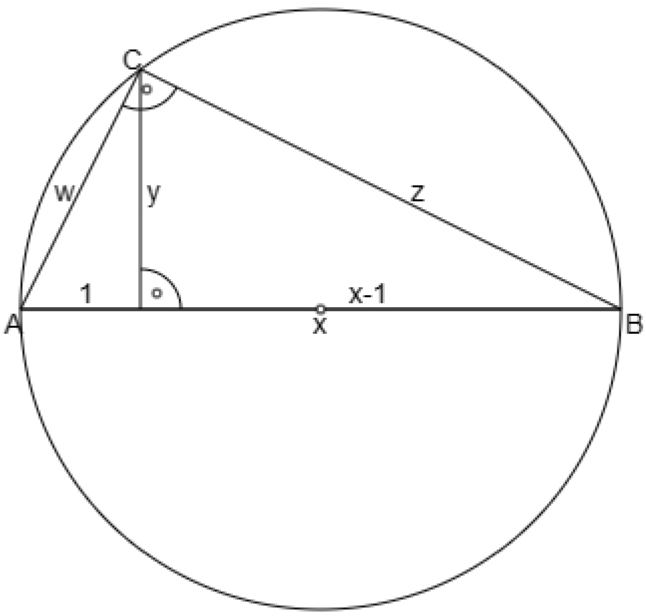


Schritt 4:Verbinde den Punkt C mit den Punkten A und B zum Dreieck ABC. Die Strecke zwischen A und C besitzt die Länge w, die Strecke zwischen B und C die Länge z. Die Länge w = $\overline{AC}$ ist der gesuchte und damit geometrisch konstruierte Wert der Wurzel von x mit: w = √x.



Wir beweisen noch, dass w wirklich die Wurzel √x ist, und haben laut Konstruktion von Thaleskreis (gemäß dem Satz des Thales) und Senkrechte rechtwinklige Dreiecke mit den Seiten z, w, x, den Seiten 1, y, w und den Seiten y, x-1, z (jeweils als: Kathete, Kathete, Hypotenuse) vorliegen. Es gilt also (nach dem Satz des Pythagoras):

$$z^2 + w^2 = x^2 \ (1),\ 1^2 + y^2 = w^2 \ (2),\ y^2 + (x-1)^2 = z^2 \ (3).$$



Wir setzen die Beziehung (3):

$z^2 = y^2 + (x-1)^2$ (3)

und die Beziehung (2):

$1^2 + y^2 = w^2 \Leftrightarrow y^2 = w^2 - 1$ (2)

nacheinander in die Gleichung (1) ein und formen wie folgt um:

$z^2 + w^2 = x^2$ (1)	Einsetzen von Beziehung (3)
$y^2 + (x-1)^2 + w^2 = x^2$	Einsetzen von Beziehung (2)
$w^2 - 1 + (x-1)^2 + w^2 = x^2$	(2. binomische Formel)
$w^2 - 1 + x^2 - 2x + 1 + w^2 = x^2$	(Zusammenfassen)
$2w^2 + x^2 - 2x = x^2$	$\mid -x^2$
$2w^2 - 2x = 0$	$\mid +2x$
$2w^2 = 2x$	$\mid :2$
$w^2 = x$	$\mid \sqrt{}$
$w = \sqrt{x}$.	

In der Tat gilt: $w = \sqrt{x}$.

Wir haben bisher $x > 1$ vorausgesetzt. Ist $x = 1$, so wird keine geometrische Konstruktion benötigt, da $w = \sqrt{1} = 1$ gilt. Ist $0 < x < 1$, so kann die Konstruktion mit dem Kehrwert $x^* = 1/x > 1$ erfolgen; die konstruierte Strecke w^* ist dann $w^* = 1/w$ lang, so dass $w = 1/w^* = \sqrt{x}$ erfüllt ist.

www.michael-buhlmann.de / Michael Buhlmann, 08.2023