Michael Buhlmann

Schülerkurs

Mathematik

> Lineare Algebra
> Lineare Gleichungen
Lineare Gleichungssysteme
> Teil II: Aufgaben, Lösungen

Lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme durchziehen den Mathematikunterricht in allen Schulformen bis hin zur Oberstufe der Gymnasien. Von daher ist es wichtig und richtig, die Theorie der linearen Gleichungen und Gleichungssysteme einmal geschlossen darzustellen, wie es hier im Folgenden geschehen soll: angefangen von den linearen Gleichungen über den Gauß-Algorithmus bis hin zu den linearen Gleichungssystemen mit Parametern.
Mathematikprogramme zum Berechnen linearer Gleichungen und Gleichungssysteme sind unter www.michael-buhlmann.de > Mathematik-Programme verfügbar.

Bezeichnungen:

$=$	gleich
$\neq$	ungleich
$>$	größer
$<$	kleiner
$\Rightarrow$	Folgerung
$\Leftrightarrow$	Äquivalenz
$\in$	Element von
$\cap$	geschnitten
$\subset$	Teilmenge
$\parallel$	parallel
$\mathbf{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbf{N}_0$	natürliche Zahlen einschließlich der Null
$\mathbf{R}$	reelle Zahlen
R.S.	Rechte Seite

Aufgaben

VIII. Aufgaben zu linearen Gleichungen

VIII.1 Aufgaben: Löse die folgenden linearen Gleichungen; bestimme die Lösungsmenge:

a) $4x = 20$
b) $x + 12 = 15$
c) $3x = -9$
d) $x - 8 = 10$
e) $2x = 5$
f) $x - 12 = 25$
g) $-2x = 10$
h) $x + 1 = -10$
i) $-5x = -25$
j) $x + 3 = -20$
k) $10x = 7$
l) $x + 5 = -19$
m) $8x = -32$
n) $2x + 1 = 27$
o) $45x = 90$
p) $2x - 5 = 13$
q) $0{,}5x = 2$
r) $4x - 2 = 22$
s) $-3x = 90$
t) $6x + 13 = 133$
u) $\frac{1}{5}x = 20$
v) $\frac{1}{2}x + 4 = 19$
w) $-\frac{1}{3}x = 9$
x) $-x - 12 = -50$
y) $-4x = -28$
z) $-3x - 8 = -50$

VIII.2 Aufgaben: Löse die folgenden linearen Gleichungen; bestimme die Lösungsmenge:

a) $5x - 10 = 3x$
b) $10x + 56 = 3x$
c) $x + 21 = -6x$
d) $12x + 34 = 3x - 11$
e) $0{,}1x + 4{,}5 = 11{,}1 - x$
f) $1{,}78x - 6{,}8 + 2x = 0{,}8x + 23$
g) $-3x + 67 - 2x = 109 - 5x - 63$
h) $2{,}6x + 11{,}8 - 1{,}2x = 4{,}3 + 8{,}9x + 7{,}5$
i) $\frac{1}{2}x + 0{,}75 - 1{,}2x = 1{,}15 - \frac{3}{4}x - \frac{2}{5} + 0{,}05x$
j) $5112x + 13977 = 11102 - 2044x - 25749$
k) $\frac{5}{4}x - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}x = 26\frac{1}{3} + \frac{1}{10}x + \frac{163}{3}$
l) $52x + 955 - 7x = 27x - 17063 + 36x$

VIII.3 Aufgaben: Löse die folgenden linearen Gleichungen; bestimme die Lösungsmenge:

a) $4x - 3 + x = 7 - 3x - 2$
b) $0{,}5x + 20 = 6x - 10 + 2x$
c) $3{,}5 + 2x - 10 + 1{,}5x = 4{,}5 + 2x + 5{,}5$
d) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - 2 = \frac{x}{8} + 3$
e) $100x + 23x - 1000 = 43x + 600$

f) $\frac{x+8}{2}+x-10=10x-\frac{x}{2}-22$

g) *0,5·(x+10) + 1,5 = 2x + 6 – 10*

h) *120 – 0,25x – 15 = 0,1x + 70*

i) *34 – x + 68 – 2x + 136 = 238 + 3x*

j) *17 – 10x – 4 – x = 3x – 11 – 5x – 3*

k) *x + 12 – 0,5x = 24 + 3(x–14)*

l) $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+9=\frac{x}{6}+19$

m) *2x + 5(x+4) – 20 = -x + 2(x–3)*

n) *-7x = 100 – 10x + 160 – 10x*

o) *5x + 25 – 60 = 93 – 3x + 24*

p) $\frac{2x+2}{9}-\frac{x-7}{4}=\frac{3x-17}{4}$

q) *3x – 105 + 2x – 70 = 35 – x*

r) *x + 2(x+4) + 4x = 20 + 6(x+2) – 13*

s) *104,5 + 23,6 – 20,4x = 10,5x – 335,4*

t) *89,55x – 27,2x + 12,65 = 34,73 + 40,27x*

VIII.4 Aufgaben: Löse die folgenden linearen Gleichungen; bestimme die Lösungsmenge:

a) *6(5–x) = 8(x+2)*

b) *17(2x+3) – 5(x–8) – 9(x+4) = 35*

c) *11(5+3x) – 97 = 12x*

d) *3,5(x+1) – 1,7(2+x) = 0,3(x+3) + 2,2*

e) $\frac{1}{5}x-\frac{2}{3}(4x+5)+\frac{3}{10}=2(x-3)+\frac{1}{2}(6-5x)-\frac{148}{15}$

f) *90(x+4) – 72(2x+3) + 105 = 110x + 14(12–8x) + 24(4x+1) – 17*

g) *5(x+4) + 5(2x–9) = 5(x+6) + 10(x–1) – 45*

h) *4(x+16) – 8(2x–5) – 27 = 4(x+10) – 8(2x+1) + 13*

i) *-77(2x+1) + 33(x–7) + 12(1–5x) = 82(5–3x) + 15(4x+9) + 3(x–26)*

IX. Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen

IX.1 Aufgaben: Forme die folgenden linearen Gleichungssysteme in Dreiecksgestalt um und bestimme die Lösungen:

a)	b)
$\begin{aligned} -2x - 7y &= 6 \\ +10x + z &= 0 \\ +4y - z &= 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} +2x - 2y - z &= 5 \\ +5x + 10y + 2z &= -4 \\ -7x + 3y + 8z &= 4 \end{aligned}$

c)
$$\begin{aligned} +3x + y - 2z &= -50 \\ -6x + 2y - 3z &= 60 \\ -8x + 3y - z &= 306 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} +\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z &= -13 \\ +\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z &= 13 \\ -\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z &= -33 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} +2x - y + z + 4u &= 3 \\ +3x + 2y - z + 3u &= 2 \\ +4x + 3y - 3z + 6u &= 1 \\ -5x + 7y + 5z - u &= 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} +x - y + z + u &= 18 \\ +2x + y - 2z + u &= -50 \\ +4x + 3y + z - 2u &= 148 \\ +8x - 7y - 5z + 3u &= -6 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 4(x - y) + 3(z + u) &= 17 \\ 3(2 - x) + 6y + 2(z - 2u) &= 5 \\ 12 + 5(x + y) - 4z + u &= 19 \\ 6x - 2(y + 3z) + 5u &= 4 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} +2x + 3y + 1z - 1u + 2v &= -3 \\ +1x + 2y - 3z - 2u - 3v &= 5 \\ -1x + 1y - 2z + 2u + 3v &= 3 \\ +3x - 3y - 2z + 3u + 1v &= -2 \\ +1x - 2y + 1z + 3u - 2v &= 1 \end{aligned}$$

IX.2 Aufgaben: Forme die folgenden linearen Gleichungssysteme in Diagonalgestalt um und bestimme die Lösungen:

a)
$$\begin{aligned} -10x + y + z &= 100 \\ x + 10y - z &= 1 \\ 100x + y - z &= 10 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} +2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 7 \\ +5x_1 + 11x_2 + 2x_3 &= 14 \\ -9x_1 + 12x_2 - 3x_3 &= -21 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} +4x - 3y &= +3x - 2z + 10 \\ -5x + 2z &= -y + z - 10 \\ +3y + 5z &= +2x - 5y + 10 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} +\frac{1}{6}x + \frac{5}{6}y - \frac{1}{2}z &= 1 \\ +x - \frac{1}{10}y + \frac{1}{5}z &= -1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{4}z &= 1 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} +2x - y + z + 4u &= 3 \\ +3x + 2y - z + 3u &= 2 \\ +4x + 3y - 3z + 6u &= 1 \\ -5x + 7y + 5z - u &= 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} +x - y + z + u &= 18 \\ +2x + y - 2z + u &= -50 \\ +4x + 3y + z - 2u &= 148 \\ +8x - 7y - 5z + 3u &= -6 \end{aligned}$$

IX.3 Aufgaben: Bestimme die (leeren, eindeutigen, mehrdeutigen) Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} -4x_1 + 9x_2 &= 24 \\ +10x_1 - 22.5x_2 &= -60 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 2x_1 - 5x_3 &= 8 \\ 4x_2 + 5x_3 &= 6 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 18 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -11 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} +x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= -7 \\ +3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 &= 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= -9 \\ -x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} +x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 35 \\ +2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 11x_5 &= 25 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 5x_5 &= 10 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} +2x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 &= 0 \\ -5x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 20x_4 &= 0 \\ -7x_1 + 9x_2 - 9x_3 + 28x_4 &= 0 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} 5x_1 + 12x_2 + 13x_3 &= 30 \\ -2x_1 + 10x_2 - 23x_3 &= -15 \\ 12x_1 + 14x_2 + 49x_3 &= 75 \\ 20x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= 25 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 5x_1 + 12x_2 - 4x_3 &= 1 \\ 8x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= -22 \\ -7x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 56 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} +4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 14 \\ +3x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -9 \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} +x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ +x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 &= -2 \\ +2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -7 \end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned} +2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 54 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 33 \\ +5x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -42 \\ +x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 4x_4 &= -73 \end{aligned}$$

l) $$\begin{aligned} 7x_1 - 6x_2 + 8x_3 &= 0 \\ -5x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 &= 0 \end{aligned}$$

m) $$\begin{aligned} +32x_1 - 31x_2 + 30x_3 - 29x_4 &= 0 \\ -28x_1 - 27x_2 + 26x_3 - 25x_4 &= 0 \\ +24x_1 - 23x_2 + 22x_3 + 21x_4 &= 0 \\ +20x_1 - 19x_2 + 18x_3 + 17x_4 &= 0 \end{aligned}$$

n) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

IX.4 <u>Aufgaben</u>: Bestimme die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme in Matrixdarstellung:

a) $$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & 67 \\ 2 & -3 & 38 \end{array}\right)$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 9 & 24 \\ 12 & -18 & -48 \end{array}\right)$$

c) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right)$$

d) $$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 76 \\ 3 & 5 & -104 \\ 2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

e) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 12 \\ 5 & -4 & -2 & -11 \\ 8 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

f) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -1 & 15 \end{array}\right)$$

g) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -18 & 6 & 700 \\ 12 & 20 & -3 & 1680 \\ 2 & -9 & 11 & 280 \end{array}\right)$$

h) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -4 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

i) $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0.25 & 1.5 & 12.25 \\ 2.5 & 3 & 4 & 35 \\ 3.5 & 5 & 1.5 & 17 \\ 0.6 & 0.45 & 0.2 & 2.05 \end{array}\right)$

j) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 7 & -4 & 44 \\ -2 & 4 & 7 & 5 & -14 \\ 5 & -3 & 2 & 8 & -60 \\ 6 & 9 & -8 & 3 & 18 \end{array}\right)$

k) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right)$

l) $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 2 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & -6 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right)$

m) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 6 & -7 \\ 1 & 1 & -3 & -6 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 5 & 2 & 1 & -6 & -3 \end{array}\right)$

n) $\left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{3}{10} & 1 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{11} & \frac{5}{22} & -\frac{1}{22} & \frac{23}{22} & 2 \end{array}\right)$

X. Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen mit Parameter

X.1 Aufgaben: Für welche Parameter t haben die folgenden linearen Gleichungssysteme keine, eindeutige oder mehrdeutige Lösungen?

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} t+4 & t-4 & t^2 & t^2-t+4 \\ 0 & t^2-4 & t+1 & -t^2+t+6 \\ 0 & 0 & t^2-t-6 & 2t^2-2t-12 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} t-1 & t & -1 & t-1 \\ 4t & 2t & 6 & 8t^2+4t \\ 16t-4 & 10t & 14 & 24t^2+16t-4 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3t-6 & 2t \\ t-2 & 0 & 8 & t+5 \\ -t & t^2+1 & t & 5 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ t-1 & 2t & t+1 & 0 \\ t^2-1 & t+1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2t & 6t-4 \\ 1 & 1 & 2t-2 & 6t-2 \\ t & t^3 & 16 & -12t \end{array}\right)$

X.2 Aufgaben: Gegeben seien zu den reellen Parametern a, b, k, r, t die folgenden linearen Gleichungssysteme, zu denen die (parameterabhängigen) Lösungsmengen zu bestimmen sind.

a)
$$\begin{aligned} -4x_1 + 8x_2 &= a \\ +10x_1 - 5x_2 &= 2b \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 7x_1 - x_2 + kx_3 &= 0{,}5 \\ 5x_1 + 2kx_2 - 4x_3 &= 0{,}5 \end{aligned}$$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} t & 2t & 4 & t^2-20 \\ 0 & t^2 & t & -5t \\ 0 & 0 & t+5 & t^2-25 \end{array}\right)$

d) $tx_1 + 2x_2 = 3t$
$-tx_2 + x_3 = 0$
$8x_1 + 2tx_2 - x_3 = t^2+8$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} t^2-9 & 2t & 0 & t^2+4t-9 \\ 0 & t^2+4t & t+2 & 2t^2+9t+3 \\ 0 & 0 & t^2+3t+2 & t^2+4t+3 \end{array}\right)$

f) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$(r-2)x_2 = r^2 - 4$
$(r^2-3r+2)x_3 = 4r^2 - 12r + 8$

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & t & 0 \\ 1 & t+1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2t & 6t-4 \\ 1 & 1 & 2t-2 & 6t-2 \\ t & t^3 & 16 & -12t \end{array}\right)$

i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -t \\ 0 & 1-t & 2-t & 2t-t^2 \\ 0 & 1 & 2-t & t \end{array}\right)$

j) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2r & 5r & -6 & 4r-2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ r & 2r-1 & r+1 & 2r+1 \end{array}\right)$

Lösungen

I.9 Als Lösungen ergeben sich auf Grund der Gleichungsumformungen (hier getrennt durch „/“):

a) *4x = 7* **|** :4 / $x = \frac{7}{4}$ / **L** = $\left\{\frac{7}{4}\right\}$

b) *3x + 7 = 46* **|** -7 / *3x = 39* **|** :3 / *x = 13* / **L** = {13}

c) *34x + 12 = 104 – 12x* **|** +12x / *46x + 12 = 104* **|** -12 / *46x = 92* **|** :46 / *x = 2* / **L** = {2}

d) *11x + 3 – 3x = -15 + 5x* / *8x + 3 = -15 + 5x* **|** -5x / 3x + 3 = -15 **|** -3 / *3x = -18* **|** :3 / *x = -6* / **L** = {-6}

e) *23x + 28 – 4x + 12 = 2x + 130 – 13x* / *19x + 40 = -11x + 130* **|** +11x /
30x + 40 = 130 **|** -40 / *30x = 90* **|** :30 / *x = 3* / **L** = {3}

f) *12x – (9 – 6x) = 2x – 1* / 12x – 9 + 6x = 2x – 1 / *18x – 9 = 2x – 1* **|** -2x / *16x – 9 = -1* **|** +9 / *16x = 8* **|** :2 / x = 0,5 / **L** = {0,5}

g) *2(x+2) – 10 = 5x – 7 – 3x* / *2x + 4 – 10 = 2x – 7* / *2x – 6 = 2x – 7* **|** -2x / *- 6 = -7* / **L** = { }

h) *4(x-3) – 3(x-4) = 2(x+12)* / *(4x – 12) – (3x – 12) = 2x + 24* / *4x – 12 – 3x + 12 = 2x + 24* / *x = 2x + 24* **|** -2x / *-x = 24* **|** ·(-1) / *x = -24* / **L** = {-24}

i) $\frac{1}{2}(2x+6) = 5x + 9 - 7x$ / *x + 3 = -2x + 9* **|** +2x / *3x + 3 = 9* **|** -3 / *3x = 6* **|** :3 / *x = 2* / **L** = {2}

j) $\frac{x-4}{6} + \frac{1}{2} = \frac{x}{4}$ **|** ·12 (Hauptnenner) / 2(x-4) + 6 = 3x / 2x – 8 + 6 = 3x / 2x – 2 = 3x **|** -2x / -2 = x / **L** = {-2}

k) $4x + \frac{x}{4} = \frac{x+4}{4} + 4$ **|** ·4 (Hauptnenner) / *16x + x = (x + 4) + 16* / *17x = x + 20* **|** -x /

16x = 20 **|** :16 / *x* = $\frac{20}{16} = \frac{5}{4}$ / **L** = $\left\{\frac{5}{4}\right\}$

l) $3(x-8) + \frac{x+3}{8} = 2 - \frac{1}{3}(x+5)$ **|** ·24 (Hauptnenner) / *72(x-8) + 3(x+3) = 48 – 8(x+5)* /

72x – 576 + 3x + 9 = 48 – 8x – 40 / *75x – 567 = 8 – 8x* **|** +8x / *83x – 567 = 8* **|** +567 /

83x = 575 **|** :83 / *x* = $\frac{575}{83}$ / **L** = $\left\{\frac{575}{83}\right\}$

II.3 Als Lösungen ergeben sich auf Grund der Gleichungsumformungen (hier getrennt durch „/“):

a) *4x + a = 2a* **|** -a / *4x = a* **|** :4 / *x* = $\frac{a}{4}$ / $\mathbf{L}_a$ = $\left\{\frac{a}{4}\right\}$

b) *7x + 2t = 21 – 5t* **|** -2t / *7x = 21 – 7t* **|** :7 / *x = 3 – t* / $\mathbf{L}_t$ = {2–t}

c) *ax + 5 = x + a* **|** -5 / *ax = x + a – 5* **|** -x / *ax – x = a – 5* (Ausklammern) / *x(a–1) = a – 5* //
Fall 1: a–1 ≠ 0 ⇔ a ≠ 1; **|** :(a–1): *x* = $\frac{a-5}{a-1}$ / $\mathbf{L}_{a\neq1}$ = $\left\{\frac{a-5}{a-1}\right\}$ // Fall 2: a = 1: *0 = -4* / $\mathbf{L}_{a=1}$ = { }

d) $k^2(x+4) = x(2k-1) + 4$ (Auflösen der Klammern) / $k^2x + 4k^2 = 2kx - x + 4$ **|** -2kx, +x, -4k² /
$k^2x - 2kx + x = 4 - 4k^2$ (Ausklammern) / $x(k^2-2k+1) = 4(1-k^2)$ (Binomische Formeln) /

x(k–1)^2 *= 4(1–k)(1+k)* / Fall 1: $(k-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow k-1 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$; | :$(k–1)^2$: $x = \frac{4(1-k)(1+k)}{(k-1)^2} =$

$= -\frac{4(k+1)}{k-1}$ / $\mathbf{L}_{k\neq 1} = \left\{-\frac{4(k+1)}{k-1}\right\}$ / Fall 2: k = 1: 0 = 0 / $\mathbf{L}_{k=1} = \mathbf{R}$

e) *kx(k–1) – 3(2x–1) = k* (Auflösen der Klammern) / *k^2x – kx – 6x + 3 = k* | -3 /
k^2x – kx – 6x = k – 3 (Ausklammern) / *x(k^2–k–6) = k – 3* // Fall 1: $k^2–k–6 \neq 0 \Leftrightarrow$

$k \neq 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25+6} = 0{,}5 \pm 2{,}5 \Leftrightarrow k \neq -2, k \neq 3$; | :(k+2)(k–3): $x = \frac{k-3}{(k+2)(k-3)} = \frac{1}{k+2}$ /

$\mathbf{L}_{k\neq -2,\, k\neq 3} = \left\{\frac{1}{k+2}\right\}$ // Fall 2: k = -2: *0 = -5* / $\mathbf{L}_{k=-2}$ = { } // Fall 3: k = 3: *0 = 0* / $\mathbf{L}_{k=3} = \mathbf{R}$

f) $\frac{1}{t}x + 4t = -\frac{1}{t^2}x$ | $\cdot t^2$ (Hauptnenner) / *tx + 4t^3 = -x* | +x, -4t^3 / *tx + x = -4t^3* (Ausklammern) /

x(t+1) = -4t^3 // Fall 1: $t \neq 0$, $t+1 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0, t \neq -1$; | :(t+1): $x = -\frac{4t^3}{t+1}$ / $\mathbf{L}_{t\neq 0,\, t\neq -1} = \left\{-\frac{4t^3}{t+1}\right\}$ //

Fall 2: $t \neq 0$, t = -1: *0 = -4t^3* / $\mathbf{L}_{t\neq 0,\, t\neq -1}$ = { }

III.5 Als Lösungen ergeben sich auf Grund von Umformungen (hier getrennt durch „/“):

a) *y = 2x + 5, y = -x +8* (Gleichsetzen) / *2x + 5 = -x +8* | +x / *3x + 5 = 8* | -5 / *3x = 3* | :3 /
x = 1 (Einsetzen in eine Gleichung des Gleichungssystems) / *y = 2·1 + 5 = 7 / x = 1, y = 7* /
L = {(1|7)}

b) *x = 5y + 3, 2x = 12y* | :2 / *x = 5y + 3, x = 6y* (Gleichsetzen) / *5y +3 = 6y* | -5y / *3 = y* (Einsetzen in eine Gleichung des (umgeformten) Gleichungssystems) / *x = 6·3 = 18 / x = 18, y = 3* / **L** = {(18|3)}

c) *y + 4 = x + 3* | -4, *2y = x + 5* | :2 / *y = x – 1, y = 0,5x + 2,5* (Gleichsetzen) /
x – 1 = 0,5x + 2,5 | -0,5x / *0,5x – 1 = 2,5* | +1 / *0,5x = 3,5* | ·2 / *x = 7* (Einsetzen in eine Gleichung des (umgeformten) Gleichungssystems) / *y = 7 – 1 = 6* / *x = 7, y = 6* / **L** = {(7|6)}

d) *2(x+1) = 5(y–12) + 8y + 17, 6x = 5y + 3(y–3) + 29* (Klammern auflösen) /
2x + 2 = 5y – 60 + 8y + 17, 6x = 5y + 3y – 9 + 29 (Zusammenfassen) /
2x + 2 = 13y – 43 | -2, *6x = 8y + 20* / *2x = 13y – 45* | ·3, *6x = 8y + 20* /
6x = 39y – 135, 6x = 8y + 20 (Gleichsetzen) / *39y – 135 = 8y + 20* | -8y /
31y – 135 = 20 | +135 / 31y = 155 | :31 / *y = 5* (Einsetzen) / *2x = 13·5 – 45* / *2x = 20* | :20 /
x = 10 / x = 10, y = 5 / **L** = {(10|5)}

III.8 Als Lösungen ergeben sich auf Grund von Umformungen (hier getrennt durch „/“):

a) Einsetzen von *y = 4x – 29* in die 2. Gleichung *2x + y = 19* ergibt: *2x + (4x–29) = 19* /
6x – 29 = 19 | +29 / *6x = 48* | :6 / *x = 7* (Einsetzen) / *y = 4·7 – 29 = -1 / x = 7, y = -1* /
L = {(7|-1)}

b) Die Umformung: *5x = 7 – 2y* | ·2 / *10x = 14 – 4y* führt zum Einsetzen in die 2. Gleichung: *(14–4y) – 3y = 49 / 14 – 7y = 49* | -14 / *-7y = 35* | :(-7) / *y = -5* (Einsetzen) / *5x = 7 – 2·(-5)* / *5x= 17* | :5 / *x = 3,4 / x = 3,4, y = 9* / **L** = {(3,4|9)}

c) Auch hier führt die Umformung *2y = 2x – 16* | ·2 / *4y = 4x – 32* durch Einsetzen in die 2. Gleichung zu: *7x = 23 – (4x–32) / 7x = 23 – 4x + 32 / 7x = -4x + 55* | +4x / *11x = 55* | :5 /
x = 5 (Einsetzen) / *2y = 2·5 – 16 / 2y = -6* | :2 / *y = -3 / x = 5, y = -3* / **L** = {(5|-3)}

d) Einsetzen von *y = 5x – 3* in die 2. Gleichung ergibt: *12x + 3(5x–3) + 10 = 2(5x–3–3)* /
12x + 3(5x–3) + 10 = 2(5x–6) / 12x + 15x – 9 + 10 = 10x – 12 / 27x + 1 = 10x – 12 | -10x /

17x + 1 = -12 | -1 / *17x = -13* | :(-17) / $x = -\frac{13}{17}$ (Einsetzen) / $y = -5\cdot\frac{13}{17} - 3 = -\frac{116}{17}$ /

$x = -\frac{13}{17}$, $y = -\frac{116}{17}$ / **L** = $\left\{\left(-\frac{13}{17}\middle|-\frac{116}{17}\right)\right\}$

III.11 <u>Lösungen</u>: a) Wir addieren die beiden Gleichungen:

$4x + 3y = 10$ $7x – 3y = 56$	 (Gleichungsaddition)
$4x + 3y = 10$ $11x = 66$	
$4x + 3y = 10$ $x = 6$	

Einsetzen von x = 6 in die 1. Gleichung ergibt: $24 + 3y = 10 \Leftrightarrow 3y = -14 \Leftrightarrow y = -\frac{14}{3}$. Also:

x = 6, y = $-\frac{14}{3}$ und damit als Lösungsmenge: **L** = $\left\{\left(6\middle|-\frac{14}{3}\right)\right\}$.

b) Anwendung des Additionsverfahrens ergibt:

$5x + 8y = 29$ $7x + 5y = 53$	$\mid \cdot(-7)$ $\mid \cdot 5$
$-35x – 56y = -203$ $35x + 25y = 265$	 (Gleichungsaddition)
$-35x – 56y = -203$ $-31y = 62$	 $\mid :(-31)$
$-35x – 56y = -203$ $y = -2$	(Einsetzen von y = -2)
$-35x + 112 = -203$ $y = -2$	$\mid -112$
$-35x = -315$ $y = -2$	$\mid :(-35)$
$x = 9$ $y = -2$	

Lösungsmenge ist: **L** = {(9|-2)}.

c) Umformen und die Anwendung des Additionsverfahrens führt auf:

$4x – 9 + 2y = x + 8$ $3x + 12 = 37 – 4y$	$\mid -x, +9$ $\mid +4y, -12$
$3x + 2y = 17$ $3x + 4y = 25$	 $\mid \cdot(-1)$
$3x + 2y = 17$ $-3x - 4y = -25$	 (Gleichungsaddition)
$3x + 2y = 17$ $-2y = -8$	 $\mid :(-2)$
$3x + 2y = 17$ $y = 4$	(Einsetzen von y = 4)
$3x + 8 = 17$ $y = 4$	$\mid -8$
$3x = 9$ $y = 4$	$\mid :3$
$x = 3$ $y = 4$	

Lösungsmenge ist: **L** = {(3|4)}.

d) Die angesprochene Substitution ergibt ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten x' und y':

$2x' + 3y' = 2$ $4x' – 7y' – 1 = -10$	 | +1
$2x' + 3y' = 2$ $4x' – 7y' = -9$	| ·(-2)
$-4x' – 6y' = -4$ $4x' – 7y' = -9$	(Gleichungsaddition)
$-13y' = -13$ $4x' – 7y' = -9$	| :(-13)
$y' = 1$ $4x' – 7y' = -9$	 (Einsetzen von y' = 1)
$y' = 1$ $4x' – 7 = -9$	 | +7
$y' = 1$ $4x' = -2$	 | :4
$y' = 1$ $x' = -0,5$	

Aus $x' = -0,5$, $y' = 1$ folgt dann: $x = \frac{1}{-0,5} = -2$, $y = \frac{1}{1} = 1$. Als Lösungsmenge ergibt sich somit: **L** = {(-2|1)}.

III.14 Die <u>Lösungen</u> der linearen Gleichungssysteme werden hauptsächlich nach dem Additionsverfahren errechnet:

a) Es gilt auf Grund der Addition der 1. Gleichung zum Doppelten der 2. Gleichung:

$$+\ 4x + 12y = -8$$
$$-\ 2x + 20y = -22$$

$$+\ 4x + 12y = -8$$
$$+ 52y = -52$$

und damit $y = -1$ und – nach Einsetzen in die 1. Gleichung – $x = 1$. Also: **L** = {(1|-1)}.

b) Wir lösen zunächst die Klammern auf und fassen zusammen, bevor wir das Additionsverfahren anwenden:

$5x – 15 + 6y – 42 = 0$ $25x – 7y + 14 = 40$	
$5x – 57 + 6y = 0$ $25x – 7y + 14 = 40$	| +67 | -14
$5x + 6y = 57$ $25x – 7y = 26$	| ·(-5)
$-25x – 30y = -285$ $25x – 7y = 26$	(Gleichungsaddition)
$-37y = -259$ $25x – 7y = 26$	| :(-37)
$y = 7$ $25x – 7y = 26$	 (Einsetzen von y = 7)
$y = 7$ $25x – 49 = 26$	 | +49

$y = 7$ $25x = 75$	$\vert :25$
$y = 7$ $x = 3$	

Lösungsmenge ist: **L** = {(3|7)}.

c) Klammern auflösen und Zusammenfassen führt auf die Gleichungsaddition:

$8x + 12 – 6y + 9 = 17$ $-8x + 8y + 10x + 10y = 38$	
$8x + 21 – 6y = 17$ $2x + 18y = 38$	$\vert -21$
$8x – 6y = -4$ $2x + 18y = 38$	$\vert \cdot 3$
$24x – 18y = -12$ $2x + 18y = 38$	(Gleichungsaddition)
$26x = 26$ $2x + 18y = 38$	$\vert :26$
$x = 1$ $2x + 18y = 38$	(Einsetzen von y = 1)
$x = 1$ $2 + 18y = 38$	$\vert -2$
$x = 1$ $18y = 36$	$\vert :18$
$x = 1$ $y = 2$	

Lösungsmenge ist hier: **L** = {(1|2)}.

d) Wir rechnen mit dem Einsetzungsverfahren, indem wir die 2. Gleichung durch 2 teilen, die Gleichung $4x = 9y – 2$ erhalten und in der 1. Gleichung 4x durch 9y – 2 ersetzen:

$(9y–2) – 3y = 20 – 20(9y–2)$ (Klammern auflösen)
$9y – 2 – 3y = 20 – 180y + 40$ (Zusammenfassen)
$6y – 2 = 60 – 180y$ | +180y, + 2
$186y = 62$ | :186
$y = \frac{62}{186} = \frac{1}{3}$

Einsetzen von y in die Gleichung $4x = 9y – 2$ ergibt:

$4x = 9 \cdot \frac{1}{3} – 2 = 3 – 2 = 1$ | :4

$x = \frac{1}{4}$

Lösungsmenge ist hier: **L** = $\left\{\left(\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{3}\right)\right\}$.

e) Multiplikation der 1. Gleichung mit 30 und der 2. mit 20, also mit den Hauptnennern der jeweiligen Brüche, ergibt:

$20x – 24y = 15x – 105$ $5x + 2y = 25$	$\vert -15x$
$5x – 24y = -105$ $5x + 2y = 25$	$\vert \cdot(-1)$

$-5x + 24y = 105$ $5x + 2y = 25$	(Gleichungsaddition)
$26y = 130$ $5x + 2y = 25$	$\mid :26$
$y = 5$ $5x + 2y = 25$	(Einsetzen von y = 5)
$y = 5$ $5x + 10 = 25$	$\mid -10$
$y = 5$ $5x = 15$	$\mid :5$
$y = 5$ $x = 3$	

Lösungsmenge ist damit: **L** = {(3|5)}.

f) Multiplikation der 1. Gleichung mit 12 und der 2. mit 6 führt zu:

$3x + 4y = -1$
$3x - y = 2$

Das Subtraktionsverfahren ergibt:

$5y = -3$ $\mid :5$

$y = -\frac{3}{5}$

Einsetzen in die Gleichung $3x - y = 2$ führt auf:

$3x + \frac{3}{5} = 2$ $\mid -\frac{3}{5}$

$3x = \frac{7}{5}$ $\mid :3$

$x = \frac{7}{15}$

Lösungsmenge ist also: **L** = $\left\{\left(\frac{7}{15}\middle|-\frac{3}{5}\right)\right\}$.

g) Multiplikation der 1. Gleichung mit 30 ergibt:

$10(x-2y) + 6(2-x) = 5x$
$2x + 4y = 6$

Weiter gilt:

$10x - 20y + 12 - 6x = 5x$ $2x + 4y = 6$	(Zusammenfassen)
$4x - 20y + 12 = 5x$ $2x + 4y = 6$	$\mid -5x, -12$
$-x - 20y = -12$ $2x + 4y = 6$	$\mid \cdot 2$
$-2x - 40y = -24$ $2x + 4y = 6$	(Gleichungsaddition)
$-36y = -18$ $2x + 4y = 6$	$\mid :(-36)$
$y = 0,5$ $2x + 4y = 6$	(Einsetzen von y = 0,5)
$y = 0,5$ $2x + 2 = 6$	$\mid -2$

$y = 0,5$	
$2x = 4$	| :2
$y = 0,5$	
$x = 2$	

Lösungsmenge ist: **L** = {(2|0,5)}.

h) Multiplikation der 1. Gleichung mit 18 und der 2. mit 40, Auflösen der Klammern sowie Zusammenfassen ergibt:

$2(x+9) + 3y = 378$	
$5x + 4(y–20) = 400$	
$2x + 18 + 3y = 378$	
$5x + 4y – 80 = 400$	
$2x + 3y = 360$	| ·(-4)
$5x + 4y = 480$	| ·3
$-8x – 12y = -1440$	(Gleichungsaddition)
$15x + 12y = 1440$	
$7x = 0$	| :7
$15x + 12y = 1440$	
$x = 0$	
$15x + 12y = 1440$	(Einsetzen von x = 0)
$x = 0$	
$12y = 1440$	| :12
$x = 0$	
$y = 120$	

Lösungsmenge ist: **L** = {(0|120)}.

i) Auflösen der Klammern und Zusammenfassen der linken und rechten Seiten in den Gleichungen führen auf:

$4x – 8y + 12 – 3x – 3y + 21 = 30y – 45$	
$2x + 2y + 8x – 32 = 48x – 14y – 12$	
$x – 11y + 33 = 30y – 45$	| -30y, -33
$10x + 2y – 32 = 48x – 84y – 12$	| -48x, +84y, +32
$x – 41y = -78$	| ·38
$-38x + 86y = 20$	
$38x – 1558y = -2964$	
$-38x + 86y = 20$	(Gleichungsaddition)
$38x – 1558y = -2964$	
$-1472y = -2944$	| :(-1472)
$38x – 1558y = -2964$	(Einsetzen von y = 2)
$y = 2$	
$38x – 3116 = -2964$	| + 3116
$y = 2$	
$38x = 152$	| :38
$y = 2$	
$x = 4$	
$y = 2$	

Lösungsmenge ist damit: **L** = {(2|4)}.

j) Multiplikation der 1. Gleichung mit 16 und der 2. mit 40 ergibt:

$2x + 4(x+2y) + y = 48$
$4y – 5(y–x) + 10x = 120$

Auflösen der Klammern und Zusammenfassen führt zu:

$2x + 4x + 8y + y = 48$
$4y – 5y + 5x + 10x = 120$

$6x + 9y = 48$
$15x – y = 120$

Die 2. Gleichung wird mit 9 multipliziert, die beiden Gleichungen addiert:

$6x + 9y = 48$
$135x – 9y = 1080$

$6x + 9y = 48$
$141x = 1128$

Division der 2. Gleichung durch 141 ergibt: $x = 8$, Einsetzen von x = 8 in die 1. Gleichung:

$48 + 9y = 48$ | -48
$9y = 0$ | :9
$y = 0$

Lösungsmenge ist hier: **L** = {(8|0)}.

IV.4 Mit dem Gauß-Algorithmus ergeben sich die folgenden Umformungen zur Dreiecksgestalt sowie die Lösungen:

a) Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -5x + 5y \phantom{{}+3z} &= 5 \\ +2x \phantom{{}+5y} + 3z &= 11 \\ +7y - 2z &= 8 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

x	y	z	R.S.
-5	5	0	5
2	0	3	11
0	7	-2	8

1. Schritt: 5*(*2*) + 2*(*1*)

-5	5	0	5
0	10	15	65
0	7	-2	8

2. Schritt: 10*(*3*) - 7*(*2*)

-5	5	0	5
0	10	15	65
0	0	-125	-375

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} -5x + 5y \phantom{{}+15z} &= 5 \\ +10y + 15z &= 65 \\ -125z &= -375 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$z = 3$
$y = 2$
$x = 1$

b) <u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+1x - 2y + 1z = 0$

$+2x + 3y - 4z = 1$

$-3x + 4y + 1z = 2$

<u>Anfangstableau</u>:

x	*y*	*z*	*R.S.*
1	-2	1	0
2	3	-4	1
-3	4	1	2

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*3*) + 3*(*1*)

1	-2	1	0
0	7	-6	1
0	-2	4	2

<u>2. Schritt</u>: 7*(*3*) + 2*(*2*)

1	-2	1	0
0	7	-6	1
0	0	16	16

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+1x - 2y + 1z = 0$

$+7y - 6z = 1$

$+16z = 16$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$z = 1$
$y = 1$
$x = 1$

---

c) <u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+10x + 4y + 3z + 2u = 3$

$-6x + 8y + 7z + 4u = -7$

$+14x - 2y + 5z + 3u = 6$

$+8x + 12y - 9z + 10u = -4$

<u>Anfangstableau</u>:

x	*y*	*z*	*u*	*R.S.*
10	4	3	2	3
-6	8	7	4	-7
14	-2	5	3	6
8	12	-9	10	-4

<u>1. Schritt</u>: 5*(*2*) + 3*(*1*) / 5*(*3*) - 7*(*1*) / 5*(*4*) - 4*(*1*)

10	4	3	2	3
0	52	44	26	-26
0	-38	4	1	9
0	44	-57	42	-32

2. Schritt: 26*(*3*) + 19*(*2*) / 13*(*4*) - 11*(*2*)

10	4	3	2	|	3
0	52	44	26	|	-26
0	0	940	520	|	-260
0	0	-1225	260	|	-130

3. Schritt: 188*(*4*) + 245*(*3*)

10	4	3	2	|	3
0	52	44	26	|	-26
0	0	940	520	|	-260
0	0	0	176280	|	-88140

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrl} +10x + & 4y + & 3z + & 2u = & 3 \\ & +52y + & 44z + & 26u = & -26 \\ & & +940z + & 520u = & -260 \\ & & & +176280u = & -88140 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$u = -0.5$
$z = 0$
$y = -0.25$
$x = 0.5$

---

d) Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} +1x + 1y - 2z + 1u - 1v = -1 \\ +1x - 1y + 1z + 1u + 2v = 1 \\ -2x + 1y - 1z - 1u + 1v = 23 \\ -1x - 1y + 2z - 1u - 1v = -23 \\ +1x - 1y - 1z + 1u + 2v = 1 \end{array}$$

Anfangstableau:

x	*y*	*z*	*u*	*v*	|	*R.S.*
1	1	-2	1	-1	|	-1
1	-1	1	1	2	|	1
-2	1	-1	-1	1	|	23
-1	-1	2	-1	-1	|	-23
1	-1	-1	1	2	|	1

1. Schritt: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) + 2*(*1*) / 1*(*4*) + 1*(*1*) / 1*(*5*) - 1*(*1*)

1	1	-2	1	-1	|	-1
0	-2	3	0	3	|	2
0	3	-5	1	-1	|	21
0	0	0	0	-2	|	-24
0	-2	1	0	3	|	2

2. Schritt: 2*(*3*) + 3*(*2*) / -1*(*5*) + 1*(*2*)

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\
0 & -2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\
0 & 0 & -1 & 2 & 7 & 48 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -24 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

3. Schritt: 1*(*5*) + 2*(*3*)

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\
0 & -2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\
0 & 0 & -1 & 2 & 7 & 48 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -24 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 14 & 96
\end{array}$$

Zeilentausch: (*4*) <-> (*5*)

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\
0 & -2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\
0 & 0 & -1 & 2 & 7 & 48 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 14 & 96 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -24
\end{array}$$

4. Schritt: (keine Umformung)

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\
0 & -2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\
0 & 0 & -1 & 2 & 7 & 48 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 14 & 96 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -24
\end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrl}
+1x & +1y & -2z & +1u & -1v & = -1 \\
 & -2y & +3z & & +3v & = 2 \\
 & & -1z & +2u & +7v & = 48 \\
 & & & +4u & +14v & = 96 \\
 & & & & -2v & = -24
\end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$v = 12$
$u = -18$
$z = 0$
$y = 17$
$x = 12$

IV.6 Mit dem Gauß-Algorithmus ergeben sich die folgenden Umformungen zur Diagonalgestalt sowie die Lösungen:

a) Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l}
+1x + 1y + 1z = 14 \\
+2x + 1y + 3z = 32 \\
+3x + 2y + 1z = 22
\end{array}$$

<u>Anfangstableau</u>:

x y z | *R.S.*
1 1 1 | 14
2 1 3 | 32
3 2 1 | 22

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*3*) - 3*(*1*)

1 1 1 | 14
0 -1 1 | 4
0 -1 -2 | -20

<u>2. Schritt</u>: 1*(*1*) + 1*(*2*) / -1*(*3*) + 1*(*2*)

1 0 2 | 18
0 -1 1 | 4
0 0 3 | 24

<u>3. Schritt</u>: 3*(*1*) - 2*(*3*) / 3*(*2*) - 1*(*3*)

3 0 0 | 6
0 -3 0 | -12
0 0 3 | 24

<u>Teilen</u>: (*1*):3 / (*2*):(-3) / (*3*):3

1 0 0 | 2
0 1 0 | 4
0 0 1 | 8

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{aligned} +1x \quad\quad\quad &= 2 \\ +1y \quad\quad &= 4 \\ +1z &= 8 \end{aligned}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x = 2$
$y = 4$
$z = 8$

---

b) <u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 + 1x_3 &= 9 \\ +3x_1 + 2x_2 + 1x_3 &= -4 \\ -5x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= -9 \end{aligned}$$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1 x_2 x_3 | *R.S.*
-2 4 1 | 9
3 2 1 | -4
-5 1 2 | -9

<u>1. Schritt</u>: 2*(*2*) + 3*(*1*) / -2*(*3*) + 5*(*1*)

-2 4 1 | 9
0 16 5 | 19
0 18 1 | 63

2. Schritt: 4*(*1*) - 1*(*2*) / 8*(*3*) - 9*(*2*)

$$\begin{array}{rrr|r} -8 & 0 & -1 & 17 \\ 0 & 16 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & -37 & 333 \end{array}$$

3. Schritt: -37*(*1*) + 1*(*3*) / 37*(*2*) + 5*(*3*)

$$\begin{array}{rrr|r} 296 & 0 & 0 & -296 \\ 0 & 592 & 0 & 2368 \\ 0 & 0 & -37 & 333 \end{array}$$

Teilen: (*1*):296 / (*2*):592 / (*3*):(-37)

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}$$

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lllr} +1x_1 & & & = -1 \\ & +1x_2 & & = 4 \\ & & +1x_3 & = -9 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = -1$
$x_2 = 4$
$x_3 = -9$

---

c) Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} +1x+1y+1z+1u = 7 \\ +2x-3y-2z+4u = 7 \\ +3x-1y+1z+2u = 10 \\ +1x+2y+3z-1u = 6 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrr|r} x & y & z & u & R.S. \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 6 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*3*) - 3*(*1*) / 1*(*4*) - 1*(*1*)

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & -4 & 2 & -7 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}$$

2. Schritt: 5*(*1*) + 1*(*2*) / -5*(*3*) + 4*(*2*) / 5*(*4*) + 1*(*2*)

$$\begin{array}{rrrr|r} 5 & 0 & 1 & 7 & 28 \\ 0 & -5 & -4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & 13 & 27 \\ 0 & 0 & 6 & -8 & -12 \end{array}$$

3. Schritt: 6*(*1*) + 1*(*3*) / -3*(*2*) + 2*(*3*) / 1*(*4*) + 1*(*3*)

30	0	0	55	|	195
0	15	0	20	|	75
0	0	-6	13	|	27
0	0	0	5	|	15

4. Schritt: 1*(*1*) - 11*(*4*) / 1*(*2*) - 4*(*4*) / 5*(*3*) - 13*(*4*)

30	0	0	0	|	30
0	15	0	0	|	15
0	0	-30	0	|	-60
0	0	0	5	|	15

Teilen: (*1*):30 / (*2*):15 / (*3*):(-30) / (*4*):5

1	0	0	0	|	1
0	1	0	0	|	1
0	0	1	0	|	2
0	0	0	1	|	3

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{llllll} +1x & & & & = 1 \\ & +1y & & & = 1 \\ & & +1z & & = 2 \\ & & & +1u & = 3 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

x = 1
y = 1
z = 2
u = 3

---

d) Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -2x - 2y + 1z + 3u + 1v &= 3 \\ +1x - 2y - 2z + 1u + 3v &= 4 \\ +3x + 1y - 2z - 2u + 1v &= 2 \\ +1x + 3y + 1z - 2u - 2v &= 1 \\ -2x + 1y + 3z + 1u - 2v &= 5 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

x	*y*	*z*	*u*	*v*	|	*R.S.*
-2	-2	1	3	1	|	3
1	-2	-2	1	3	|	4
3	1	-2	-2	1	|	2
1	3	1	-2	-2	|	1
-2	1	3	1	-2	|	5

1. Schritt: 2*(*2*) + 1*(*1*) / 2*(*3*) + 3*(*1*) / 2*(*4*) + 1*(*1*) / -1*(*5*) + 1*(*1*)

-2 -2 1 3 1 | 3
0 -6 -3 5 7 | 11
0 -4 -1 5 5 | 13
0 4 3 -1 -3 | 5
0 -3 -2 2 3 | -2

2. Schritt: -3*(*1*) + 1*(*2*) / -3*(*3*) + 2*(*2*) / 3*(*4*) + 2*(*2*) / -2*(*5*) + 1*(*2*)

6 0 -6 -4 4 | 2
0 -6 -3 5 7 | 11
0 0 -3 -5 -1 | -17
0 0 3 7 5 | 37
0 0 1 1 1 | 15

3. Schritt: -1*(*1*) + 2*(*3*) / -1*(*2*) + 1*(*3*) / 1*(*4*) + 1*(*3*) / 3*(*5*) + 1*(*3*)

-6 0 0 -6 -6 | -36
0 6 0 -10 -8 | -28
0 0 -3 -5 -1 | -17
0 0 0 2 4 | 20
0 0 0 -2 2 | 28

4. Schritt: 1*(*1*) + 3*(*4*) / 1*(*2*) + 5*(*4*) / 2*(*3*) + 5*(*4*) / 1*(*5*) + 1*(*4*)

-6 0 0 0 6 | 24
0 6 0 0 12 | 72
0 0 -6 0 18 | 66
0 0 0 2 4 | 20
0 0 0 0 6 | 48

5. Schritt: 1*(*1*) - 1*(*5*) / 1*(*2*) - 2*(*5*) / 1*(*3*) - 3*(*5*) / 3*(*4*) - 2*(*5*)

-6 0 0 0 0 | -24
0 6 0 0 0 | -24
0 0 -6 0 0 | -78
0 0 0 6 0 | -36
0 0 0 0 6 | 48

Teilen: (*1*):(-6) / (*2*):6 / (*3*):(-6) / (*4*):6 / (*5*):6

1 0 0 0 0 | 4
0 1 0 0 0 | -4
0 0 1 0 0 | 13
0 0 0 1 0 | -6
0 0 0 0 1 | 8

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lllllll}
+1x & & & & & = & 4 \\
 & +1y & & & & = & -4 \\
 & & +1z & & & = & 13 \\
 & & & +1u & & = & -6 \\
 & & & & +1v & = & 8
\end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x = 4$
$y = -4$
$z = 13$
$u = -6$
$v = 8$

IV.14 Mit dem Gauß-Algorithmus ergeben sich die folgenden Umformungen zur Diagonalgestalt sowie die Lösungen bzw. Lösungsmengen:

a) Lineares Gleichungssystem:

$+ 2x_1 - 3x_2 = 4$

$+ 1x_1 + 4x_2 = 0$

$+ 5x_1 - 1x_2 = -2$

Anfangstableau:

x_1	x_2	R.S.
2	-3	4
1	4	0
5	-1	-2

1. Schritt: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 2*(*3*) - 5*(*1*)

2	-3	4
0	11	-4
0	13	-24

2. Schritt: 11*(*1*) + 3*(*2*) / 11*(*3*) - 13*(*2*)

22	0	32
0	11	-4
0	0	-212

Teilen: (*1*):22 / (*2*):11

1	0	1.4545
0	1	-0.3636
0	0	-212

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +1x_1 \qquad &= 1.4545 \\ +1x_2 &= -0.3636 \\ 0 &= -212 \end{aligned}$$

▶ keine Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = { }

---

b) Lineares Gleichungssystem:

$+ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 22$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
2	-6	4	22

Teilen: (*1*):2

1 -3 2 **|** 11

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 1x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_2 = s$
$x_3 = t$
$x_1 = 11 + 3s - 2t$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter sind die reellen Zahlen s, t ▶ Lösungsmenge: **L** = {(11+3s-2t**|**s**|**t)**|** s,tϵ**R**}

---

c) Lineares homogenes Gleichungssystem:

$+ 2x_1 + 1x_2 + 5x_3 = 0$

$+ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0$

$+ 5x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
2	1	5	0
3	4	-7	0
5	5	-2	0

1. Schritt: 2*(*2*) - 3*(*1*) / 2*(*3*) - 5*(*1*)

2	1	5	0
0	5	-29	0
0	5	-29	0

2. Schritt: 5*(*1*) - 1*(*2*) / 1*(*3*) - 1*(*2*)

10	0	54	0
0	5	-29	0
0	0	0	0

Teilen: (*1*):10 / (*2*):5

1	0	5.4	0
0	1	-5.8	0
0	0	0	0

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +1x_1 \qquad + 5.4x_3 &= 0 \\ +1x_2 - 5.8x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_1 = 0 - 5.4t$
$x_2 = 0 + 5.8t$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl t ▶ Lösungsmenge: **L** = {(-5,4t**|**5,8t**|**t)**|** tϵ**R**}

---

d) <u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$

$+3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8$

$-8x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -7$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	x_3	R.S.
-2	3	4	9
3	-2	3	-8
-8	7	-2	-7

<u>1. Schritt</u>: 2*(*2*) + 3*(*1*) / -1*(*3*) + 4*(*1*)

-2	3	4	9
0	5	18	11
0	5	18	43

<u>2. Schritt</u>: 5*(*1*) - 3*(*2*) / 1*(*3*) - 1*(*2*)

-10	0	-34	12
0	5	18	11
0	0	0	32

<u>Teilen</u>: (*1*):(-10) / (*2*):5

1	0	3.4	-1.2
0	1	3.6	2.2
0	0	0	32

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+1x_1 \quad + 3.4x_3 = -1.2$

$+1x_2 + 3.6x_3 = 2.2$

$0 = 32$

▶ keine Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ <u>Lösungsmenge</u>: **L** = { }

---

e) <u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+1x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 3$

$-1x_1 + 1x_2 - 1x_3 = -3$

$+1x_1 - 1x_2 - 1x_3 = 3$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	x_3	R.S.
1	-1	1	3
-1	1	-1	-3
1	-1	-1	3

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) + 1*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*)

1	-1	1	3
0	0	0	0
0	0	-2	0

2. Schritt: 2*(*1*) + 1*(*3*)

2 -2 0 | 6
0 0 0 | 0
0 0 -2 | 0

Teilen: (*1*):2 / (*3*):(-2)

1 -1 0 | 3
0 0 0 | 0
0 0 1 | 0

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
+1x_1 - 1x_2 \quad &= 3 \\
0 &= 0 \\
+1x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_2 = t$
$x_1 = 3 + t$
$x_3 = 0$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl t ▶ Lösungsmenge: **L** = {(3+t|t|0)| t∈**R**}

---

f) Lineares Gleichungssystem:

$+ 1x_1 - 2x_2 - 1x_3 + 2x_4 = -3$
$+ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2$
$- 3x_1 + 1x_2 + 3x_3 - 1x_4 = -1$
$+ 2x_1 - 1x_2 - 2x_3 + 1x_4 = 0$

Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 x_4 | *R.S.*
 1 -2 -1 2 | -3
 2 -2 -2 2 | -2
-3 1 3 -1 | -1
 2 -1 -2 1 | 0

1. Schritt: 1*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*3*) + 3*(*1*) / 1*(*4*) - 2*(*1*)

1 -2 -1 2 | -3
0 2 0 -2 | 4
0 -5 0 5 | -10
0 3 0 -3 | 6

2. Schritt: 1*(*1*) + 1*(*2*) / 2*(*3*) + 5*(*2*) / 2*(*4*) - 3*(*2*)

1 0 -1 0 | 1
0 2 0 -2 | 4
0 0 0 0 | 0
0 0 0 0 | 0

Teilen: (*2*):2

1 0 -1 0 | 1
0 1 0 -1 | 2
0 0 0 0 | 0
0 0 0 0 | 0

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +1x_1 \quad -1x_3 \quad &= 1 \\ +1x_2 \quad -1x_4 &= 2 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_4 = u$
$x_1 = 1 + t$
$x_2 = 2 + u$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter sind die reellen Zahlen t, u ▶ Lösungsmenge: **L** = {(1+t|2+u|t|u)| t,u∊**R**}

IV.15 Lösungen und Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme sind:

a) Anfangstableau:

x_1 x_2 | *R.S.*
2 3 | 5
8 -3 | 5

1. Schritt: 1*(*2*) - 4*(*1*)

2 3 | 5
0 -15 | -15

2. Schritt: 5*(*1*) + 1*(*2*)

10 0 | 10
0 -15 | -15

Teilen: (*1*):10 / (*2*):(-15)

1 0 | 1
0 1 | 1

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 1$
$x_2 = 1$

▶ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = {(1|1)}

---

b) Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 | *R.S.*
4 -3 2 | -8
-1 2 -4 | 9

1. Schritt: 4*(*2*) + 1*(*1*)

4 -3 2 | -8
0 5 -14 | 28

2. Schritt: 5*(*1*) + 3*(*2*)

20 0 -32 | 44
0 5 -14 | 28

Teilen: (*1*):20 / (*2*):5

1 0 -1.6 | 2.2
0 1 -2.8 | 5.6

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_1 = 2.2 + 1.6t$
$x_2 = 5.6 + 2.8t$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl t ▶ Lösungsmenge: **L** = {2,2+1,6t|5,6+2,8t|t)| t∊**R**}

---

c) Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
-1	2	6	28
10	-1	43	70
15	1	-20	53

1. Schritt: 1*(*2*) + 10*(*1*) / 1*(*3*) + 15*(*1*)

-1	2	6	28
0	19	103	350
0	31	70	473

2. Schritt: 19*(*1*) - 2*(*2*) / 19*(*3*) - 31*(*2*)

-19	0	-92	-168
0	19	103	350
0	0	-1863	-1863

3. Schritt: -81*(*1*) + 4*(*3*) / 1863*(*2*) + 103*(*3*)

1539	0	0	6156
0	35397	0	460161
0	0	-1863	-1863

Teilen: (*1*):1539 / (*2*):35397 / (*3*):(-1863)

1	0	0	4
0	1	0	13
0	0	1	1

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 4$
$x_2 = 13$
$x_3 = 1$

▶ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = {(4|13|1)}

---

d) Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	R.S.
9	-2	3	17	27
13	7	1	-8	13
-1	4	16	7	26
2	13	-5	12	22

1. Schritt: 9*(*2*) - 13*(*1*) / 9*(*3*) + 1*(*1*) / 9*(*4*) - 2*(*1*)

9	-2	3	17	27
0	89	-30	-293	-234
0	34	147	80	261
0	121	-51	74	144

2. Schritt: 89*(*1*) + 2*(*2*) / 89*(*3*) - 34*(*2*) / 89*(*4*) - 121*(*2*)

801	0	207	927	1935
0	89	-30	-293	-234
0	0	14103	17082	31185
0	0	-909	42039	41130

3. Schritt: 1567*(*1*) - 23*(*3*) / 4701*(*2*) + 10*(*3*) / 1567*(*4*) + 101*(*3*)

1255167	0	0	1059723	2314890
0	418389	0	-1206573	-788184
0	0	14103	17082	31185
0	0	0	67600395	67600395

4. Schritt: 84395*(*1*) - 1323*(*4*) / 253185*(*2*) + 4519*(*4*) / 7511155*(*3*) - 1898*(*4*)

105929818965	0	0	0	105929818965
0	105929818965	0	0	105929818965
0	0	105929818965	0	105929818965
0	0	0	67600395	67600395

Teilen: (*1*):105929818965 / (*2*):105929818965 / (*3*):105929818965 / (*4*):67600395

1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 1$
$x_2 = 1$
$x_3 = 1$
$x_4 = 1$

▶ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = {(1|1|1|1)}

V.4 Lösungen: Die Werte der Determinanten betragen:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 13 & -12 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - 13 \cdot (-12) = 192$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3-(-2)\cdot 2 = 9+4 = 13$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot(-3)+3\cdot(-2)\cdot 4+(-1)\cdot 3\cdot 7-(-1)\cdot 5\cdot 4-3\cdot 3\cdot(-3)-2\cdot(-2)\cdot 7 =$

$-30-24-21+20+27+28=0$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 5+(-2)\cdot 1\cdot(-3)+3\cdot(-2)\cdot(-1)-3\cdot 3\cdot(-3)-(-2)\cdot(-2)\cdot 5-1\cdot 1\cdot(-1) =$

$15+6+6+27-20+1=35$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot 4\cdot 5 = -120$ (als Determinante einer Diagonalmatrix)

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$-1(-2+4+27-3+12-6)+2(6+6-6-27+8-1) = -32-16 = -48$ (mit Determinantenentwicklung nach der 3. Spalte)

V.6 Die <u>Lösungen</u> der linearen Gleichungssysteme sind mit Hilfe von Determinanten:

a) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & -12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 9 & -12 \end{vmatrix}} = \dfrac{4\cdot(-12)-7\cdot(-3)}{(-3)\cdot(-12)-7\cdot 9} = \dfrac{27}{-27} = -1$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 9 & -12 \end{vmatrix}} = \dfrac{(-3)\cdot(-3)-4\cdot 9}{(-3)\cdot(-12)-7\cdot 9} = \dfrac{-27}{-27} = 1$

b) Wir formen das lineare Gleichungssystem zunächst um:

5(p+q) – 12 = 3	(Auflösen der Klammern)
-4(p–2) + 3 = 2(q–p) + q	(Auflösen der Klammern)
5p + 5q – 12 = 3	
-4p + 8 + 3 = 2q – 2p + q	(Zusammenfassen)
5p + 5q – 12 = 3	| +12
-4p + 11 = 3q – 2p	| +4p
5p + 5q = 15	
2p + 3q = 11	

Als Lösungen ergeben sich:

$p = \dfrac{\begin{vmatrix} 15 & 5 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{15\cdot 3-5\cdot 11}{5\cdot 3-5\cdot 2} = \dfrac{-10}{5} = -2$, $q = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{5\cdot 11-15\cdot 2}{5\cdot 3-5\cdot 2} = \dfrac{25}{5} = 5$

c) $p = \frac{\begin{vmatrix} 23 & 2 & 3 \\ -14 & 4 & 1 \\ -31 & 8 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{23\cdot 4\cdot(-4)+2\cdot 1\cdot(-31)+3\cdot(-14)\cdot 8-3\cdot 4\cdot(-31)-2\cdot(-14)\cdot(-4)-23\cdot 1\cdot 8}{1\cdot 4\cdot(-4)+2\cdot 1\cdot 5+3\cdot(-2)\cdot 8-3\cdot 4\cdot 5-2\cdot(-2)\cdot(-4)-1\cdot 1\cdot 8} = \frac{-690}{-138} = 5$

$q = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 23 & 3 \\ -2 & -14 & 1 \\ 5 & -31 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{414}{-138} = -3$, $r = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 23 \\ -2 & 4 & -14 \\ 5 & 8 & -31 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-1104}{-138} = 8$

d) Wir lösen die Klammern auf und fassen zusammen:

4x + 4y – 7z = -7
13x – 2y – 4z = -19
-3x +25y – 45 z = -17

Es ergibt sich nun:

x = $\frac{\begin{vmatrix} -7 & 4 & -7 \\ -19 & -2 & -4 \\ -17 & 25 & -45 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -7 \\ 13 & -2 & -4 \\ -3 & 25 & -45 \end{vmatrix}} = \frac{(-7)\cdot(-2)\cdot(-45)+4\cdot(-4)\cdot(-17)-7\cdot(-19)\cdot 25+7\cdot(-2)\cdot(-17)-4\cdot(-19)\cdot(-45)+7\cdot(-4)\cdot 25}{4\cdot(-2)\cdot(-45)+4\cdot(-4)\cdot(-3)-7\cdot 13\cdot 25-7\cdot(-2)\cdot(-3)-4\cdot 13\cdot(-45)-4\cdot(-4)\cdot 25}$

$= \frac{-915}{915} = -1$

y = $\frac{\begin{vmatrix} 4 & -7 & -7 \\ 13 & -19 & -4 \\ -3 & -17 & -45 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -7 \\ 13 & -2 & -4 \\ -3 & 25 & -45 \end{vmatrix}} = \frac{4\cdot(-19)\cdot(-45)-7\cdot(-4)\cdot(-3)-7\cdot 13\cdot(-17)+7\cdot(-19)\cdot(-3)+7\cdot 13\cdot(-45)-4\cdot(-4)\cdot(-17)}{4\cdot(-2)\cdot(-45)+4\cdot(-4)\cdot(-3)-7\cdot 13\cdot 25-7\cdot(-2)\cdot(-3)-4\cdot 13\cdot(-45)-4\cdot(-4)\cdot 25}$

$= \frac{915}{915} = 1$

z = $\frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -7 \\ 13 & -2 & -19 \\ -3 & 25 & -17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -7 \\ 13 & -2 & -4 \\ -3 & 25 & -45 \end{vmatrix}} = \frac{4\cdot(-2)\cdot(-17)+4\cdot(-19)\cdot(-3)-7\cdot 13\cdot 25+7\cdot(-2)\cdot(-3)-4\cdot 13\cdot(-17)-4\cdot(-19)\cdot 25}{4\cdot(-2)\cdot(-45)+4\cdot(-4)\cdot(-3)-7\cdot 13\cdot 25-7\cdot(-2)\cdot(-3)-4\cdot 13\cdot(-45)-4\cdot(-4)\cdot 25}$

$= \frac{915}{915} = 1$

VI.4 Lösungen: a) Ansatz: $y = ax + b$. Lineares Gleichungssystem:

$f(1) = -a + b = -8.5$
$f(3.5) = +3.5a + b = 32$

Anfangstableau:

a	b	R.S.
-1	1	-8.5
3.5	1	32

1. Schritt: 1*(*2*) + 3.5*(*1*)

-1	1	-8.5
0	4.5	2.25

2. Schritt: 4.5*(*1*) - 1*(*2*)

-4.5	0	-40.5
0	4.5	2.25

Teilen: (*1*):(-4.5) / (*2*):4.5

1	0	9
0	1	0.5

Lösung: $a = 9$, $b = 0,5$; $y = 9x + 0,5$ (Gerade).

---

b) Ansatz: $y = ax + b$. Lineares Gleichungssystem:

$f(-6) = -6a + b = 38$
$f(5) = +5a + b = -6$

Anfangstableau:

a	b	R.S.
-6	1	38
5	1	-6

1. Schritt: 6*(*2*) + 5*(*1*)

-6	1	38
0	11	154

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} -6a + b &= 38 \\ +11b &= 154 \end{aligned}$$

Lösung: b = 14, a = -4; $y = -4x + 14$ (Gerade).

---

c) Ansatz: $y = ax^2 + bx + c$. Lineares Gleichungssystem:

$f(1) = +1a + 1b + 1c = 52$
$f(5) = +25a + 5b + 1c = 76$
$f(0) = +1c = 51$

Anfangstableau:

a	b	c	R.S.
1	1	1	52
25	5	1	76
0	0	1	51

1. Schritt: 1*(*2*) - 25*(*1*)

1   1   1 | 52
0 -20 -24 | -1224
0   0   1 | 51

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +1a + 1b + 1c &= 52 \\ -20b - 24c &= -1224 \\ +1c &= 51 \end{aligned}$$

Lösungen: c = 51, b = 0, a = 1; $y = x^2 + 51$ (Normalparabel).

---

d) Ansatz: $y = ax^2 + bx + c$. Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} f(-2) &= +4a - 2b + 1c = -18 \\ f(0) &= +1c = 0 \\ f(7) &= +49a + 7b + 1c = 0 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

a b c | *R.S.*
4 -2 1 | -18
0 0 1 | 0
49 7 1 | 0

1. Schritt: 4*(*3*) - 49*(*1*)

4 -2 1 | -18
0 0 1 | 0
0 126 -45 | 882

Zeilentausch: (*2*) <-> (*3*)

4 -2 1 | -18
0 126 -45 | 882
0 0 1 | 0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +4a - 2b + 1c &= -18 \\ +126b - 45c &= 882 \\ +1c &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen: $c = 0, b = 7, a = -1; y = -x^2 + 7x$ (nach unten geöffnete Normalparabel).

---

e) Ansatz: $y = ax^2 + bx + c$. Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} f(-2) &= +4a - 2b + 1c = -2 \\ f(1) &= 1a + 1b + 1c = 1 \\ f(2) &= +4a + 2b + 1c = 10 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

a b c | *R.S.*
4 -2 1 | -2
1 1 1 | 1
4 2 1 | 10

<u>1. Schritt</u>: 4*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*)

4 -2 1 | -2
0 6 3 | 6
0 4 0 | 12

<u>2. Schritt</u>: 3*(*3*) - 2*(*2*)

4 -2 1 | -2
0 6 3 | 6
0 0 -6 | 24

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{aligned} +4a - 2b + 1c &= -2 \\ +6b + 3c &= 6 \\ -6c &= 24 \end{aligned}$$

<u>Lösungen</u>: $c = -4$, $b = 3$, $a = 2$; $y = 2x^2 + 3x - 4$.

---

f) <u>Ansatz</u>: $y = ax^2 + bx + c$. <u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1a + 1b + 1c = -10 \\ f(2) &= +4a + 2b + 1c = -12 \\ f(-3) &= +9a - 3b + 1c = -22 \end{aligned}$$

<u>Anfangstableau</u>:

a b c | *R.S.*
1 1 1 | -10
4 2 1 | -12
9 -3 1 | -22

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 4*(*1*) / 1*(*3*) - 9*(*1*)

1 1 1 | -10
0 -2 -3 | 28
0 -12 -8 | 68

<u>2. Schritt</u>: -1*(*3*) + 6*(*2*)

1 1 1 | -10
0 -2 -3 | 28
0 0 -10 | 100

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{aligned} +1x + 1y + 1z &= -10 \\ -2y - 3z &= 28 \\ -10z &= 100 \end{aligned}$$

<u>Lösungen</u>: $c = -10$, $b = 1$, $a = -1$; $y = -x^2 + x - 10$ (nach unten geöffnete Normalparabel).

---

g) <u>Ansatz</u>: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. <u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1a + 1b - 1c + 1d = 2 \\ f(2) &= +8a + 4b + 2c + 1d = 11 \\ f(3) &= +27a + 9b + 3c + 1d = 34 \\ f(0) &= +1d = 1 \end{aligned}$$

<u>Anfangstableau</u>:

a	b	c	d	R.S.
-1	1	-1	1	2
8	4	2	1	11
27	9	3	1	34
0	0	0	1	1

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) + 8*(*1*) / 1*(*3*) + 27*(*1*)

-1	1	-1	1	2
0	12	-6	9	27
0	36	-24	28	88
0	0	0	1	1

<u>2. Schritt</u>: 1*(*3*) - 3*(*2*)

-1	1	-1	1	2
0	12	-6	9	27
0	0	-6	1	7
0	0	0	1	1

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{array}{rrrrl} -1a & +1b & -1c & +1d & = 2 \\ & +12b & -6c & +9d & = 27 \\ & & -6c & +1d & = 7 \\ & & & +1d & = 1 \end{array}$$

<u>Lösungen</u>: $d = 1, c = -1, b = 1, a = 1$; $y = x^3 + x^2 - x + 1$ (kubisches Polynom).

---

h) <u>Ansatz</u>: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. <u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{array}{lrrrrl} f(-1) = & -1a & +1b & -1c & +1d & = 9 \\ f(-2) = & -8a & +4b & -2c & +1d & = -73 \\ f(4) = & +64a & +16b & +4c & +1d & = 599 \\ f(0) = & & & & +1d & = 23 \end{array}$$

<u>Anfangstableau</u>:

a	b	c	d	R.S.
-1	1	-1	1	9
-8	4	-2	1	-73
64	16	4	1	599
0	0	0	1	23

<u>1. Schritt</u>: -1*(*2*) + 8*(*1*) / 1*(*3*) + 64*(*1*)

-1	1	-1	1	9
0	4	-6	7	145
0	80	-60	65	1175
0	0	0	1	23

2. Schritt: 1*(*3*) - 20*(*2*)

$$\begin{array}{rrrr|r}
-1 & 1 & -1 & 1 & 9 \\
0 & 4 & -6 & 7 & 145 \\
0 & 0 & 60 & -75 & -1725 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 23
\end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
-1a & + & 1b & - & 1c & + & 1d & = & 9 \\
 & + & 4b & - & 6c & + & 7d & = & 145 \\
 & & & + & 60c & - & 75d & = & -1725 \\
 & & & & & + & 1d & = & 23
\end{array}$$

Lösungen: d = 23, c = 0, b = -4, a = 10; $y = 10x^3 – 4x^2 + 23$ (kubisches Polynom).

---

i) Ansatz: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcrcrcrcrcrcr}
f(1) & = & +1a & + & 1b & + & 1c & + & 1d & + & 1e & = & 6 \\
f(2) & = & +16a & + & 8b & + & 4c & + & 2d & + & 1e & = & 14 \\
f(-2) & = & +16a & - & 8b & + & 4c & - & 2d & + & 1e & = & 42 \\
f(4) & = & +256a & + & 64b & + & 16c & + & 4d & + & 1e & = & 240 \\
f(0) & = & & & & & & & & + & 1e & = & 12
\end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
a & b & c & d & e & R.S. \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\
16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 14 \\
16 & -8 & 4 & -2 & 1 & 42 \\
256 & 64 & 16 & 4 & 1 & 240 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12
\end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 16*(*1*) / 1*(*3*) - 16*(*1*) / 1*(*4*) - 256*(*1*)

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\
0 & -8 & -12 & -14 & -15 & -82 \\
0 & -24 & -12 & -18 & -15 & -54 \\
0 & -192 & -240 & -252 & -255 & -1296 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12
\end{array}$$

2. Schritt: -1*(*3*) + 3*(*2*) / -1*(*4*) + 24*(*2*)

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\
0 & -8 & -12 & -14 & -15 & -82 \\
0 & 0 & -24 & -24 & -30 & -192 \\
0 & 0 & -48 & -84 & -105 & -672 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12
\end{array}$$

3. Schritt: -1*(*4*) + 2*(*3*)

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\
0 & -8 & -12 & -14 & -15 & -82 \\
0 & 0 & -24 & -24 & -30 & -192 \\
0 & 0 & 0 & 36 & 45 & 288 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12
\end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
+1a & +1b & +1c & +1d & +1e & = 6 \\
 & -8b & -12c & -14d & -15e & = -82 \\
 & & -24c & -24d & -30e & = -192 \\
 & & & +36d & +45e & = 288 \\
 & & & & +1e & = 12
\end{array}
$$

Lösungen: $e = 12, d = -7, c = 0, b = 0, a = 1$; $y = x^4 - 7x + 12$.

VI.6 Die Lösungen der Bestimmungsaufgaben lauten:

a) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$.

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lrrrrl}
f(2) = & +8a & +4b & +2c & +1d & = 0 \\
f'(2) = & +12a & +4b & +1c & & = 0 \\
3 \cdot f'(\frac{2}{3}) = & +4a & +4b & +3c & & = -16 \\
f''(\frac{2}{3}) = & +4a & +2b & & & = 0
\end{array}
$$

Anfangstableau:

a	b	c	d	R.S.
8	4	2	1	0
12	4	1	0	0
4	4	3	0	-16
4	2	0	0	0

1. Schritt: 2*(*2*) - 3*(*1*) / 2*(*3*) - 1*(*1*) / 2*(*4*) - 1*(*1*)

8	4	2	1	0
0	-4	-4	-3	0
0	4	4	-1	-32
0	0	-2	-1	0

2. Schritt: 1*(*3*) + 1*(*2*)

8	4	2	1	0
0	-4	-4	-3	0
0	0	0	-4	-32
0	0	-2	-1	0

Zeilentausch: (*3*) <-> (*4*)

8	4	2	1	0
0	-4	-4	-3	0
0	0	-2	-1	0
0	0	0	-4	-32

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{array}{rrrrl}
+8a & +4b & +2cz & +1d & = 0 \\
 & -4b & -4c & -3d & = 0 \\
 & & -2c & -1d & = 0 \\
 & & & -4d & = -32
\end{array}
$$

Lösungen: $d = 8, c = -4, b = -2, a = 1$; $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$.

---

b) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= +1a + 1b + 1c + 1d = 0\\
f(2) &= +8a + 4b + 2c + 1d = 1\\
f'(2) &= +12a + 4b + 1c = 0\\
f(10) &= +1000a + 100b + 10c + 1d = 513
\end{aligned}
$$

Anfangstableau:

a	b	c	d	R.S.
1	1	1	1	0
8	4	2	1	1
12	4	1	0	0
1000	100	10	1	513

1. Schritt: 1*(*2*) - 8*(*1*) / 1*(*3*) - 12*(*1*) / 1*(*4*) - 1000*(*1*)

1	1	1	1	0
0	-4	-6	-7	1
0	-8	-11	-12	0
0	-900	-990	-999	513

2. Schritt: -1*(*3*) + 2*(*2*) / -1*(*4*) + 225*(*2*)

1	1	1	1	0
0	-4	-6	-7	1
0	0	-1	-2	2
0	0	-360	-576	-288

3. Schritt: -1*(*4*) + 360*(*3*)

1	1	1	1	0
0	-4	-6	-7	1
0	0	-1	-2	2
0	0	0	-144	1008

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
+1a + 1b + 1c + 1d &= 0\\
-4b - 6c - 7d &= 1\\
-1c - 2d &= 2\\
-144d &= 1008
\end{aligned}
$$

Lösungen: $d = -7, c = 12, b = -6, a = 1$; $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$.

VI.12 Lösungen: a) Die Vektoren sind linear abhängig wegen:

α	β	rechte Seite	
3	-9	0	
5	-15	0	3·(*2*) – 5·(*1*)
-7	21	0	3·(*3*) + 7·(*1*)
3	-9	0	
0	15	0	
0	0	0	▶ Lineare Abhängigkeit

b) Die Vektoren sind linear unabhängig wegen:

α	β	γ	rechte Seite	
2	-1	1	0	
1	2	1	0	2·(*2*) – (*1*)
-1	-1	-2	0	2·(*3*) + (*1*)
1	1	0	0	
0	5	1	0	
0	-3	-3	0	5·(*3*) + 3·(*2*)
1	1	0	0	
0	5	1	0	
0	0	-12	0	▶ Lineare Unabhängigkeit

c) Die Vektoren sind linear abhängig wegen:

α	β	γ	rechte Seite	
4	-3	-1	0	
-10	2	8	0	2·(*2*) + 5·(*1*)
3	-6	3	0	4·(*3*) – 3·(*1*)
4	-3	-1	0	
0	-11	11	0	
0	-15	15	0	11·(*3*) – 15·(*2*)
4	-3	-1	0	
0	-11	11	0	
0	0	0	0	▶ Lineare Abhängigkeit

d) Die Vektoren sind linear unabhängig wegen:

α	β	rechte Seite	
1	1	0	
1	4	0	(*2*) – (*1*)
-1	-1	0	(*3*) + (*1*)
1	1	0	
0	3	0	▶ Lineare Unabhängigkeit
(0	0	0)	

VI.17 <u>Lösungen</u>: a) Wir überprüfen den Punkt A(5|2|6) und erhalten:

$$\begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow t = -3,\ 2t = 1,\ 2t = 7\ \lightning \Rightarrow A \notin g$$

$$\begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 5\\-1 & -4 & 2\\4 & 2 & 6\end{array}\right)\begin{array}{l}\\2II+I\\III-2I\end{array} \left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 5\\0 & -9 & 9\\0 & 4 & -4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\9III+4II\end{array} \left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 5\\0 & -9 & 9\\0 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow$$

-9s = 9, 2r – s = 5 => s = -1, 2r + 1 = 5 => s = -1, r = 2 => A∈E

Analog gilt für den Punkt B(3|-1|3):

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow B \in g$$

sowie:

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\-3\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}2&-1&3\\-1&-4&-1\\4&2&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\2II+I\\III-2I\end{array} \left(\begin{array}{cc|c}2&-1&3\\0&-9&1\\0&4&-3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\9III+4II\end{array} \left(\begin{array}{cc|c}2&-1&3\\0&-9&1\\0&0&-23\end{array}\right) \Rightarrow$$

0 = -23 ↯ => B∉E

b) Wir untersuchen die <u>Lage</u> der zwei Geraden zueinander: α) Untersuchung auf Schnittpunkt (g∩h): Gleichsetzen der Geradengleichungen ergibt:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow s\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$ *-t=-1, -s-t=0, 2s=1* ⇔ *t=1, s=0,5, -1,5=0* ↯

Die Geraden schneiden sich wegen des Widerspruchs nicht. β) Untersuchung auf Parallelität (g || h): Für die Richtungsvektoren in den Geradengleichungen muss im Fall der Parallelität für ein gewisses reelles k gelten:

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$ *k=0, k=-1, 0=2* ↯

Auf Grund des Widerspruchs sind die Geraden also nicht parallel, sondern windschief.

c) Die <u>Ebene</u> E lässt sich <u>in Normalendarstellung</u> wie folgt errechnen: Mit $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ als Normalenvektor muss gelten: $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0$, $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=0$, also: $n_1 + n_3 = 0$, $n_1 - n_2 + 2n_3 = 0$. Im unterbestimmten linearen Gleichungssystem wählen wir $n_3 = 1$, so dass folgt: $n_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow n_1 = -1$ und weiter: $-1 - n_2 + 2 = 0 \Leftrightarrow n_2 = 1$. Der gesuchte Normalenvektor ist also: $\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, die Ebenengleichung in Parameterform lautet:

E: $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, also: E: $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=-1$ und damit: E: $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-1$, also:

E: $-x_1 + x_2 + x_3 = -1$.

Hinsichtlich des <u>Schnittpunkt</u>es zwischen Geraden und Ebene (g∩E) ergeben sich zwei verschiedene Vorgehensweisen: α) Gleichsetzen von Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform: Es gilt:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

-r + s + t = 1, -t = 0, r + s + 2t = 1 ⇔ *t = 0, -r + s = 1, r + s = 1* ⇔ *t = 0, 2s = 2, r + s = 1* ⇔ *t = 0, s = 1, r = 0*

Wir benutzen nur den r-Wert, um diesen in die Geradengleichung einzusetzen, und erhalten für den Schnittpunkt S: $\vec{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also: S(2|1|0). β) Einsetzen der Geradengleichung in die Normalenform der Ebene: Für $\vec{x}$ setzen wir in E: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = -1$ die Geradengleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein und erhalten:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = -1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \Leftrightarrow -1 + r \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow r = 0$$

Es ergibt sich mit r=0 und dem Einsetzen von r in die Geradengleichung derselbe Schnittpunkt S(2|1|0).

d) Aus der Ebenengleichung E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ erhalten wir:

$$x_1 = 1 - 2r,\ x_2 = -r - s,\ x_3 = -2 + 2s,$$

so dass das Einsetzen in F: $22x_1 - 16x_2 - x_3 = -4$ ergibt:

$$22(1-2r) - 16(-r-s) - (-2+2s) = -4 \Leftrightarrow 22 - 44r + 16r + 16s + 2 - 2s = -4 \Leftrightarrow$$
$$-28r + 14s + 24 = -4 \Leftrightarrow -28r + 14s = -28 \Leftrightarrow 14s = -28 + 28r \Leftrightarrow s = -2 + 2r$$

Einsetzen von s = -2 + 2r in die Ebenengleichung E führt zur Schnittgeraden:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2+2r) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2r \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Ebenen E und F schneiden sich also in der Schnittgeraden g (E ∩ F = g).

VII.4 Lösungen: a) Das lineare Gleichungssystem mit Parameter r liegt schon in Dreiecksgestalt vor, so dass auf Gleichungsadditionen gemäß dem Gauß-Algorithmus verzichtet werden kann. Wir haben damit das Endtableau:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & r & 4 & 6 \\ 0 & 0 & r+6 & 0 \end{array}\right)$$

Wir untersuchen die von r abhängigen Diagonalelemente:

Fall 1: *r + 6 = 0* ⇔ r = -6: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -6 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & & 0 \end{array}\right),$$

woraus sich wegen der 3. Zeile des Endtableaus als Nullzeile eine mehrdeutige Lösbarkeit ergibt.

<u>Fall 2</u>: <u>r = 0</u>: Das Endtableau formen wir hier noch weiter um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) 4III-6II \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -36 \end{array}\right)$$

Wegen *0 = -36* in der letzten Zeile des Tableaus erhalten wir hier keine Lösung.

<u>Fall 3</u> ist der Fall mir <u>r ≠ -6</u> und <u>r ≠ 0</u>. Hier erhalten wir für jedes solche r eine eindeutige Lösung, da wir nun durch alle Diagonalelemente teilen können.

---

b) Das <u>lineare Gleichungssystem</u> mit Parameter t liegt schon in Dreiecksgestalt vor. Wir haben als <u>Endtableau</u>:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2t & -2 & -t & 6 \\ 0 & t-1 & t & t \\ 0 & 0 & t-2 & t^2-4 \end{array}\right)$$

<u>Fall 1</u>: *t – 2 = 0* ⇔ <u>t = 2</u>: Mit dem Endtableau

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ergibt sich eine mehrdeutige Lösbarkeit.

<u>Fall 2</u>: *t – 1 = 0* ⇔ <u>t = 1</u>: Aus dem Endtableau und dessen Umformungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) III+II \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

folgt die Unlösbarkeit in diesem Fall.

<u>Fall 3</u>: <u>t = 0</u>: Das hier umgeformte Endtableau

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) 2II-I \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

führt auf die Unlösbarkeit in diesem Fall.

<u>Fall 4</u>: Für <u>t ≠ 0, t ≠ 1, t ≠ 2</u> ergibt sich eindeutige Lösbarkeit.

---

c) Wir formen das <u>lineare homogene Gleichungssystem</u> mit Parameter t zunächst nach dem Gauß-Algorithmus um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & t & 2 & 0 \\ 6 & t & 1 & 0 \\ t & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ II-2I \\ 3III-tI \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & t & 2 & 0 \\ 0 & -t & -3 & 0 \\ 0 & -3-t^2 & -2t & 0 \end{array}\right) tIII+(3+t^2)I \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & t & 2 & 0 \\ 0 & -t & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5t^2-9 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Fall 1</u>: $-5t^2 – 9 = 0$ tritt nicht auf wegen der Unlösbarkeit der Gleichung.

<u>Fall 2</u>: *-t = 0* ⇔ <u>t = 0</u> führt auf das Tableau:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right) III-3II \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und damit zur mehrdeutigen Lösbarkeit.

Fall 3: t ≠ 0 ergibt eindeutige Lösbarkeit, übrigens mit Lösung: **L** = {(0|0|0)}.

---

d) Umformungen des linearen Gleichungssystems mit Parameter a mit dem Gauß-Algorithmus führen auf:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4a & 2 & a & 5a \\ 8 & 3 & 2a & 8 \\ 6a & -3 & -2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ aII-2I \\ 2III-3I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4a & 2 & a & 5a \\ 0 & 3a-4 & 2a^2-2a & -2a \\ 0 & -12 & -3a-4 & -15a+12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (3a-4)III+12II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4a & 2 & a & 5a \\ 0 & 3a-4 & 2a^2-2a & -2a \\ 0 & 0 & 15a^2-24a+16 & -45a^2+72a-48 \end{array}\right)$$

Bei der ersten Umformung ist auf Grund der Gleichungsaddition a·II – 2·I die Bedingung a ≠ 0 zu beachten, da wir eine Gleichung (hier die 2. Gleichung) nicht mit 0 multiplizieren dürfen. Somit ist zunächst zu betrachten:

Fall 1: a = 0: Das Anfangstableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & -2 & 6 \end{array}\right) I \leftrightarrow II \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 6 \end{array}\right) 2III+3II \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 12 \end{array}\right),$$

so dass hier eindeutige Lösbarkeit vorliegt.

Wir betrachten die Diagonalelemente.

Fall 2: Die quadratische Gleichung $15a^2$–24a+16 = 0 hat keine Lösung, so dass das Diagonalelement $15a^2$–24a+16 ≠ 0 für jedes reelle a ist.

Fall 3: *3a–4 = 0* ⇔ *3a = 4* ⇔ a = 0,75: Einsetzen in das Endtableau ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0{,}75 & 3{,}75 \\ 0 & 0 & -0{,}375 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 6{,}4375 & -19{,}3125 \end{array}\right)$$

und damit wegen $6{,}4375x_3 = -19{,}3125$ ⇔ $x_3 = -3$ (3. Gleichung) und $-0{,}375x_3 = -1{,}5$ ⇔ $x_3 = 4$ (2. Gleichung) einen Widerspruch, so dass Unlösbarkeit vorliegt.

Das Diagonalelement 4a braucht nicht betrachtet zu werden, da es schon im Fall 1 enthalten ist. Für Fall 4: a ≠ 0,75 haben wir noch eine eindeutige Lösung.

VII.5 Lösungen: a) Für t = 1 wird das lineare Gleichungssystem mit Parameter zu einem normalen linearen Gleichungssystem:

Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 | *R.S.*

-2 -1 1 | 0

-1 -1 3 | -1

1 -1 7 | -3

1. Schritt: -2*(*2*) + 1*(*1*) / 2*(*3*) + 1*(*1*)

-2 -1 1 | 0

0 1 -5 | 2

0 -3 15 | -6

2. Schritt: 1*(*1*) + 1*(*2*) / 1*(*3*) + 3*(*2*)

-2 0 -4 | 2

0 1 -5 | 2

0 0 0 | 0

Teilen: (*1*):(-2)

1 0 2 | -1

0 1 -5 | 2

0 0 0 | 0

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = s$
$x_1 = -1 - 2s$
$x_2 = 2 + 5s$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl s ▶ Lösungsmenge: $L_{t=1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1-2s \\ 2+5s \\ s \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$.

b) Für das allgemeine lineare Gleichungssystem mit Parameter t gelten die Umformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & t-2 & t^2 & 0 \\ -1 & -1 & 3t & -t \\ t & -t & 5t+2 & -5t+2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2II - I \\ 2III + tI \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & t-2 & t^2 & 0 \\ 0 & -t & -t^2+6t & -2t \\ 0 & t^2-4t & t^3+10t+4 & -10t+4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + (t-4)I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & t-2 & t^2 & 0 \\ 0 & -t & -t^2+6t & -2t \\ 0 & 0 & 10t^2-14t+4 & -2t^2-2t+4 \end{array}\right)$$

Fall 1: $10t^2 - 14t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 10 \cdot 4}}{2 \cdot 10} = \frac{14 \pm \sqrt{36}}{20} = \frac{14 \pm 6}{20}$ ⇔ *t = 0,4, t = 1*

α) t = 0,4: Das Endtableau lautet, wenn wir t = 0,4 einsetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1{,}6 & 0{,}16 & 0 \\ 0 & -0{,}4 & 2{,}24 & -0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}88 \end{array}\right),$$

so dass sich als Lösungsmenge $L_{t=0,4} = \{\ \}$ ergibt.

β) <u>t = 1</u>: Der Fall wurde schon in Aufgabe a) behandelt. Das Endtableau

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

weist auf die schon bekannte mehrdeutige Lösung hin.

<u>Fall 2</u>: *-t = 0* ⇔ <u>t = 0</u>: Das Endtableau lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Die Lösungen sind: $x_3 = 1$, $x_2 = s$, $x_1 = -s$, als Lösungsmenge gilt: $L_{t=0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$.

<u>Fall 3</u>: <u>t ≠ 0, t ≠ 0,4, t ≠ 1</u>: Das Gleichungssystem ist für diese t eindeutig lösbar, und zwar gilt laut Endtableau:

$$x_3 = \frac{-2t^2 - 2t + 4}{10t^2 - 14t + 4} = \frac{-2(t+2)(t-1)}{10(t-0{,}4)(t-1)} = \frac{-(t+2)}{5(t-0{,}4)} = -\frac{t+2}{5t-2},\quad x_2 = 2 - \frac{(t-6)(t+2)}{5t-2},$$

$$x_1 = t - 2 - \frac{(t+2)(t^2 - 4t + 6)}{5t-2}$$

Als Lösungsmenge ergibt sich mithin: $L_{t\neq 0, t\neq 0,4, t\neq 1} = \left\{ \begin{pmatrix} t - 2 - \frac{(t+2)(t^2-4t+6)}{5t-2} \\ 2 - \frac{(t-6)(t+2)}{5t-2} \\ -\frac{t+2}{5t-2} \end{pmatrix} \right\}$.

c) Wir betrachten die in den drei Fällen aufgetretenen Lösungsmengen und erkennen zunächst, dass bei <u>t=0</u> die Lösung $x_3 = 1$ für beliebige s der Lösungsmenge $L_{t=0}$ erscheint. Damit ist t=0 als entsprechender t-Wert erkannt. Für den Fall <u>t=1</u> tritt mit s=1 die Lösung $x_3 = 1$ auf; hier gilt noch: $x_1 = -3$, $x_2 = 7$. Im Fall eindeutiger Lösbarkeit, also <u>t≠0, t≠0,4, t≠1</u>, muss gelten: $x_3 = -\frac{t+2}{5t-2} = 1$ ⇔ *-(t+2) = 5t–2* ⇔ *-t–2 = 5t–2* ⇔ *-t = 5t* ⇔ *0 = 6t* ⇔ *t = 0*. Da hier aber t≠0 gefordert ist, gibt es keine solche Lösung mit $x_3 = 1$.

VII.6 <u>Lösungen</u>: a) Wir betrachten das <u>lineare Gleichungssystem</u> für den Parameter <u>t = 0</u>:

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	x_3	R.S.
0	-2	3	-3
0	0	-4	2
0	8	0	8

Zeilentausch: (*2*) <-> (*3*)

0 -2 3 | -3

0 8 0 | 8

0 0 -4 | 2

2. Schritt: 4*(*1*) + 1*(*2*)

0 0 12 | -4

0 8   0 | 8

0 0 -4 | 2

3. Schritt: 1*(*1*) + 3*(*3*)

0 0 0 | 2

0 8 0 | 8

0 0 -4 | 2

Da die 1. Gleichung *0 = 2* lautet, ergibt sich hier als Lösungsmenge: $L_{t=0}$ = { }.

b) Als lineares Gleichungssystem für den Parameter t = -2 ergibt sich:

$+ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9$

$- 4x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 4$

$+ 8x_2 + 4x_3 = 0$

Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 | R.S.

 2 -2 3 | 9

-4 -6 -4 | 4

 0 8 4 | 0

1. Schritt: 1*(*2*) + 2*(*1*)

2   -2 3 | 9

0 -10 2 | 22

0   8 4 | 0

2. Schritt: -5*(*1*) + 1*(*2*) / 5*(*3*) + 4*(*2*)

-10   0 -13 | -23

0 -10   2 | 22

0   0 28 | 88

3. Schritt: 28*(*1*) + 13*(*3*) / 14*(*2*) - 1*(*3*)

-280   0   0 | 500

0 -140   0 | 220

0   0 28 | 88

Teilen: (*1*):(-280) / (*2*):(-140) / (*3*):28

1 0 0 | -1.7857142857142858

0 1 0 | -1.5714285714285714

0 0 1 | 3.142857142857143

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

x_1 = -1.7857142857142858
x_2 = -1.5714285714285714
x_3 = 3.142857142857143

c) Wir formen das lineare homogene Gleichungssystem mit Parameter t um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -t & -2 & 3 & 0 \\ 2t & 3t & -4 & 0 \\ 0 & 8 & -2t & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II+2I \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -t & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3t-4 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -2t & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (3t-4)III-8II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -t & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3t-4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6t^2+8t-16 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Fall 1</u>: Die quadratische Gleichung $-6t^2 + 8t - 16 = 0$ besitzt keine Lösung. Der Fall entfällt somit.

<u>Fall 2</u>: $3t - 4 = 0 \Leftrightarrow 3t = 4 \Leftrightarrow$ <u>t = 0,75</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}75 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -13{,}375 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III+6{,}6875II \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}75 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösungsmenge ist wegen $x_3 = 0$, $x_2 = s$, $x_1 = -\frac{8}{3}s$: $L_{t=0,75} = \left\{ s\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$.

<u>Fall 3</u>: $-t = 0 \Leftrightarrow$ <u>t = 0</u>: Wir verweisen auf Aufgabe a) und erhalten dem gemäß: $L_{t=0} = \{ \}$.

<u>Fall 4</u>: <u>t ≠ 0, t ≠ 0,75</u>: Für diese t liegt die eindeutige Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems vor, und somit gilt die triviale Lösung des linearen homogenen Gleichungssystems: $L_{t\neq 0, t\neq 0,75} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

d) Wir formen das <u>lineare inhomogene Gleichungssystem</u> mit Parameter t wie in Aufgabe c) und wie folgt um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -t & -2 & 3 & 3t-3 \\ 2t & 3t & -4 & -t+2 \\ 0 & 8 & -2t & -2t^2+8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II+2I \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -t & -2 & 3 & 3t-3 \\ 0 & 3t-4 & 2 & 5t-4 \\ 0 & 8 & -2t & -2t^2+8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (3t-4)III-8II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -t & -2 & 3 & 3t-3 \\ 0 & 3t-4 & 2 & 5t-4 \\ 0 & 0 & -6t^2+8t-16 & -6t^3+8t^2-16t \end{array}\right)$$

Die letzte Zeile des Endtableaus ergibt sich dabei aus den Umformungen: $(3t–4)(-2t) – 8\cdot 2 = -6t^2 + 8t – 16$; $(3t–4)(-2t^2+8) – 8(5t–4) = -6t^3 + 8t^2 + 24t – 32 – 40t + 32 = -6t^3 + 8t^2 – 16t$.

Gemäß dem Endtableau erhalten wir dieselben Sonderfälle wie in Aufgabe c):

Fall 1: entfällt gemäß Aufgabe c).

Fall 2: t = 0,75: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}75 & -2 & 3 & -0{,}75 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -25{,}375 & -19{,}03125 \end{array}\right)$$

Aus der 2. Gleichung folgt: x_3 = -0,5, aus der 3.: x_3 = 0,75, was zum Widerspruch führt und damit zu: $L_{t=0,75} = \{\,\}$.

Fall 3: t = 0: Für das Endtableau gilt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten aus Gleichung (*3*): $-16x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$, aus Gleichung (*2*): $-4x_2 + 0 = -4 \Leftrightarrow x_2 = 1$ sowie wegen Gleichung (*1*): $-2 + 0 = -3 \Leftrightarrow$ -2 = -3. Der Widerspruch führt auf die Lösungsmenge: $L_{t=0} = \{\,\}$

Daneben haben wir noch:

Fall 4: $t \neq 0$, $t \neq 0{,}75$: Wir betrachten das allgemeine Endtableau und haben bzgl. der 3. Gleichung: $(-6t^2+8t-16)x_3 = -6t^3+8t^2-16t \Leftrightarrow x_3 = t$. Einsetzen von x_3 = t in die 2. Gleichung führt zu: $(3t-4)x_2 + 2t = 5t-4 \Leftrightarrow (3t-4)x_2 = 3t-4 \Leftrightarrow x_2 = 1$. Einsetzen von x_2 = 1 und x_3 = t in die 1. Gleichung ergibt: $-tx_1 - 2 + 3t = 3t - 3 \Leftrightarrow -tx_1 = -1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{t}$. Es gilt für die Lösungsmenge: $L_{t\neq 0, t\neq 0,75} = \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 \\ t \end{pmatrix}\right\}$.

VII.7 Lösungen: a) Das Anfangstableau des linearen Gleichungssystems mit den Variablen x und y und dem Parameter λ ist:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & -1 & \lambda^2+2\lambda \\ 2 & \lambda & 2\lambda-2\lambda^2 \end{array}\right) \lambda II - 2I$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & -1 & \lambda^2+2\lambda \\ 0 & \lambda^2+2 & -2\lambda^3-4\lambda \end{array}\right)$$

Wegen der Gleichungsaddition im 1. Gauß-Schritt ist $\lambda \neq 0$ zu fordern, weswegen zunächst der Fall 1: $\lambda = 0$ zu untersuchen ist. Einsetzen von $\lambda = 0$ in das Anfangstableau ergibt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und damit: y = 0, x = 0. Lösungsmenge ist hier: $L_{\lambda=0} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Fall 2: Das Diagonalelement $\lambda^2 + 2$ ist immer ungleich 0, so dass dieser Fall nicht auftritt. Der Fall $\lambda = 0$ wurde schon behandelt. Wir haben damit noch übrig:

Fall 3: λ ≠ 0: Die 2. Gleichung ergibt: $(\lambda^2+2)y = -2\lambda(\lambda^2+2) \Leftrightarrow y = -2\lambda$; aus der 1. Gleichung folgt: $\lambda x + 2\lambda = \lambda^2 + 2\lambda \Leftrightarrow \lambda x = \lambda^2 \Leftrightarrow x = \lambda$. Lösungsmenge ist hierbei: $L_{\lambda\neq 0} = \left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix}\right\}$.

b) Wir haben die Matrixdarstellung des linearen Gleichungssystems mit Parameter t und formen gemäß dem Gauß-Algorithmus um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 0 & 2t^2 \\ -1 & -2 & t^2 & -2t \\ 1 & -t & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II+I \\ III-I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 0 & 2t^2 \\ 0 & -2+t & t^2 & 2t^2-2t \\ 0 & -2t & 2 & -2t^2+2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (-2+t)III+2tII \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 0 & 2t^2 \\ 0 & -2+t & t^2 & 2t^2-2t \\ 0 & 0 & 2t^3+2t-4 & 2t^3+2t-4 \end{array}\right)$$

Beim 2. Gauß-Schritt ist wegen der Multiplikation der 3. Gleichung mit (-t+2) t ≠ 2 zu fordern, so dass sich Fall 1: t = 2 ergibt: Einsetzen in das 2. Tableau führt hier auf:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -6 \end{array}\right) II \leftrightarrow III \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Die Lösungen sind: $x_3 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$, die Lösungsmenge: $L_{t=2} = \left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Nun schauen wir uns das Endtableau an und dessen Diagonalelemente:

Fall 2: Hier ist: $2t^3+2t-4=0$. Die kubische Gleichung hat mit t = 1 eine Lösung, so dass die Polynomdivision $(2t^3+2t-4):(t-1)=2t^2+2t+4$ die allerdings nicht lösbare quadratische Gleichung: $2t^2+2t+4=0$ ergibt. Einsetzen von t = 1 in das Endtableau führt zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist mehrdeutig lösbar mit: $x_3 = s, x_2 = s, x_1 = 2 - s$ und mit der Lösungsmenge: $L_{t=1} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R\right\}$.

Für das 2. von t abhängige Diagonalelement ergibt sich wegen t = 2 der Fall 1. Es bleibt Fall 3: t ≠ 1, t ≠ 2: Hier sind Lösungen: $x_3 = 1, x_2 = t, x_1 = t^2$, die einelementige Lösungsmenge lautet: $L_{t\neq 1, t\neq 2} = \left\{\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

c) Wir formen das Anfangstableau des linearen Gleichungssystems mit Parameter r um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 5r & 3r \\ r & -1 & 2r & r^2 \\ 4 & r & r & 2r^2+5r \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2II - rI \\ III - 2I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 5r & 3r \\ 0 & 2r-2 & -5r^2+4r & -r^2 \\ 0 & r+4 & -9r & 2r^2-r \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (2r-2)III-(r+4)II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 5r & 3r \\ 0 & 2r-2 & -5r^2+4r & -r^2 \\ 0 & 0 & 5r^3-4r^2+2r & 5r^3-4r^2+2r \end{array}\right)$$

Wir beachten beim 2. Gauß-Schritt r ≠ 1 und haben entsprechend den Diagonalelementen des Endtableaus:

Fall 1: $5r^3-4r^2+2r=0$ ⇔ $r(5r^2-4r+2)=0$ ⇔ *r = 0,* $5r^2-4r+2=0$ ⇔ r = 0: Einsetzen ergibt das lineare homogene Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

mit den Lösungen: $x_3 = s$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, also: $L_{r=0} = \left\{ s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$ mit Parameter s.

Fall 2: *2r – 2 = 0* ⇔ *2r = 2* ⇔ r = 1: Das 2. Gauß-Tableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -9 & 1 \end{array}\right) II \leftrightarrow III \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right),$$

so dass $x_3 = 1$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$ Lösungen und $L_{r=1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Lösungsmenge sind.

Fall 3: r ≠ 0, r ≠ 1: Die eindeutige Lösung bestimmt sich als:

$$x_3 = \frac{5r^3-4r^2+2r}{5r^3-4r^2+2r} = 1$$

$$x_2 = \frac{4r^2-4r}{2r-2} = \frac{4r(r-1)}{2(r-1)} = 2r$$

$$x_1 = \frac{3r-r}{2} = \frac{2r}{2} = r$$

Die Lösungsmenge ist hier: $L_{r\neq 0, r\neq 1} = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 2r \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

---

d) Wir formen nach dem Gauß-Algorithmus um in Dreiecksgestalt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & 1 \\ 2a & -1 & a+1 & 1 \\ 4a & -3 & 2a & a^2+2a \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-2I \\ III-4I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a & a^2+2a-4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III-II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2+2a-3 \end{array}\right)$$

Daraus ergeben sich:

Fall 1: $a - 1 = 0 \Leftrightarrow$ $a = 1$: Das Endtableau lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die mehrdeutige Lösung heißt: $x_3 = s$, $x_2 = -1 - 2s$, $x_1 = -2s$ mit Parameter s.

Fall 2: $a = 0$: Als Endtableau folgt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Somit ergeben sich aus der 3. und 2. Gleichung: $x_3 = 3$, $x_2 = -4$, Ergebnisse, die aber wegen $4 = 1$ im Widerspruch zur 1. Gleichung stehen.

Fall 3: $a \neq 0, a \neq 1$: Wir teilen durch die Diagonalelemente und erhalten:

$x_3 = \dfrac{a^2+2a-4}{a-1} = \dfrac{(a+3)(a-1)}{a-1} = a+3$, $x_2 = -1-(a+1)(a+3) = -a^2-4a-4$,

$x_1 = \dfrac{1}{a}(1+a^2+4a+4) = a+4+\dfrac{5}{a}$.

Zusammenfassend haben wir zu den Fällen die folgenden Lösungsmengen:

$$L_{a=0} = \{\ \},\ L_{a=1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\},\ L_{a\neq 0, a\neq 1} = \left\{ \begin{pmatrix} a+4+5/a \\ -a^2-4a-4 \\ a+3 \end{pmatrix} \right\}.$$

---

e) Wir formen um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t^2+1 & -1 & 0 & t^2 \\ 0 & t^2+4 & -1 & t^2 \\ -16 & -48 & t^2+16 & 4t^2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (t^2+1)III+16I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t^2+1 & -1 & 0 & t^2 \\ 0 & t^2+4 & -1 & t^2 \\ 0 & -48t^2-64 & t^4+17t^2+16 & 4t^4+20t^2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (t^2+4)III+(48t^2+64)II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t^2+1 & -1 & 0 & t^2 \\ 0 & t^2+4 & -1 & t^2 \\ 0 & 0 & t^6+21t^4+36t^2 & 4t^6+84t^4+144t^2 \end{array}\right)$$

Die Diagonalelemente des Endtableaus $t^2 + 1$ und $t^2 + 4$ sind immer größer 0, so dass wir auf deren Betrachtung verzichten können.

<u>Fall 1</u>: $t^6+21t^4+36t^2=0 \Leftrightarrow t^2(t^4+21t^2+36)=0 \Leftrightarrow$ *$t^2 = 0$,* $t^4+21t^2+36=0 \underset{z=t^2}{\Leftrightarrow}$ *$t = 0$,* $z^2+21z+36=0 \Leftrightarrow$ *$t = 0$,* $z=10{,}5\pm\sqrt{10{,}5^2-36}=10{,}5\pm\sqrt{74{,}25}\approx 10{,}5\pm 8{,}62 \underset{z=t^2}{\Leftrightarrow}$ *$t = 0$, $t^2 = 1{,}88$, $t^2 = 19{,}12$* $\Leftrightarrow$ <u>t = 0, t = ±1,37, t = ±4,37</u>: Wir unterscheiden die Unterfälle:

α) <u>t = 0</u>: Das Entableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit gilt: *$x_3 = s$, $x_2 = \frac{1}{4}s$, $x_1 = \frac{1}{4}s$* und weiter: $L_{t=0}=\left\{ s\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s\in R\right\}$ mit Parameter s.

β) <u>t = ±1,37</u>: Die beiden Zahlen betrachten wir gemeinsam wegen dem nur als t^2 im Endtableau auftretenden Parameter. Wir kürzen zudem noch ab: $z_0 = t^2 \approx 1{,}88$ und haben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} z_0+1 & -1 & 0 & z_0 \\ 0 & z_0+4 & -1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Als Lösungen folgen mit reellem Parameter s:

$x_3 = s$, $x_2 = \frac{z_0}{z_0+4}+\frac{1}{z_0+4}s \approx$ *$0{,}32 + 0{,}17s$,*

$x_1 = \frac{z_0}{z_0+1}+\frac{z_0}{(z_0+1)(z_0+4)}+\frac{1}{(z_0+1)(z_0+4)}s \approx$ *$0{,}76 + 0{,}06s$*

Lösungsmenge ist: $L_{t=\pm 1{,}37}=\left\{\begin{pmatrix} 0{,}76 \\ 0{,}32 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 0{,}06 \\ 0{,}17 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s\in R\right\}$

γ) <u>t = ±4.37</u>: Es sei $z_0 = t^2 \approx 19{,}12$. Wir haben damit dasselbe Tableau wie in Fall β):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} z_0+1 & -1 & 0 & z_0 \\ 0 & z_0+4 & -1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösungen sind analog:

$x_3 = s$, $x_2 = \frac{z_0}{z_0+4}+\frac{1}{z_0+4}s \approx$ *$0{,}83 + 0{,}04s$,*

$x_1 = \frac{z_0}{z_0+1}+\frac{z_0}{(z_0+1)(z_0+4)}+\frac{1}{(z_0+1)(z_0+4)}s \approx$ *$0{,}99 + 0{,}002s$*

Lösungsmenge ist: $L_{t=\pm 4,37} = \left\{ \begin{pmatrix} 0,83 \\ 0,99 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,002 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$

<u>Fall 2</u>: <u>t ≠ 0, t ≠ ±1,37, t ≠ ±4,37</u>: Für die restlichen t bestimmt sich die eindeutige Lösung aus dem Endtableau:

$$x_3 = \frac{4t^6 + 84t^4 + 144t^2}{t^6 + 21t^4 + 36t^2} = \frac{4(t^6 + 21t^4 + 36t^2)}{t^6 + 21t^4 + 36t^2} = 4$$

$$x_2 = \frac{t^2 + 4}{t^2 + 4} = 1$$

$$x_1 = \frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} = 1$$

Lösungsmenge ist somit: $L_{t\neq 0, t\neq \pm 1,37, t\neq \pm 4,37} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

---

f) Wir formen um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & -1 \\ -1 & 2a & a+1 & 1 \\ -3 & 4a & 2a & a^2+2a \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II + I \\ III + 3I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & -1 \\ 0 & a & a+1 & 0 \\ 0 & a & 2a & a^2+2a-3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & -1 \\ 0 & a & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2+2a-3 \end{array}\right)$$

Wir betrachten die vom Parameter a abhängigen Diagonalelemente.

<u>Fall 1</u>: *a – 1 = 0* ⇔ <u>a = 1</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wegen *0 = 0* in der 3. Gleichung gilt: $x_3 = s$, $x_2 = -2s$, $x_1 = -1 - 2s$ mit reellem Parameter s.

Als Lösungsmenge haben wir: $L_{a=1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$.

<u>Fall 2</u>: <u>a = 0</u>: Wir setzen a = 0 in das Endtableau ein und erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Aus Gleichung (*3*) folgt. $-x_3 = -3$ ⇔ $x_3 = 3$, aus Gleichung (*2*): $x_3 = 0$, so dass sich ein Widerspruch ergibt. Damit ist: $L_{a=0}$ = { }.

<u>Fall 3</u>: <u>a ≠ 0, a ≠ 1</u>: Die eindeutige Lösung bestimmt sich als:

$$x_3 = \frac{a^2+2a-3}{a-1} = \frac{(a-1)(a+3)}{a-1} = a+3$$

$$x_2 = -\frac{(a+1)(a+3)}{a} = -\frac{a^2+4a+3}{a} = -(a+4+\frac{3}{a}) = -a-4-\frac{3}{a}$$

$$x_1 = -1+a\left[-(a+4+\frac{3}{a})\right] = -1-a^2-4a-3 = -a^2-4a-4 = -(a^2+4a+4) = -(a+2)^2$$

Als Lösungsmenge ergibt sich: $L_{a\neq 0, a\neq 1} = \left\{ \begin{pmatrix} -(a+2)^2 \\ -a-4-\frac{3}{a} \\ a+3 \end{pmatrix} \right\}$.

---

g) Wir formen um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4r & -3 & 2r & r^2+2r \\ -r & 1 & 0 & -1 \\ 2r & -1 & r+1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 4II+I \\ 2II-I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4r & -3 & 2r & r^2+2r \\ 0 & 1 & 2r & r^2+2r-4 \\ 0 & 1 & 2 & -r^2-2r+2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III-II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4r & -3 & 2r & r^2+2r \\ 0 & 1 & 2r & r^2+2r-4 \\ 0 & 0 & -2r+2 & -2r^2-4r+6 \end{array}\right)$$

Die vom Parameter r abhängigen Diagonalelemente sind -2r +2 und 4r.

<u>Fall 1</u>: *-2r + 2 = 0* ⇔ *-2r = -2* ⇔ <u>r = 1</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die mehrdeutige Lösung dieses Falles lautet mit reellem Parameter s: $x_3 = s$, $x_2 = -1 - 2s$, $x_1 = -2s$. Die Lösungsmenge ist: $L_{r=1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$.

<u>Fall 2</u>: *4r = 0* ⇔ <u>r = 0</u>: Einsetzen von r = 0 ins Endtableau führt auf:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} I+3II \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Es ergibt sich somit der Widerspruch *0 = -12*. Die Lösungsmenge ist: $L_{r=0}$ = { }.

<u>Fall 3</u>: <u>r ≠ 0, r ≠ 1</u>: Wir betrachten das Endtableau, bei dem wir nun auch durch die von r abhängigen Diagonalelemente teilen können. Es gilt somit:

$$x_3 = \frac{-2r^2 - 4r + 6}{-2r + 2} = \frac{-2(r-1)(r+3)}{-2(r-1)} = r + 3$$

$$x_2 = (r^2 + 2r - 4) - 2r(r+3) = r^2 + 2r - 4 - 2r^2 - 6r = -r^2 - 4r - 4 = -(r+2)^2$$

$$x_1 = \frac{(r^2 + 2r) - 2r(r+3) + 3(-r^2 - 4r - 4)}{4r} = \frac{r^2 + 2r - 2r^2 - 6r - 3r^2 - 12r - 12}{4r} = \frac{-4r^2 - 16r - 12}{4r}$$

$$= -r - 4 - \frac{3}{r}$$

Als Lösungsmenge ergibt sich: $L_{r\neq 0, r\neq 1} = \left\{ \begin{pmatrix} -r - 4 - \frac{3}{r} \\ -(r+2)^2 \\ r+3 \end{pmatrix} \right\}$.

Aus der Ähnlichkeit der Lösungsmengen in den Aufgaben f) und g) erkennen wir noch, dass die beiden linearen Gleichungssysteme durch Zeilen- und Spaltentausch jeweils auseinander hervorgehen.

VIII.1 Als Lösungen ergeben sich auf Grund der Gleichungsumformungen (hier getrennt durch „/“):

a) *4x = 20* **|** :4 / *x = 5* / **L** = {5}

b) *x + 12 = 15* **|** -12 / *x = 3* / **L** = {3}

c) *3x = -9* **|** :3 / *x = -3* / **L** = {-3}

d) *x – 8 = 10* **|** +8 / *x = 18* / **L** = {18}

e) *2x = 5* **|** :2 / *x = 2,5* / **L** = {2,5}

f) *x – 12 = 25* **|** + 12 / *x = 37* / **L** = {37}

g) *-2x = 10* **|** :(-2) / *x = -5* / **L** = {-5}

h) *x + 1 = -10* **|** -1 / *x = -11* / **L** = {-11}

i) *-5x = -25* **|** :(-5) / *x = 5* / **L** = {5}

j) *x + 3 = -20* **|** -3 / *x = -23* / **L** = {-23}

k) *10x = 7* **|** :10 / *x = 0,7* / **L** = {0,7}

l) *x + 5 = -19* **|** -5 / *x = -24* / **L** = {-24}

m) *8x = -32* **|** :8 / *x = -4* / **L** = {-4}

n) *2x + 1 = 27* **|** -1 / *2x = 26* **|** :2 / *x = 13* / **L** = {13}

o) *45x = 90* **|** :45 / *x = 2* / **L** ={2}

p) *2x – 5 = 13* **|** +5 / *2x = 18* **|** :2 / *x = 9* / **L** = {9}

q) *0,5x = 2* **|** ·2 / *x = 4* / **L** = {4}

r) *4x – 2 = 22* **|** +2 / *4x = 24* **|** :4 / *x = 6* / **L** ={6}

s) *-3x = 90* **|** :(-3) / *x = -30* / **L** = {-30}

t) *6x + 13 = 133* **|** -13 / *6x = 120* **|** :6 / *x = 20* / **L** = {20}

u) $\frac{1}{5}$*x = 20* **|** ·5 / *x = 100* / **L** = {100}

v) $\frac{1}{2}$*x + 4 = 19* **|** ·2 / *x + 8 = 38* **|** -8 / *2x = 30* **|** :2 / *x = 15* / **L** = {15}

w) -$\frac{1}{3}$*x = 9* **|** ·(-3) / *x = -27* / **L** = {-27}

x) *-x – 12 = -50* **|** +12 / *-x = -38* **|** ·(-1) / *x = 38* / **L** = {38}

y) *-4x = -28* **|** :(-4) / *x = 7* / **L** = {7}

z) *-3x – 8 = -50* **|** +8 / *-3x = -42* **|** :(-3) / *x = 14* / **L** = {14}

VIII.2 Als <u>Lösungen</u> ergeben sich auf Grund der Gleichungsumformungen (hier getrennt durch „/“):

a) *5x – 10 = 3x* **|** -3x / *2x – 10 = 0* **|** + 10 / *2x = 10* **|** :2 / *x = 5* / **L** = {5}

b) *10x + 56 = 3x* **|** -3x / *7x + 56 = 0* **|** -56 / *7x = -56* **|** :7 / *x = -8* / **L** = {-8}

c) *x + 21 = -6x* **|** +6x / *7x + 21 = 0* **|** -21 / *7x = -21* **|** :7 / *x = 3* / **L** = {3}

d) *12x + 34 = 3x – 11* **|** -3x / *9x + 34 = -11* **|** -34 / *9x = -45* **|** :9 / *x = -5* / **L** = {-5}

e) *0,1x + 4,5 = 11,1 – x* **|** ·10 / *x + 45 = 111 – 10x* **|** +10x / *11x + 45 = 111* **|** -45 / *11x = 66* **|** :6 / *x = 6* / **L** = {6}

f) *1,78x – 6,8 + 2x = 0,8x + 23* (Zusammenfassen) / *3,78x – 6,8 = 0,8x + 23* **|** -0,8x / *2,98x – 6,8 = 23* **|** +6,8 / *2,98x = 29,8* **|** :2,98 / *x = 10* / **L** = {10}

g) *-3x + 67 – 2x = 109 – 5x – 63* (Zusammenfassen) / *-5x + 67 = 46 – 5x* **|** +5x / *67 = 46* (Widerspruch) / **L** = { }

h) *2,6x + 11,8 – 1,2x = 4,3 + 8,9x + 7,5* (Zusammenfassen) / *1,4x + 11,8 = 11,8 + 8,9x* **|** -1,4x / *11,8 = 11,8 + 7,5x* **|** -11,8 / *0 = 7,5x* **|** :7,5 / *x = 0* / **L** = {0}

i) $\frac{1}{2}x+0{,}75-1{,}2x=1{,}15-\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}+0{,}05x$ **|** ·20 /
10x + 15 – 24x = 23 – 15x – 8 + x (Zusammenfassen) / -14x + 15 = 15 – 14x **|** +14x / 15 = 15 (allgemein gültig) / **L** = **R**

j) *5112x + 13977 = 11102 – 2044x – 25749* (Zusammenfassen) / *5112x + 13977 = -14647 – 2044x* **|** + 2044x / *7156x + 13977 = -14647* **|** -13977 / *7156x = -28624* **|** :7156 / *x = -4* / **L** = {-4}

k) $\frac{5}{4}x-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}x=26\frac{1}{3}+\frac{1}{10}x+\frac{163}{3}$ **|** ·60 / 75x – 20 + 12x = 1580 + 6x + 3260 (Zusammenfassen) / 87x – 20 = 4840 + 6x **|** -6x / 81x – 20 = 4840 **|** +20 / 81x = 4860 **|** :81 / x = 60 / **L** = {60}

l) *52x + 955 – 7x = 27x – 17063 + 36x* (Zusammenfassen) / *45x + 955 = 63x – 17063* **|** -45x / *955 = 18x – 17063* **|** +17063 / *18018 = 18x* **|** :18 / *x = 1001* / **L** = {1001}

VIII.3 Als <u>Lösungen</u> ergeben sich auf Grund der Gleichungsumformungen (hier getrennt durch „/“):

a) *4x – 3 + x = 7 – 3x – 2* (Zusammenfassen) / *5x – 3 = 5 – 3x* **|** +3x / *8x – 3 = 5* **|** +3 / *8x = 8* **|** :8 / *x = 1* / **L** ={1}

b) *0,5x + 20 = 6x – 10 + 2x* (Zusammenfassen) / *0,5x + 20 = 8x – 10* **|** -0,5x / *20 = 7,5x – 10* **|** +10 / *30 = 7,5x* **|** :7,5 / x = 4 / **L** = {4}

c) *3,5 + 2x – 10 + 1,5x = 4,5 + 2x + 5,5* (Zusammenfassen) / *-6,5 + 3,5x = 10 + 2x* **|** -2x / *-6,5 + 1,5x = 10* **|** +6,5 / *1,5x = 16,5* **|** :1,5 / *x = 11* / **L** = {11}

d) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-2=\frac{x}{8}+3$ **|** ·8 / *4x + 2x – 16 = x + 24* (Zusammenfassen) / *6x – 16 = x + 24* **|** -x / *5x – 16 = 24* **|** +16 / *5x = 40* **|** :5 / *x = 8* / **L** ={8}

e) *100x + 23x – 1000 = 43x + 600* (Zusammenfassen) / *123x – 1000 = 43x + 600* **|** -43x / *80x – 1000 = 600* **|** +1000 / *80x = 1600* **|** :80 / *x = 20* / **L** ={20}

f) $\frac{x+8}{2}+x-10=10x-\frac{x}{2}-22$ **|** ·2 / *x + 8 + 2x – 20 = 20x – x – 44* (Zusammenfassen) /

$3x - 12 = 19x - 44$ **|** -3x / $-12 = 16x - 44$ **|** +44 / $32 = 16x$ **|** :16 / $x = 2$ / **L** = {2}

g) $0{,}5\cdot(x+10) + 1{,}5 = 2x + 6 - 10$ (Klammer auflösen) / $0{,}5x + 5 + 1{,}5 = 2x + 6 - 10$ (Zusammenfassen) / $0{,}5x + 6{,}5 = 2x - 4$ **|** -0,5x / $6{,}5 = 1{,}5x - 4$ **|** +4 / $10{,}5 = 1{,}5x$ **|** :1,5 / $x = 7$ / **L** = {7}

h) $120 - 0{,}25x - 15 = 0{,}1x + 70$ (Zusammenfassen) / $105 - 0{,}25x = 0{,}1x + 70$ **|** +0,25x / $105 = 0{,}35x + 70$ **|** -70 / $35 = 0{,}35x$ **|** :0,35 / $x = 100$ / **L** = {100}

i) $34 - x + 68 - 2x + 136 = 238 + 3x$ (Zusammenfassen) / $238 - 3x = 238 + 3x$ **|** +3x / $238 = 238 + 6x$ **|** -238 / $0 = 6x$ **|** :6 / $x = 0$ / **L** = {0}

j) $17 - 10x - 4 - x = 3x - 11 - 5x - 3$ (Zusammenfassen) / $13 - 11x = -2x - 14$ **|** +11x / $13 = 9x - 14$ **|** +14 / $27 = 9x$ **|** :9 / $x = 3$ / **L** = {3}

k) $x + 12 - 0{,}5x = 24 + 3(x-14)$ (Klammer auflösen) / $0{,}5x + 12 = 24 + 3x - 42$ (Zusammenfassen) / $0{,}5x + 12 = -18 + 3x$ **|** -0,5x / $12 = -18 + 2{,}5x$ **|** +18 / $30 = 2{,}5x$ **|** :2,5 / $x = 12$ / **L** = {12}

l) $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+9=\frac{x}{6}+19$ **|** ·6 / $6x + 3x + 2x + 54 = x + 19$ (Zusammenfassen) / $11x + 54 = x + 19$ **|** -x / $10x + 54 = 19$ **|** -54 / $10x = -35$ **|** :10 / $x = -3{,}5$ / **L** = {-3,5}

m) $2x + 5(x+4) - 20 = -x + 2(x-3)$ (Klammern auflösen) / $2x + 5x + 20 - 20 = -x + 2x - 6$ (Zusammenfassen) / $7x = x - 6$ **|** -x / $6x = -6$ **|** :6 / $x = -1$ / **L** = {-1}

n) $-7x = 100 - 10x + 160 - 10x$ (Zusammenfassen) / $-7x = 260 - 20x$ **|** +20x / $13x = 260$ **|** :13 / $x = 20$ / **L** = {20}

o) $5x + 25 - 60 = 93 - 3x + 24$ (Zusammenfassen) / $5x - 35 = 117 - 3x$ **|** +3x / $8x - 35 = 117$ **|** +35 / $8x = 152$ **|** :8 / $x = 19$ / **L** = {19}

p) $\frac{2x+2}{9}-\frac{x-7}{4}=\frac{3x-17}{4}$ **|** ·36 / 4(2x+2) – 9(x–7) = 9(3x–17) (Klammern auflösen) / 8x + 8 – 9x + 63 = 27x – 153 (Zusammenfassen) / $-x + 71 = 27x - 153$ **|** +x / $71 = 28x - 153$ **|** +153 / $224 = 28x$ **|** :28 / $x = 8$ / **L** = {8}

q) $3x - 105 + 2x - 70 = 35 - x$ (Zusammenfassen) / $5x - 175 = 35 - x$ **|** +x / $6x - 175 = 35$ **|** +175 / $6x = 210$ **|** :6 / $x = 35$ / **L** = {35}

r) $x + 2(x+4) + 4x = 20 + 6(x+2) - 13$ (Klammern auflösen) / $x + 2x + 8 + 4x = 20 + 6x + 12 - 13$ (Zusammenfassen) / $7x + 8 = 6x + 19$ **|** -6x / $x + 8 = 19$ **|** -8 / $x = 11$ / **L** = {11}

s) $104{,}5 + 23{,}6 - 20{,}4x = 10{,}5x - 335{,}4$ (Zusammenfassen) / $128{,}1 - 20{,}4x = 10{,}5x - 335{,}4$ **|** +20,4x / $128{,}1 = 30{,}9x - 335{,}4$ **|** + 335,4 / $463{,}5 = 30{,}9x$ **|** :30,9 / $x = 15$ / **L** = {15}

t) $89{,}55x - 27{,}2x + 12{,}65 = 34{,}73 + 40{,}27x$ (Zusammenfassen) / $62{,}35x + 12{,}65 = 34{,}73 + 40{,}27x$ **|** -40,27x / $22{,}08x + 12{,}65 = 34{,}73$ **|** -12,65 / $22{,}08x = 22{,}08$ **|** :22,08 / $x = 1$ / **L** ={1}

VIII.4 Als Lösungen ergeben sich auf Grund der Gleichungsumformungen (hier getrennt durch „/“):

a) $6(5-x) = 8(x+2)$ (Klammern auflösen) / $30 - 6x = 8x + 16$ **|** +6x / $30 = 14x + 16$ **|** -16 / $14 = 14x$ **|** :14 / $x = 1$ / **L** ={1}

b) $17(2x+3) - 5(x-8) - 9(x+4) = 35$ (Klammern auflösen) / $34x + 51 - 5x + 40 - 9x - 36 = 35$ (Zusammenfassen) / $20x + 55 = 35$ **|** -55 / $20x = -20$ **|** : 20 / $x = -1$ / **L** = {-1}

c) $11(5+3x) - 97 = 12x$ (Klammer auflösen) / $55 + 15x - 97 = 12x$ (Zusammenfassen) / $-42 + 15x = 12x$ **|** -15x / $-42 = -3x$ **|** :(-3) / $x = 14$ / **L** = {14}

d) $3{,}5(x+1) - 1{,}7(2+x) = 0{,}3(x+3) + 2{,}2$ (Klammern auflösen) /

3,5x + 3,5 – 3,4 – 1,7x = 0,3x + 0,9 + 2,2 (Zusammenfassen) /
1,8x + 0,1 = 0,3x + 3,1 **|** -0,3x / *1,5x + 0,1 = 3,1* **|** -0,1 / *1,5x = 3* **|** :1,5 / *x = 2* / **L** = {2}

e) $\frac{1}{5}x-\frac{2}{3}(4x+5)+\frac{3}{10}=2(x-3)+\frac{1}{2}(6-5x)-\frac{148}{15}$ **|** ·30 /
6x – 20(4x+5) + 9 = 60(x–3) + 15(6–5x) – 296 (Klammern auflösen) /
6x – 80x – 100 + 9 = 60x – 180 + 90 – 75x – 296 (Zusammenfassen) /
-74x – 91 = -15x – 386 **|** +74x / *-91 = 59x – 386* **|** +386 / *295 = 59x* **|** :59 / *x = 5* / **L** = {5}

f) *90(x+4) – 72(2x+3) + 105 = 110x + 14(12–8x) + 24(4x+1) – 17* (Klammern auflösen) /
90x + 360 – 144x – 216 + 105 = 110x + 168 – 112x + 96x + 24 – 17 (Zusammenfassen) /
-54x + 249 = 94x + 175 **|** + 54x / *249 = 148x + 175* **|** -175 / *74 = 148x* **|** :148 / *x = 0,5* /
L = {0,5}

g) *5(x+4) + 5(2x–9) = 5(x+6) + 10(x–1) – 45* (Klammern auflösen) /
5x + 20 + 10x – 45 = 5x + 30 + 10x – 10 – 45 (Zusammenfassen) /
15x – 25 = 15x – 25 **|** -15x / *-25 = -25* (allgemein gültige Aussage) / **L** = **R**

h) *4(x+16) – 8(2x–5) – 27 = 4(x+10) – 8(2x+1) + 13* (Klammern auflösen) /
4x + 64 – 16x + 40 – 27 = 4x + 40 – 16x – 8 + 13 (Zusammenfassen) /
-12x + 77 = -12x + 45 **|** +12x / *77 = 45* (Widerspruch) / **L** = { }

i) *-77(2x+1) + 33(x–7) + 12(1–5x) = 82(5–3x) + 15(4x+9) + 3(x–26)* (Klammern auflösen) /
-154x – 77 + 33x – 231 + 12 – 60x = 410 – 246x + 60x + 135 + 3x – 78 (Zusammenfassen) / *-181x – 294 = -181x + 467* **|** +181x / *-294 = 467* (Widerspruch) / **L** = { }

IX.1 Mit dem Gauß-Algorithmus ergeben sich die folgenden Umformungen zur Dreiecksgestalt sowie die Lösungen:

a) Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -2x - 7y &= 6 \\ +10x + 1z &= 0 \\ +4y - 1z &= 1 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

x	*y*	*z*	*R.S.*
-2	-7	0	6
10	0	1	0
0	4	-1	1

1. Schritt: 1*(*2*) + 5*(*1*)

-2	-7	0	6
0	-35	1	30
0	4	-1	1

2. Schritt: 35*(*3*) + 4*(*2*)

-2	-7	0	6
0	-35	1	30
0	0	-31	155

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} -2x - 7y &= 6 \\ -35y + 1z &= 30 \\ -31z &= 155 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$z = -5$
$y = -1$
$x = 0.5$

---

b) Lineares Gleichungssystem:

$+ 2x - 2y - 1z = 5$

$+ 5x + 10y + 2z = -4$

$- 7x + 3y + 8z = 4$

Anfangstableau:

x	y	z	R.S.
2	-2	-1	5
5	10	2	-4
-7	3	8	4

1. Schritt: 2*(*2*) - 5*(*1*) / 2*(*3*) + 7*(*1*)

2	-2	-1	5
0	30	9	-33
0	-8	9	43

2. Schritt: 15*(*3*) + 4*(*2*)

2	-2	-1	5
0	30	9	-33
0	0	171	513

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 2x - 2y - 1z = 5$

$+ 30y + 9z = -33$

$+ 171z = 513$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$z = 3$
$y = -2$
$x = 2$

---

c) Lineares Gleichungssystem:

$+ 3x + 1y - 2z = -50$

$- 6x + 2y - 3z = 60$

$- 8x + 3y - 1z = 306$

Anfangstableau:

x	y	z	R.S.
3	1	-2	-50
-6	2	-3	60
-8	3	-1	306

1. Schritt: 1*(*2*) + 2*(*1*) / 3*(*3*) + 8*(*1*)

3	1	-2	-50
0	4	-7	-40
0	17	-19	518

2. Schritt: 4*(*3*) - 17*(*2*)

3 1 -2 | -50

0 4 -7 | -40

0 0 43 | 2752

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
+ 3x + 1y - 2z &= -50 \\
+ 4y - 7z &= -40 \\
+ 43z &= 2752
\end{aligned}
$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

z = 64
y = 102
x = -8

---

d) Lineares Gleichungssystem:

$$+\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z = -13$$

$$+\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = 13$$

$$-\frac{1}{2}x + 1y - \frac{1}{2}z = -33$$

Multiplikation der Zeilen: 6*(*1*) / 4*(*2*) / 2*(*3*) (um Ganzzahligkeit zu erreichen)

$$
\begin{aligned}
&+ 1x + 1y - 2z = -78 \\
&+ 2x - 1y + 1z = 52 \\
&- 1x + 2y - 1z = -66
\end{aligned}
$$

Anfangstableau:

1 1 -2 | -78

2 -1 1 | 52

-1 2 -1 | -66

1. Schritt: 1*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*3*) + 1*(*1*)

1 1 -2 | -78

0 -3 5 | 208

0 3 -3 | -144

2. Schritt: 1*(*3*) + 1*(*2*)

1 1 -2 | -78

0 -3 5 | 208

0 0 2 | 64

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
+ 1x + 1y - 2z &= -78 \\
- 3y + 5z &= 208 \\
+ 2z &= 64
\end{aligned}
$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$z = 32$
$y = -16$
$x = 2$

---

e) <u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ 2x - 1y + 1z + 4u = 3$

$+ 3x + 2y - 1z + 3u = 2$

$+ 4x + 3y - 3z + 6u = 1$

$- 5x + 7y + 5z - 1u = 0$

<u>Anfangstableau</u>:

$$\begin{array}{rrrr|r} x & y & z & u & R.S. \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & 6 & 1 \\ -5 & 7 & 5 & -1 & 0 \end{array}$$

<u>1. Schritt</u>: 2*(*2*) - 3*(*1*) / 1*(*3*) - 2*(*1*) / 2*(*4*) + 5*(*1*)

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & -6 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & -5 \\ 0 & 9 & 15 & 18 & 15 \end{array}$$

<u>2. Schritt</u>: 7*(*3*) - 5*(*2*) / 7*(*4*) - 9*(*2*)

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & 16 & -10 \\ 0 & 0 & 150 & 180 & 150 \end{array}$$

<u>3. Schritt</u>: 1*(*4*) + 15*(*3*)

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & 16 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 420 & 0 \end{array}$$

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{array}{rrrrl} +2x & -1y & +1z & +4u & = 3 \\ & +7y & -5z & -6u & = -5 \\ & & -10z & +16u & = -10 \\ & & & +420u & = 0 \end{array}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$u = 0$
$z = 1$
$y = 0$
$x = 1$

---

f) <u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+1x - 1y + 1z + 1u = 18$
$+2x + 1y - 2z + 1u = -50$
$+4x + 3y + 1z - 2u = 148$
$+8x - 7y - 5z + 3u = -6$

<u>Anfangstableau</u>:

x	*y*	*z*	*u*	*R.S.*
1	-1	1	1	18
2	1	-2	1	-50
4	3	1	-2	148
8	-7	-5	3	-6

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*3*) - 4*(*1*) / 1*(*4*) - 8*(*1*)

1	-1	1	1	18
0	3	-4	-1	-86
0	7	-3	-6	76
0	1	-13	-5	-150

<u>2. Schritt</u>: 3*(*3*) - 7*(*2*) / 3*(*4*) - 1*(*2*)

1	-1	1	1	18
0	3	-4	-1	-86
0	0	19	-11	830
0	0	-35	-14	-364

<u>3. Schritt</u>: 19*(*4*) + 35*(*3*)

1	-1	1	1	18
0	3	-4	-1	-86
0	0	19	-11	830
0	0	0	-651	22134

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{aligned} +1x - 1y + 1z + 1u &= 18 \\ +3y - 4z - 1u &= -86 \\ +19z - 11u &= 830 \\ -651u &= 22134 \end{aligned}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$u = -34$
$z = 24$
$y = -8$
$x = 20$

---

g) Das Auflösen der Klammern und das Umstellen innerhalb der Gleichungen führt auf das <u>lineare Gleichungssystem</u>:

$+4x - 4y + 3z + 3u = 17$
$-3x + 6y + 2z - 4u = -1$
$+5x + 5y - 4z + 1u = 7$
$+6x - 2y - 6z + 5u = 4$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrr|r} 4 & -4 & 3 & 3 & 17 \\ -3 & 6 & 2 & -4 & -1 \\ 5 & 5 & -4 & 1 & 7 \\ 6 & -2 & -6 & 5 & 4 \end{array}$$

1. Schritt: 4*(*2*) + 3*(*1*) / 4*(*3*) - 5*(*1*) / 2*(*4*) - 3*(*1*)

$$\begin{array}{rrrr|r} 4 & -4 & 3 & 3 & 17 \\ 0 & 12 & 17 & -7 & 47 \\ 0 & 40 & -31 & -11 & -57 \\ 0 & 8 & -21 & 1 & -43 \end{array}$$

2. Schritt: 3*(*3*) - 10*(*2*) / 3*(*4*) - 2*(*2*)

$$\begin{array}{rrrr|r} 4 & -4 & 3 & 3 & 17 \\ 0 & 12 & 17 & -7 & 47 \\ 0 & 0 & -263 & 37 & -641 \\ 0 & 0 & -97 & 17 & -223 \end{array}$$

3. Schritt: -263*(*4*) + 97*(*3*)

$$\begin{array}{rrrr|r} 4 & -4 & 3 & 3 & 17 \\ 0 & 12 & 17 & -7 & 47 \\ 0 & 0 & -263 & 37 & -641 \\ 0 & 0 & 0 & -882 & -3528 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} +4x & - & 4y & + & 3z & + & 3u & = & 17 \\ & + & 12y & + & 17z & - & 7u & = & 47 \\ & & & - & 263z & + & 37u & = & -641 \\ & & & & & - & 882u & = & -3528 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$u = 4$
$z = 3$
$y = 2$
$x = 1$

---

h) Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} +2x+3y+1z-1u+2v=-3 \\ +1x+2y-3z-2u-3v=5 \\ -1x+1y-2z+2u+3v=3 \\ +3x-3y-2z+3u+1v=-2 \\ +1x-2y+1z+3u-2v=1 \end{array}$$

Anfangstableau:

x	*y*	*z*	*u*	*v*	*R.S.*
2	3	1	-1	2	-3
1	2	-3	-2	-3	5
-1	1	-2	2	3	3
3	-3	-2	3	1	-2
1	-2	1	3	-2	1

<u>1. Schritt</u>: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 2*(*3*) + 1*(*1*) / 2*(*4*) - 3*(*1*) / 2*(*5*) - 1*(*1*)

2	3	1	-1	2	-3
0	1	-7	-3	-8	13
0	5	-3	3	8	3
0	-15	-7	9	-4	5
0	-7	1	7	-6	5

<u>2. Schritt</u>: 1*(*3*) - 5*(*2*) / 1*(*4*) + 15*(*2*) / 1*(*5*) + 7*(*2*)

2	3	1	-1	2	-3
0	1	-7	-3	-8	13
0	0	32	18	48	-62
0	0	-112	-36	-124	200
0	0	-48	-14	-62	96

<u>3. Schritt</u>: 2*(*4*) + 7*(*3*) / 2*(*5*) + 3*(*3*)

2	3	1	-1	2	-3
0	1	-7	-3	-8	13
0	0	32	18	48	-62
0	0	0	54	88	-34
0	0	0	26	20	6

<u>4. Schritt</u>: 27*(*5*) - 13*(*4*)

2	3	1	-1	2	-3
0	1	-7	-3	-8	13
0	0	32	18	48	-62
0	0	0	54	88	-34
0	0	0	0	-604	604

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{aligned}
+2x + 3y + 1z - 1u + 2v &= -3 \\
+1y - 7z - 3u - 8v &= 13 \\
+32z + 18u + 48v &= -62 \\
+54u + 88v &= -34 \\
-604v &= 604
\end{aligned}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$v = -1$
$u = 1$
$z = -1$
$y = 1$
$x = -1$

IX.2 Mit dem Gauß-Algorithmus ergeben sich die folgenden Umformungen zur Diagonalgestalt sowie die Lösungen:

a) Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrl} -10x & +1y & +1z & = 100 \\ +1x & +10y & -1z & = 1 \\ +100x & +1y & -1z & = 10 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} x & y & z & R.S. \\ -10 & 1 & 1 & 100 \\ 1 & 10 & -1 & 1 \\ 100 & 1 & -1 & 10 \end{array}$$

1. Schritt: 10*(*2*) + 1*(*1*) / 1*(*3*) + 10*(*1*)

$$\begin{array}{rrr|r} -10 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 101 & -9 & 110 \\ 0 & 11 & 9 & 1010 \end{array}$$

2. Schritt: 101*(*1*) - 1*(*2*) / 101*(*3*) - 11*(*2*)

$$\begin{array}{rrr|r} -1010 & 0 & 110 & 9990 \\ 0 & 101 & -9 & 110 \\ 0 & 0 & 1008 & 100800 \end{array}$$

3. Schritt: 504*(*1*) - 55*(*3*) / 112*(*2*) + 1*(*3*)

$$\begin{array}{rrr|r} -509040 & 0 & 0 & -509040 \\ 0 & 11312 & 0 & 113120 \\ 0 & 0 & 1008 & 100800 \end{array}$$

Teilen: (*1*):(-509040) / (*2*):11312 / (*3*):1008

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}$$

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrl} +1x & & & = 1 \\ & +1y & & = 10 \\ & & +1z & = 100 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x = 1$
$y = 10$
$z = 100$

---

b) Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrl} +2x_1 & -2x_2 & +1x_3 & = 7 \\ +5x_1 & +11x_2 & +2x_3 & = 14 \\ -9x_1 & +12x_2 & -3x_3 & = -21 \end{array}$$

Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 | R.S.

2 -2 1 | 7

5 11 2 | 14

-9 12 -3 | -21

<u>1. Schritt</u>: 2*(*2*) - 5*(*1*) / 2*(*3*) + 9*(*1*)

2 -2 1 | 7

0 32 -1 | -7

0 6 3 | 21

<u>2. Schritt</u>: 16*(*1*) + 1*(*2*) / 16*(*3*) - 3*(*2*)

32 0 15 | 105

0 32 -1 | -7

0 0 51 | 357

<u>3. Schritt</u>: 17*(*1*) - 5*(*3*) / 51*(*2*) + 1*(*3*)

544 0 0 | 0

0 1632 0 | 0

0 0 51 | 357

<u>Teilen</u>: (*1*):544 / (*2*):1632 / (*3*):51

1 0 0 | 0

0 1 0 | 0

0 0 1 | 7

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$+ 1x_1 = 0$$
$$+ 1x_2 = 0$$
$$+ 1x_3 = 7$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$x_3 = 7$

---

c) Gleichungsumformungen – die Variablen werden auf der linken Seite des Gleichungssystems zusammengefasst – ergeben das <u>lineare Gleichungssystem</u>:

$$+ 1x - 3y + 2z = 10$$
$$- 5x + 1y + 1z = -10$$
$$- 2x + 8y + 5z = 10$$

<u>Anfangstableau</u>:

x y z | R.S.

1 -3 2 | 10

-5 1 1 | -10

-2 8 5 | 10

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) + 5*(*1*) / 1*(*3*) + 2*(*1*)

1 -3 2 | 10

0 -14 11 | 40

0 2 9 | 30

2. Schritt: -14*(*1*) + 3*(*2*) / 7*(*3*) + 1*(*2*)

-14 0 5 | -20
0 -14 11 | 40
0 0 74 | 250

3. Schritt: 74*(*1*) - 5*(*3*) / 74*(*2*) - 11*(*3*)

-1036 0 0 | -2730
0 -1036 0 | 210
0 0 74 | 250

Teilen: (*1*):(-1036) / (*2*):(-1036) / (*3*):74

1 0 0 | 2.635135135135135
0 1 0 | -0.20270270270270271
0 0 1 | 3.3783783783783785

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
+1x \quad\quad\quad &= 2.635135135135135 \\
+1y \quad\quad &= -0.20270270270270271 \\
+1z &= 3.3783783783783785
\end{aligned}
$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

x = 2.635135135135135…
y = -0.20270270270270271…
z = 3.3783783783783785…

---

d) Aus:

$$
\begin{aligned}
+\tfrac{1}{6}x + \tfrac{5}{6}y - \tfrac{1}{2}z &= 1 \\
+x - \tfrac{1}{10}y + \tfrac{1}{5}z &= -1 \\
-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{8}y + \tfrac{1}{4}z &= 1
\end{aligned}
$$

ergibt sich nach Multiplikation mit dem jeweiligen Hauptnenner der drei Gleichungen (*1*) bis (*3*): 6·(*1*) / 10·(*2*) / 8·(*3*) das lineare Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
+\ 1x + 5y - 3z &= 6 \\
+10x - 1y + 2z &= -10 \\
-\ 4x + 1y + 2z &= 8
\end{aligned}
$$

Anfangstableau:

x y z | R.S.
1 5 -3 | 6
10 -1 2 | -10
-4 1 2 | 8

1. Schritt: 1*(*2*) - 10*(*1*) / 1*(*3*) + 4*(*1*) /

1 5 -3 | 6
0 -51 32 | -70
0 21 -10 | 32

2. Schritt: 51*(*1*) + 5*(*2*) / 17*(*3*) + 7*(*2*)

51 0 7 | -44
0 -51 32 | -70
0 0 54 | 54

3. Schritt: 54*(*1*) - 7*(*3*) / 27*(*2*) - 16*(*3*)

2754 0 0 | -2754
0 -1377 0 | -2754
0 0 54 | 54

Teilen: (*1*):2754 / (*2*):(-1377) / (*3*):54

1 0 0 | -1
0 1 0 | 2
0 0 1 | 1

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
+1x \quad\quad\quad &= -1 \\
+1y \quad\quad &= 2 \\
+1z &= 1
\end{aligned}
$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

x = -1
y = 2
z = 1

---

e) Wir haben als Gauß-Umformungen in Diagonalgestalt: Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
+2x - 1y + 1z + 4u &= 3 \\
+3x + 2y - 1z + 3u &= 2 \\
+4x + 3y - 3z + 6u &= 1 \\
-5x + 7y + 5z - 1u &= 0
\end{aligned}
$$

Anfangstableau:

x	*y*	*z*	*u*	*R.S.*
2	-1	1	4	3
3	2	-1	3	2
4	3	-3	6	1
-5	7	5	-1	0

1. Schritt: 2*(*2*) - 3*(*1*) / 1*(*3*) - 2*(*1*) / 2*(*4*) + 5*(*1*)

2 -1 1 4 | 3
0 7 -5 -6 | -5
0 5 -5 -2 | -5
0 9 15 18 | 15

2. Schritt: 7*(*1*) + 1*(*2*) / 7*(*3*) - 5*(*2*) / 7*(*4*) - 9*(*2*)

14 0 2 22 | 16
0 7 -5 -6 | -5
0 0 -10 16 | -10
0 0 150 180 | 150

<u>3. Schritt</u>: 5*(*1*) + 1*(*3*) / -2*(*2*) + 1*(*3*) / 1*(*4*) + 15*(*3*)

$$\begin{array}{rrrr|r} 70 & 0 & 0 & 126 & 70 \\ 0 & -14 & 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 16 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 420 & 0 \end{array}$$

<u>4. Schritt</u>: 10*(*1*) - 3*(*4*) / 15*(*2*) - 1*(*4*) / 105*(*3*) - 4*(*4*)

$$\begin{array}{rrrr|r} 700 & 0 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & -210 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1050 & 0 & -1050 \\ 0 & 0 & 0 & 420 & 0 \end{array}$$

<u>Teilen</u>: (*1*):700 / (*2*):(-210) / (*3*):(-1050) / (*4*):420

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{array}{llllll} +1x & & & & = & 1 \\ & +1y & & & = & 0 \\ & & +1z & & = & 1 \\ & & & +1u & = & 0 \end{array}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x = 1$
$y = 0$
$z = 1$
$u = 0$

---

f) Wir haben als Gauß-Umformungen in Diagonalgestalt: <u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{array}{l} +1x - 1y + 1z + 1u = 18 \\ +2x + 1y - 2z + 1u = -50 \\ +4x + 3y + 1z - 2u = 148 \\ +8x - 7y - 5z + 3u = -6 \end{array}$$

<u>Anfangstableau</u>:

$$\begin{array}{rrrr|r} x & y & z & u & R.S. \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 18 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -50 \\ 4 & 3 & 1 & -2 & 148 \\ 8 & -7 & -5 & 3 & -6 \end{array}$$

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*3*) - 4*(*1*) / 1*(*4*) - 8*(*1*)

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & -86 \\ 0 & 7 & -3 & -6 & 76 \\ 0 & 1 & -13 & -5 & -150 \end{array}$$

<u>2. Schritt</u>: 3*(*1*) + 1*(*2*) / 3*(*3*) - 7*(*2*) / 3*(*4*) - 1*(*2*)

3	0	-1	2	|	-32
0	3	-4	-1	|	-86
0	0	19	-11	|	830
0	0	-35	-14	|	-364

<u>3. Schritt</u>: 19*(*1*) + 1*(*3*) / 19*(*2*) + 4*(*3*) / 19*(*4*) + 35*(*3*)

57	0	0	27	|	222
0	57	0	-63	|	1686
0	0	19	-11	|	830
0	0	0	-651	|	22134

<u>4. Schritt</u>: 217*(*1*) + 9*(*4*) / -31*(*2*) + 3*(*4*) / -651*(*3*) + 11*(*4*)

12369	0	0	0	|	247380
0	-1767	0	0	|	14136
0	0	-12369	0	|	-296856
0	0	0	-651	|	22134

<u>Teilen</u>: (*1*):12369 / (*2*):(-1767) / (*3*):(-12369) / (*4*):(-651)

1	0	0	0	|	20
0	1	0	0	|	-8
0	0	1	0	|	24
0	0	0	1	|	-34

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{aligned} +1x \quad\quad\quad\quad &= 20 \\ +1y \quad\quad\quad &= -8 \\ +1z \quad\quad &= 24 \\ +1u &= -34 \end{aligned}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x = 20$
$y = -8$
$z = 24$
$u = -34$

IX.3 <u>Lösungen</u>: a) <u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{aligned} -\ 4x_1 + 9x_2 &= 24 \\ +\ 10x_1 - 22.5x_2 &= -60 \end{aligned}$$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	|	*R.S.*
-4	9	|	24
10	-22.5	|	-60

<u>1. Schritt</u>: 2*(*2*) + 5*(*1*)

-4	9	|	24
0	0	|	0

Teilen: (*1*):(-4)

1 -2.25 | -6
0 0 | 0

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$+ 1x_1 - 2.25x_2 = -6$$
$$0 = 0$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_2 = s$
$x_1 = -6 + 2.25s$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl s ▶ Lösungsmenge: **L** = {(-6+2.25s|s)| sϵ**R**}

---

b) Lineares Gleichungssystem:

$$+ 1x_1 + 2x_2 = 10$$
$$+ 2x_1 - 5x_3 = 8$$
$$+ 4x_2 + 5x_3 = 6$$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
1	2	0	10
2	0	-5	8
0	4	5	6

1. Schritt: 1*(*2*) - 2*(*1*)

1	2	0	10
0	-4	-5	-12
0	4	5	6

2. Schritt: 2*(*1*) + 1*(*2*) / 1*(*3*) + 1*(*2*)

2	0	-5	8
0	-4	-5	-12
0	0	0	-6

Teilen: (*1*):2 / (*2*):(-4)

1	0	-2.5	4
0	1	1.25	3
0	0	0	-6

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$+ 1x_1 - 2.5x_3 = 4$$
$$+ 1x_2 + 1.25x_3 = 3$$
$$0 = -6$$

▶ keine Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = { }

---

c) Lineares (unterbestimmtes) Gleichungssystem:

$$+ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 18$$
$$- 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -11$$

Anfangstableau:

$x_1\ x_2\ x_3\ |\ R.S.$

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & -4 & 18 \\ -3 & 2 & -2 & -11 \end{array}$$

1. Schritt: 2*(*2*) + 3*(*1*)

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & -4 & 18 \\ 0 & 16 & -16 & 32 \end{array}$$

2. Schritt: 4*(*1*) - 1*(*2*)

$$\begin{array}{rrr|r} 8 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 16 & -16 & 32 \end{array}$$

Teilen: (*1*):8 / (*2*):16

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}$$

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +1x_1 \qquad\qquad &= 5 \\ +1x_2 - 1x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_1 = 5$
$x_2 = 2 + t$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl t ▶ Lösungsmenge: **L** = {5|2+t|t)| t∊**R**}

---

d) Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} +1x_1 - 2x_2 + 1x_3 + 3x_4 &= -7 \\ +3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 1x_4 &= 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 1x_4 &= -9 \\ -1x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ |\ R.S.$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 & -7 \\ 3 & 5 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 5 & 1 & -9 \\ -1 & -7 & 3 & 4 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 3*(*1*) / 1*(*3*) + 2*(*1*) / 1*(*4*) + 1*(*1*)

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & -10 & 25 \\ 0 & -1 & 7 & 7 & -23 \\ 0 & -9 & 4 & 7 & -7 \end{array}$$

2. Schritt: 11*(*1*) + 2*(*2*) / 11*(*3*) + 1*(*2*) / 11*(*4*) + 9*(*2*)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 11 & 0 & 1 & 13 & -27 \\ 0 & 11 & -5 & -10 & 25 \\ 0 & 0 & 72 & 67 & -228 \\ 0 & 0 & -1 & -13 & 148 \end{array}\right)$$

3. Schritt: 72*(*1*) - 1*(*3*) / 72*(*2*) + 5*(*3*) / 72*(*4*) + 1*(*3*)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 792 & 0 & 0 & 869 & -1716 \\ 0 & 792 & 0 & -385 & 660 \\ 0 & 0 & 72 & 67 & -228 \\ 0 & 0 & 0 & -869 & 10428 \end{array}\right)$$

4. Schritt: 1*(*1*) + 1*(*4*) / -79*(*2*) + 35*(*4*) / 869*(*3*) + 67*(*4*)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 792 & 0 & 0 & 0 & 8712 \\ 0 & -62568 & 0 & 0 & 312840 \\ 0 & 0 & 62568 & 0 & 500544 \\ 0 & 0 & 0 & -869 & 10428 \end{array}\right)$$

Teilen: (*1*):792 / (*2*):(-62568) / (*3*):62568 / (*4*):(-869)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{llllcr} +1x_1 & & & & = & 11 \\ & +1x_2 & & & = & -5 \\ & & +1x_3 & & = & 8 \\ & & & +1x_4 & = & -12 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 11$
$x_2 = -5$
$x_3 = 8$
$x_4 = -12$

▶ eindeutige Lösung ▶ Lösungsmenge: **L** = {(11|-5|8|-12)}

---

e) Lineares (unterbestimmtes) Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llllllcr} +1x_1 & +2x_2 & -1x_3 & +3x_4 & & & = & 35 \\ +2x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & +11x_5 & & = & 85 \\ -1x_1 & +1x_2 & +4x_3 & -3x_4 & +3x_5 & & = & 10 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & R.S. \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 35 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 11 & 85 \\ -1 & 1 & 4 & -3 & 3 & 10 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*3*) + 1*(*1*)

1 2 -1 3 0 | 35

0 -1 5 -6 11 | 15

0 3 3 0 3 | 45

2. Schritt: 1*(*1*) + 2*(*2*) / 1*(*3*) + 3*(*2*)

1 0 9 -9 22 | 65

0 -1 5 -6 11 | 15

0 0 18 -18 36 | 90

3. Schritt: 2*(*1*) - 1*(*3*) / 18*(*2*) - 5*(*3*)

2 0 0 0 8 | 40

0 -18 0 -18 18 | -180

0 0 18 -18 36 | 90

Teilen: (*1*):2 / (*2*):(-18) / (*3*):18

1 0 0 0 4 | 20

0 1 0 1 -1 | 10

0 0 1 -1 2 | 5

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
+1x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 4x_5 &= 20 \\
+1x_2 \qquad\quad + 1x_4 - 1x_5 &= 10 \\
+1x_3 - 1x_4 + 2x_5 &= 5
\end{aligned}
$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_4 = u$
$x_5 = v$
$x_1 = 20 - 4v$
$x_2 = 10 - u + v$
$x_3 = 5 + u - 2v$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter sind die reellen Zahlen u, v ▶ Lösungsmenge: **L** = {20-4v|10-u+v|5+u-2v|u|v)| u,v∊**R**}

---

f) Lineares (unterbestimmtes) homogenes Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
+2x_1 - 1x_2 + 1x_3 - 8x_4 &= 0 \\
-5x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 20x_4 &= 0 \\
-7x_1 + 9x_2 - 9x_3 + 28x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 x_4 | *R.S.*

2 -1 1 -8 | 0

-5 4 -4 20 | 0

-7 9 -9 28 | 0

1. Schritt: 2*(*2*) + 5*(*1*) / 2*(*3*) + 7*(*1*)

2 -1 1 -8 | 0

0 3 -3 0 | 0

0 11 -11 0 | 0

2. Schritt: 3*(*1*) + 1*(*2*) / 3*(*3*) - 11*(*2*)

6 0 0 -24 | 0
0 3 -3 0 | 0
0 0 0 0 | 0

Teilen: (*1*):6 / (*2*):3

1 0 0 -4 | 0
0 1 -1 0 | 0
0 0 0 0 | 0

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +1x_1 \qquad\qquad\qquad - 4x_4 &= 0 \\ +1x_2 - 1x_3 \qquad &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_4 = u$
$x_1 = 4u$
$x_2 = t$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter sind die reellen Zahlen t, u ▶ Lösungsmenge: **L** = {(4u|t|t|u)| u,v∊**R**}

---

g) Lineares (überbestimmtes) Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} +5x_1 + 12x_2 + 13x_3 &= 30 \\ -2x_1 + 10x_2 - 23x_3 &= -15 \\ +12x_1 + 14x_2 + 49x_3 &= 75 \\ +20x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= 25 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 | *R.S.*
5 12 13 | 30
-2 10 -23 | -15
12 14 49 | 75
20 8 -3 | 25

1. Schritt: 5*(*2*) + 2*(*1*) / 5*(*3*) - 12*(*1*) / 1*(*4*) - 4*(*1*)

5 12 13 | 30
0 74 -89 | -15
0 -74 89 | 15
0 -40 -55 | -95

2. Schritt: 37*(*1*) - 6*(*2*) / 1*(*3*) + 1*(*2*) / 37*(*4*) + 20*(*2*)

185 0 1015 | 1200
0 74 -89 | -15
0 0 0 | 0
0 0 -3815 | -3815

Zeilentausch: (*3*) <-> (*4*)

185	0	1015	|	1200
0	74	-89	|	-15
0	0	-3815	|	-3815
0	0	0	|	0

<u>3. Schritt</u>: 109*(*1*) + 29*(*3*) / -3815*(*2*) + 89*(*3*)

20165	0	0	|	20165
0	-282310	0	|	-282310
0	0	-3815	|	-3815
0	0	0	|	0

<u>Teilen</u>: (*1*):20165 / (*2*):(-282310) / (*3*):(-3815)

1	0	0	|	1
0	1	0	|	1
0	0	1	|	1
0	0	0	|	0

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{aligned} +1x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ +1x_2 \qquad &= 1 \\ +1x_3 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x_1 = 1$
$x_2 = 1$
$x_3 = 1$

▶ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ <u>Lösungsmenge</u>: **L** = {(1|1|1)}

---

h) <u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{aligned} +5x_1 + 12x_2 - 4x_3 &= 1 \\ +8x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= -22 \\ -7x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 56 \end{aligned}$$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	x_3	|	*R.S.*
5	12	-4	|	1
8	7	-3	|	-22
-7	-4	5	|	56

<u>1. Schritt</u>: 5*(*2*) - 8*(*1*) / 5*(*3*) + 7*(*1*)

5	12	-4	|	1
0	-61	17	|	-118
0	64	-3	|	287

<u>2. Schritt</u>: 61*(*1*) + 12*(*2*) / 61*(*3*) + 64*(*2*)

305	0	-40	|	-1355
0	-61	17	|	-118
0	0	905	|	9955

3. Schritt: 181*(*1*) + 8*(*3*) / 905*(*2*) - 17*(*3*)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 55205 & 0 & 0 & -165615 \\ 0 & -55205 & 0 & -276025 \\ 0 & 0 & 905 & 9955 \end{array}\right)$$

Teilen: (*1*):55205 / (*2*):(-55205) / (*3*):905

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +1x_1 &= -3 \\ +1x_2 &= 5 \\ +1x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = -3$
$x_2 = 5$
$x_3 = 11$

▶ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = {(-3|5|11)}

---

i) Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} +4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 14 \\ +3x_1 + 5x_2 - 1x_3 - 1x_4 &= -2 \\ +2x_1 - 6x_2 + 1x_3 + 1x_4 &= 7 \\ +1x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -9 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & R.S. \\ 4 & -4 & 2 & 2 & 14 \\ 3 & 5 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -2 & -2 & -9 \end{array}$$

1. Schritt: 4*(*2*) - 3*(*1*) / 2*(*3*) - 1*(*1*) / 4*(*4*) - 1*(*1*)

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & -4 & 2 & 2 & 14 \\ 0 & 32 & -10 & -10 & -50 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -10 & -10 & -50 \end{array}$$

2. Schritt: 8*(*1*) + 1*(*2*) / 4*(*3*) + 1*(*2*) / 1*(*4*) - 1*(*2*)

$$\begin{array}{cccc|c} 32 & 0 & 6 & 6 & 62 \\ 0 & 32 & -10 & -10 & -50 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

3. Schritt: 5*(*1*) + 3*(*3*) / -1*(*2*) + 1*(*3*)

160 0 0 0 | 160
0 -32 0 0 | 0
0 0 -10 -10 | -50
0 0 0 0 | 0

Teilen: (*1*):160 / (*2*):(-32) / (*3*):(-10)

1 0 0 0 | 1
0 1 0 0 | 0
0 0 1 1 | 5
0 0 0 0 | 0

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +1x_1 &= 1 \\ +1x_2 &= 0 \\ +1x_3+1x_4 &= 5 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_4 = u$
$x_1 = 1$
$x_2 = 0$
$x_3 = 5 - u$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl u ▶ Lösungsmenge: **L** = {(1|0|5-u|u)| u∊**R**}

---

j) Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} +1x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 &= 4 \\ -1x_1 + 2x_2 + 1x_3 - 1x_4 &= 6 \\ +1x_1 - 1x_2 - 2x_3 - 1x_4 &= -2 \\ +2x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1x_4 &= -7 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 x_4 | *R.S.*
1 -1 1 2 | 4
-1 2 1 -1 | 6
1 -1 -2 -1 | -2
2 1 -1 1 | -7

1. Schritt: 1*(*2*) + 1*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*) / 1*(*4*) - 2*(*1*)

1 -1 1 2 | 4
0 1 2 1 | 10
0 0 -3 -3 | -6
0 3 -3 -3 | -15

2. Schritt: 1*(*1*) + 1*(*2*) / 1*(*4*) - 3*(*2*)

1 0 3 3 | 14
0 1 2 1 | 10
0 0 -3 -3 | -6
0 0 -9 -6 | -45

3. Schritt: 1*(*1*) + 1*(*3*) / 3*(*2*) + 2*(*3*) / -1*(*4*) + 3*(*3*)

1 0 0 0 | 8
0 3 0 -3 | 18
0 0 -3 -3 | -6
0 0 0 -3 | 27

4. Schritt: -1*(*2*) + 1*(*4*) / -1*(*3*) + 1*(*4*)

1 0 0 0 | 8
0 -3 0 0 | 9
0 0 3 0 | 33
0 0 0 -3 | 27

Teilen: (*2*):(-3) / (*3*):3 / (*4*):(-3)

1 0 0 0 | 8
0 1 0 0 | -3
0 0 1 0 | 11
0 0 0 1 | -9

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
+1x_1 \quad\quad\quad\quad &= 8 \\
+1x_2 \quad\quad &= -3 \\
+1x_3 \quad &= 11 \\
+1x_4 &= -9
\end{aligned}
$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 8$
$x_2 = -3$
$x_3 = 11$
$x_4 = -9$

▶ eindeutige Lösung des Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = {(8|-3|11|-9)}

---

k) Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
+2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 54 \\
-3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 33 \\
+5x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -42 \\
+1x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 4x_4 &= -73
\end{aligned}
$$

Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 x_4 | *R.S.*
2 -3 4 -2 | 54
-3 2 3 -3 | 33
5 -7 -2 4 | -42
1 -6 8 -4 | -73

1. Schritt: 2*(*2*) + 3*(*1*) / 2*(*3*) - 5*(*1*) / 2*(*4*) - 1*(*1*)

2 -3 4 -2 | 54
0 -5 18 -12 | 228
0 1 -24 18 | -354
0 -9 12 -6 | -200

2. Schritt: -5*(1) + 3*(2) / 5*(3) + 1*(2) / -5*(4) + 9*(2)

$$\begin{array}{rrrr|r} -10 & 0 & 34 & -26 & 414 \\ 0 & -5 & 18 & -12 & 228 \\ 0 & 0 & -102 & 78 & -1542 \\ 0 & 0 & 102 & -78 & 3052 \end{array}$$

3. Schritt: 3*(1) + 1*(3) / 17*(2) + 3*(3) / 1*(4) + 1*(3)

$$\begin{array}{rrrr|r} -30 & 0 & 0 & 0 & -300 \\ 0 & -85 & 0 & 30 & -750 \\ 0 & 0 & -102 & 78 & -1542 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1510 \end{array}$$

▶ keine Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = { }

---

l) Lineares (homogenes) Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} +7x_1 - 6x_2 + 8x_3 &= 0 \\ -5x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= 0 \\ +3x_1 + 5x_2 + 11x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & R.S. \\ 7 & -6 & 8 & 0 \\ -5 & 3 & -7 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: 7*(2) + 5*(1) / 7*(3) - 3*(1)

$$\begin{array}{rrr|r} 7 & -6 & 8 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & 0 \\ 0 & 53 & 53 & 0 \end{array}$$

2. Schritt: -3*(1) + 2*(2) / 9*(3) + 53*(2)

$$\begin{array}{rrr|r} -21 & 0 & -42 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Teilen: (1):(-21) / (2):(-9)

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +1x_1 \qquad + 2x_3 &= 0 \\ +1x_2 + 1x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_1 = -2t$
$x_2 = -t$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl t ▶ Lösungsmenge: **L** = {(-2t|-t|t)| t∈**R**}

---

m) <u>Lineares (homogenes) Gleichungssystem</u>:

$+ 32x_1 - 31x_2 + 30x_3 - 29x_4 = 0$

$- 28x_1 - 27x_2 + 26x_3 - 25x_4 = 0$

$+ 24x_1 - 23x_2 + 22x_3 + 21x_4 = 0$

$+ 20x_1 - 19x_2 + 18x_3 + 17x_4 = 0$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	x_3	x_4	R.S.
32	-31	30	-29	0
-28	-27	26	-25	0
24	-23	22	21	0
20	-19	18	17	0

<u>1. Schritt</u>: 8*(*2*) + 7*(*1*) / 4*(*3*) - 3*(*1*) / 8*(*4*) - 5*(*1*)

32	-31	30	-29	0
0	-433	418	-403	0
0	1	-2	171	0
0	3	-6	281	0

<u>2. Schritt</u>: -433*(*1*) + 31*(*2*) / 433*(*3*) + 1*(*2*) / 433*(*4*) + 3*(*2*)

-13856	0	-32	64	0
0	-433	418	-403	0
0	0	-448	73640	0
0	0	-1344	120464	0

<u>3. Schritt</u>: -14*(*1*) + 1*(*3*) / 224*(*2*) + 209*(*3*) / -1*(*4*) + 3*(*3*)

193984	0	0	72744	0
0	-96992	0	15300488	0
0	0	-448	73640	0
0	0	0	100456	0

<u>4. Schritt</u>: 29*(*1*) - 21*(*4*) / 29*(*2*) - 4417*(*4*) / 12557*(*3*) - 9205*(*4*)

5625536	0	0	0	0
0	-2812768	0	0	0
0	0	-5625536	0	0
0	0	0	100456	0

<u>Teilen</u>: (*1*):5625536 / (*2*):(-2812768) / (*3*):(-5625536) / (*4*):100456

1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+ 1x_1 = 0$

$+ 1x_2 = 0$

$+ 1x_3 = 0$

$+ 1x_4 = 0$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$

▶ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = {(0|0|0|0)}

---

n) Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} +1x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 &= 2 \\ +1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 1x_5 &= 0 \\ -1x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 1x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R.S.
1	1	-1	1	1	2
1	-1	-1	0	-1	0
-1	1	1	-1	0	0

1. Schritt: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) + 1*(*1*)

1	1	-1	1	1	2
0	-2	0	-1	-2	-2
0	2	0	0	1	2

2. Schritt: 2*(*1*) + 1*(*2*) / 1*(*3*) + 1*(*2*)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R.S.
2	0	-2	1	0	2
0	-2	0	-1	-2	-2
0	0	0	-1	-1	0

Spaltentausch: [3] <-> [4]

x_1	x_2	x_4	x_3	x_5	R.S.
2	0	1	-2	0	2
0	-2	-1	0	-2	-2
0	0	-1	0	-1	0

3. Schritt: 1*(*1*) + 1*(*3*) / 1*(*2*) - 1*(*3*)

2	0	0	-2	-1	2
0	-2	0	0	-1	-2
0	0	-1	0	-1	0

Teilen: (*1*):2 / (*2*):(-2) / (*3*):(-1)

1	0	0	-1	-0.5	1
0	1	0	0	0.5	1
0	0	1	0	1	0

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +1x_1 - 1x_3 - 0.5x_5 &= 1 \\ +1x_2 + 0.5x_5 &= 1 \\ +1x_4 + 1x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = u$
$x_5 = v$
$x_1 = 1 + u + 0.5v$
$x_2 = 1 - 0.5v$
$x_4 = - 1v$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter sind die reellen Zahlen u, v ▶ Lösungsmenge: **L** = {(1+u+0,5v|1-0,5v|u|-v|v)| u,v∈**R**}

IX.4 Lösungen: Die zu berechnenden Variablen heißen im Folgenden x_1, x_2, …

a) Lineares Gleichungssystem: Anfangstableau:

x_1	x_2	R.S.
5	-4	67
2	-3	38

1. Schritt: 5*(*2*) - 2*(*1*)

5	-4	67
0	-7	56

2. Schritt: -7*(*1*) + 4*(*2*)

-35	0	-245
0	-7	56

Teilen: (*1*):(-35) / (*2*):(-7)

1	0	7
0	1	-8

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 7$
$x_2 = -8$

▶ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = {(7|-8)}

---

b) Lineares Gleichungssystem: Anfangstableau:

x_1	x_2	R.S.
-6	9	24
12	-18	-48

1. Schritt: 1*(*2*) + 2*(*1*)

-6	9	24
0	0	0

Teilen: (*1*):(-6)

1	-1.5	-4
0	0	0

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_2 = s$
$x_1 = -4 + 1.5s$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl s ▶ Lösungsmenge: **L** = {(-4+1,5s|s)| s∈**R**}

---

c) Lineares (unterbestimmtes) Gleichungssystem: Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 | *R.S.*

2 -3 5 | -9

1 2 3 | 13

1. Schritt: 2*(*2*) - 1*(*1*)

2 -3 5 | -9

0 7 1 | 35

2. Schritt: 7*(*1*) + 3*(*2*)

14 0 38 | 42

0 7 1 | 35

Teilen: (*1*):14 / (*2*):7

1 0 $\frac{19}{7}$ | 3

0 1 $\frac{1}{7}$ | 5

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$

$x_1 = 3 - \frac{19}{7}t$

$x_2 = 5 - \frac{1}{7}t$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl t ▶ Lösungsmenge: **L** = {(3-$\frac{19}{7}$t|5-$\frac{1}{7}$t|t)| t∈**R**}

---

d) Lineares (überbestimmtes) Gleichungssystem: Anfangstableau:

x_1 x_2 | *R.S.*

4 -1 | 76

3 5 | -104

2 1 | -4

1. Schritt: 4*(*2*) - 3*(*1*) / 2*(*3*) - 1*(*1*)

4 -1 | 76

0 23 | -644

0 3 | -84

2. Schritt: 23*(*1*) + 1*(*2*) / 23*(*3*) - 3*(*2*)

92 0 | 1104

0 23 | -644

0 0 | 0

Teilen: (*1*):92 / (*2*):23

1 0 | 12

0 1 | -28

(0 0 | 0)

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$x_1 = 12$
$x_2 = -28$
▶ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = {(12|-28)}

---

e) Lineares Gleichungssystem: Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
2	-1	3	12
5	-4	-2	-11
8	-7	4	10

1. Schritt: 2*(*2*) - 5*(*1*) / 1*(*3*) - 4*(*1*)

2	-1	3	12
0	-3	-19	-82
0	-3	-8	-38

2. Schritt: -3*(*1*) + 1*(*2*) / -1*(*3*) + 1*(*2*)

-6	0	-28	-118
0	-3	-19	-82
0	0	-11	-44

3. Schritt: -11*(*1*) + 28*(*3*) / -11*(*2*) + 19*(*3*)

66	0	0	66
0	33	0	66
0	0	-11	-44

Teilen: (*1*):66 / (*2*):33 / (*3*):(-11)

1	0	0	1
0	1	0	2
0	0	1	4

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$x_3 = 4$
▶ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = {(1|2|4)}

---

f) Lineares Gleichungssystem: Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
1	-1	0	10
0	2	-1	-5
2	0	-1	15

1. Schritt: 1*(*3*) - 2*(*1*)

1	-1	0	10
0	2	-1	-5
0	2	-1	-5

2. Schritt: 2*(*1*) + 1*(*2*) / 1*(*3*) - 1*(*2*)

2 0 -1 | 15
0 2 -1 | -5
0 0 0 | 0

Teilen: (*1*):2 / (*2*):2

1 0 -0.5 | 7.5
0 1 -0.5 | -2.5
0 0 0 | 0

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_1 = 7.5 + 0.5t$
$x_2 = -2.5 + 0.5t$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl t ▶ Lösungsmenge: **L** = {(7,5+0,5t|-2,5+0,5t|t)| tϵ**R**}

---

g) Lineares Gleichungssystem: Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 | *R.S.*
5 -18 6 | 700
12 20 -3 | 1680
2 -9 11 | 280

1. Schritt: 5*(*2*) - 12*(*1*) / 5*(*3*) - 2*(*1*)

5 -18 6 | 700
0 316 -87 | 0
0 -9 43 | 0

2. Schritt: 158*(*1*) + 9*(*2*) / 316*(*3*) + 9*(*2*)

790 0 165 | 110600
0 316 -87 | 0
0 0 12805 | 0

3. Schritt: 2561*(*1*) - 33*(*3*) / 12805*(*2*) + 87*(*3*)

2023190 0 0 | 283246600
0 4046380 0 | 0
0 0 12805 | 0

Teilen: (*1*):2023190 / (*2*):4046380 / (*3*):12805

1 0 0 | 140
0 1 0 | 0
0 0 1 | 0

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 140$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$

▶ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = {(140|0|0)}

---

h) Lineares (unterbestimmtes) homogenes Gleichungssystem: Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	R.S.
1	-2	3	4	0
2	1	-3	-4	0
4	-3	1	-2	0

1. Schritt: 1*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*3*) - 4*(*1*)

1	-2	3	4	0
0	5	-9	-12	0
0	5	-11	-18	0

2. Schritt: 5*(*1*) + 2*(*2*) / 1*(*3*) - 1*(*2*)

5	0	-3	-4	0
0	5	-9	-12	0
0	0	-2	-6	0

3. Schritt: -2*(*1*) + 3*(*3*) / -2*(*2*) + 9*(*3*)

-10	0	0	-10	0
0	-10	0	-30	0
0	0	-2	-6	0

Teilen: (*1*):(-10) / (*2*):(-10) / (*3*):(-2)

1	0	0	1	0
0	1	0	3	0
0	0	1	3	0

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_4 = u$
$x_1 = -u$
$x_2 = -3u$
$x_3 = -3u$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl u ▶ Lösungsmenge: **L** = {(-u|-3u|-3u|u)| u∈**R**}

---

i) Lineares (überbestimmtes) Gleichungssystem: Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
4	0.25	1.5	12.25
2.5	3	4	35
3.5	5	2.5	17
0.6	0.45	0.2	2.05

Multiplizieren: 4*(*1*) / 2*(*2*) / 2*(*3*) / 20*(*4*)

x_1	x_2	x_3	R.S.
16	1	6	49
5	6	8	70
7	10	3	34
12	9	4	41

1. Schritt: 16*(*2*) - 5*(*1*) / 16*(*3*) - 7*(*1*) / 4*(*4*) - 3*(*1*)

16 1 6 | 49
0 91 98 | 875
0 153 6 | 201
0 33 -2 | 17

2. Schritt: 91*(*1*) - 1*(*2*) / 91*(*3*) - 153*(*2*) / 91*(*4*) - 33*(*2*)

1456 0 448 | 3584
0 91 98 | 875
0 0 -14448 | -115584
0 0 -3416 | -27328

3. Schritt: 129*(*1*) + 4*(*3*) / 1032*(*2*) + 7*(*3*) / -258*(*4*) + 61*(*3*)

187824 0 0 | 0
0 93912 0 | 93912
0 0 -14448 | -115584
0 0 0 | 0

Teilen: (*1*):187824 / (*2*):93912 / (*3*):(-14448)

1 0 0 | 0
0 1 0 | 1
0 0 1 | 8
0 0 0 | 0

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 0$
$x_2 = 1$
$x_3 = 8$

▶ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = {(0|1|8)}

---

j) Lineares Gleichungssystem: Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 x_4 | *R.S.*
3 5 7 -4 | 44
-2 4 7 5 | -14
5 -3 2 8 | -60
6 9 -8 3 | 18

1. Schritt: 3*(*2*) + 2*(*1*) / 3*(*3*) - 5*(*1*) / 1*(*4*) - 2*(*1*)

3 5 7 -4 | 44
0 22 35 7 | 46
0 -34 -29 44 | -400
0 -1 -22 11 | -70

2. Schritt: 22*(*1*) - 5*(*2*) / 11*(*3*) + 17*(*2*) / 22*(*4*) + 1*(*2*)

66 0 -21 -123 | 738
0 22 35 7 | 46
0 0 276 603 | -3618
0 0 -449 249 | -1494

3. Schritt: 92*(*1*) + 7*(*3*) / 276*(*2*) - 35*(*3*) / 276*(*4*) + 449*(*3*)

6072	0	0	-7095	42570
0	6072	0	-19173	139326
0	0	276	603	-3618
0	0	0	339471	-2036826

4. Schritt: 10287*(*1*) + 215*(*4*) / 10287*(*2*) + 581*(*4*) / 37719*(*3*) - 67*(*4*)

62462664	0	0	0	0
0	62462664	0	0	249850656
0	0	10410444	0	0
0	0	0	339471	-2036826

Teilen: (*1*):62462664 / (*2*):62462664 / (*3*):10410444 / (*4*):339471

1	0	0	0	0
0	1	0	0	4
0	0	1	0	0
0	0	0	1	-6

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 0$
$x_2 = 4$
$x_3 = 0$
$x_4 = -6$

▶ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = {(0|4|0|-6)}

---

k) Lineares Gleichungssystem: Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	*R.S.*
1	-2	1	-3	0
2	3	-5	1	0
3	1	-4	-2	0
4	2	-6	-2	0

1. Schritt: 1*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*3*) - 3*(*1*) / 1*(*4*) - 4*(*1*)

1	-2	1	-3	0
0	7	-7	7	0
0	7	-7	7	0
0	10	-10	10	0

2. Schritt: 7*(*1*) + 2*(*2*) / 1*(*3*) - 1*(*2*) / 7*(*4*) - 10*(*2*)

7	0	-7	-7	0
0	7	-7	7	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Teilen: (*1*):7 / (*2*):7

1	0	-1	-1	0
0	1	-1	1	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_4 = u$
$x_1 = t + u$
$x_2 = t - u$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter sind die reellen Zahlen t, u ▶ Lösungsmenge: **L** = {(t+u|t-u|t|u)| t,u∊**R**}

---

l) Lineares (unterbestimmtes) Gleichungssystem: Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 | *R.S.*
-1 -1 2 1 -2 | 5
2 1 1 3 1 | -6
3 2 -1 2 3 | 9

1. Schritt: 1*(*2*) + 2*(*1*) / 1*(*3*) + 3*(*1*)

-1 -1 2 1 -2 | 5
0 -1 5 5 -3 | 4
0 -1 5 5 -3 | 24

2. Schritt: -1*(*1*) + 1*(*2*) / -1*(*3*) + 1*(*2*)

1 0 3 4 -1 | -1
0 -1 5 5 -3 | 4
0 0 0 0 0 | -20

Teilen: (*2*):(-1)

1 0 3 4 -1 | -1
0 1 -5 -5 3 | -4
0 0 0 0 0 | -20

▶ keine Lösung des linearen Gleichungssystems ▶ Lösungsmenge: **L** = { }

---

m) Lineares Gleichungssystem: Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 x_4 | *R.S.*
2 -1 2 6 | -7
1 1 -3 -6 | -1
3 1 1 -2 | -2
5 2 1 -6 | -3

1. Schritt: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 2*(*3*) - 3*(*1*) / 2*(*4*) - 5*(*1*)

2 -1 2 6 | -7
0 3 -8 -18 | 5
0 5 -4 -22 | 17
0 9 -8 -42 | 29

2. Schritt: 3*(*1*) + 1*(*2*) / 3*(*3*) - 5*(*2*) / 1*(*4*) - 3*(*2*)

6 0 -2 0 | -16
0 3 -8 -18 | 5
0 0 28 24 | 26
0 0 16 12 | 14

3. Schritt: 14*(1) + 1*(3) / 7*(2) + 2*(3) / 7*(4) - 4*(3)

$$\begin{array}{rrrr|r} 84 & 0 & 0 & 24 & -198 \\ 0 & 21 & 0 & -78 & 87 \\ 0 & 0 & 28 & 24 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -6 \end{array}$$

4. Schritt: 1*(1) + 2*(4) / -2*(2) + 13*(4) / 1*(3) + 2*(4)

$$\begin{array}{rrrr|r} 84 & 0 & 0 & 0 & -210 \\ 0 & -42 & 0 & 0 & -252 \\ 0 & 0 & 28 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -6 \end{array}$$

Teilen: (1):84 / (2):(-42) / (3):28 / (4):(-12)

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -2.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = -2.5$
$x_2 = 6$
$x_3 = 0.5$
$x_4 = 0.5$

▶ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems
▶ Lösungsmenge: **L** = {(-2,5|6|0,5|0,5)}

---

n) Lineares Gleichungssystem: Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & R.S. \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{3}{10} & 1 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{11} & \frac{5}{22} & -\frac{1}{22} & \frac{23}{22} & 2 \end{array}$$

Multiplizieren: 9*(1) / 10*(2) / 16*(3) / 22*(4)

$$\begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & R.S. \\ 3 & -1 & 6 & 12 & 18 \\ 2 & 4 & -12 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 5 & 8 & 16 \\ 6 & 5 & -1 & 23 & 44 \end{array}$$

1. Schritt: 3*(2) - 2*(1) / 3*(3) - 1*(1) / 1*(4) - 2*(1)

$$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -1 & 6 & 12 & 18 \\ 0 & 14 & -48 & -15 & -6 \\ 0 & 7 & 9 & 12 & 30 \\ 0 & 7 & -13 & -1 & 8 \end{array}$$

<u>2. Schritt</u>: 14*(*1*) + 1*(*2*) / 2*(*3*) - 1*(*2*) / 2*(*4*) - 1*(*2*)

$$\begin{array}{rrrr|r} 42 & 0 & 36 & 153 & 246 \\ 0 & 14 & -48 & -15 & -6 \\ 0 & 0 & 66 & 39 & 66 \\ 0 & 0 & 22 & 13 & 22 \end{array}$$

<u>3. Schritt</u>: 11*(*1*) - 6*(*3*) / 11*(*2*) + 8*(*3*) / 3*(*4*) - 1*(*3*)

$$\begin{array}{rrrr|r} 462 & 0 & 0 & 1449 & 2310 \\ 0 & 154 & 0 & 147 & 462 \\ 0 & 0 & 66 & 39 & 66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

<u>Teilen</u>: (*1*):462 / (*2*):154 / (*3*):66

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{483}{154} & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{147}{154} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{22} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x_4 = u$

$x_1 = 5 - \frac{483}{154}u$

$x_2 = 3 - \frac{147}{154}u$

$x_3 = 1 - \frac{13}{22}u$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl u ▶ <u>Lösungsmenge</u>: **L** = {(5-$\frac{483}{154}$u | 3-$\frac{147}{154}$u | 1-$\frac{13}{22}$u | u) | u∈**R**}

X.1 <u>Lösungen</u>: a) Es liegt das <u>lineare Gleichungssystem</u> mit Parameter t als Endtableau vor:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t+4 & t-4 & t^2 & t^2-t+4 \\ 0 & t^2-4 & t+1 & -t^2+t+6 \\ 0 & 0 & t^2-t-6 & 2t^2-2t-12 \end{array}\right),$$

so dass wir gleich mit der Fallunterscheidung beginnen können. Wir betrachten zunächst die Diagonalelemente des Endtableaus:

<u>Fall 1</u>: $t^2-t-6=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}=0{,}5\pm\sqrt{6{,}25}=0{,}5\pm 2{,}5 \Leftrightarrow$ <u>t = -2, t = 3</u>: Wir haben somit die Unterfälle:

α) <u>t=-2</u>: Einsetzen von t in das Endtableau ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten damit eine mehrdeutige Lösung für t = -2.

β) <u>t=3</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 9 & 10 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten eine mehrdeutige Lösung für t = 3.

<u>Fall 2</u>: $t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow$ <u>t = ±2</u>: Der Fall t = -2 wurde schon behandelt. Für <u>t=2</u> gilt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 3III + 4II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

Wegen des Widerspruchs *0 = -8* ist hier die Lösungsmenge leer.

<u>Fall 3</u>: *t + 4 = 0* ⇔ <u>t = -4</u>: Das Endtableau stellt sich dar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & 16 & 24 \\ 0 & 12 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2II + 3I \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & 16 & 24 \\ 0 & 0 & 42 & 44 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 3III - II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & 16 & 24 \\ 0 & 0 & 42 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{array}\right)$$

Wegen des Widerspruchs *0 = 40* ist hier die Lösungsmenge leer.

<u>Fall 4</u>: <u>t≠-4, t≠±2, t≠3</u>: Hier liegt eindeutige Lösbarkeit vor.

---

b) Wir formen das <u>lineare Gleichungssystem</u> gemäß dem Gauß-Algorithmus um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t-1 & t & -1 & t-1 \\ 4t & 2t & 6 & 8t^2+4t \\ 16t-4 & 10t & 14 & 24t^2+16t-4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (t-1)II - 4tI \\ (t-1)III - (16t-4)I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t-1 & t & -1 & t-1 \\ 0 & -2t^2-2t & 10t-6 & 8t^3-8t \\ 0 & -6t^2-6t & 30t-18 & 24t^3-24t^2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - 3II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t-1 & t & -1 & t-1 \\ 0 & -2t^2-2t & 10t-6 & 8t^3-8t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Fall 1</u>: Das Diagonalelement der 3. Zeile des Endtableaus ist immer 0, so dass für jedes t϶**R** das lineare Gleichungssystem mehrdeutig lösbar ist. Dies gilt auch für die Fälle der zwei anderen Diagonalelemente, da hier keine Widersprüche auftreten.

<u>Fall 2</u>: Wir betrachten das Diagonalelement in der 2. Zeile des Endtableaus und erhalten: $-2t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow -2t(t-1) = 0$ ⇔ *-2t = 0, t–1 = 0* ⇔ <u>t = 0, t = 1</u>: Wir haben die Unterfälle:

α) <u>t=0</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es folgt die mehrdeutige Lösbarkeit.

β) <u>t=1</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es folgt die mehrdeutige Lösbarkeit.

<u>Fall 3</u> ist wegen *t – 1 = 0* ⇔ *t = 1* eben in Fall 2β) behandelt worden.

---

c) Wir stellen das <u>lineare Gleichungssystem</u> durch Zeilen- und Spaltentausch wie folgt um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3t-6 & 2t \\ t-2 & 0 & 8 & t+5 \\ -t & t^2+1 & t & 5 \end{array}\right) I \leftrightarrow III \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -t & t^2+1 & t & 5 \\ t-2 & 0 & 8 & t+5 \\ 0 & 0 & 3t-6 & 2t \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} t^2+1 & -t & t & 5 \\ 0 & t-2 & 8 & t+5 \\ 0 & 0 & 3t-6 & 2t \end{array}\right)$$

$$I \leftrightarrow II$$

und erhalten das Gleichungssystem in Dreiecksgestalt. Die Betrachtung der Diagonalelemente des Endtableaus führt auf:

<u>Fall 1</u>: *3t – 6 = 0* ⇔ *3t = 6* ⇔ <u>t = 2</u>: Mit dem Endtableau

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

folgt ein Widerspruch und damit die Unlösbarkeit des Gleichungssystems für dieses t.

<u>Fall 2</u> ist wegen *t – 2 = 0* ⇔ <u>t = 2</u> identisch mit Fall 1, <u>Fall 3</u> tritt wegen $t^2 + 1 > 0$ erst gar nicht auf. Es bleibt noch der <u>Fall 4</u>: <u>t ≠ 2</u>: Hier hat das lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung.

---

d) Wir formen das <u>lineare homogene Gleichungssystem</u> mit dem Gauß-Algorithmus um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ t-1 & 2t & t+1 & 0 \\ t^2-1 & t+1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-(t-1)I \\ III-(t^2-1)I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & t+1 & 2 & 0 \\ 0 & -t^2+t+2 & -t^2+1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III+(t-2)II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & t+1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -t^2+2t-3 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Fall 1</u>: Wegen $-t^2+2t-3=0 \;\Leftrightarrow\; t^2-2t+3=0 \;\Leftrightarrow\; t=1\pm\sqrt{1-3}=1\pm\sqrt{-2}$ tritt dieser Fall nicht in Erscheinung.

<u>Fall 2</u>: *t + 1 = 0* ⇔ <u>t = -1</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2III+3II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

so dass hier eine mehrdeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems folgt.

Fall 3: $t \neq -1$: Das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar (mit der trivialen Lösung aus lauter Nullen des homogenen Gleichungssystems).

---

e) Anwendung des Gauß-Algorithmus ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2t & 6t-4 \\ 1 & 1 & 2t-2 & 6t-2 \\ t & t^3 & 16 & -12t \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-I \\ III-tI \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2t & 6t-4 \\ 0 & -t+1 & -2 & 2 \\ 0 & t^3-t^2 & -2t^2+16 & -6t^2-8t \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III+t^2II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2t & 6t-4 \\ 0 & -t+1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4t^2+16 & -4t^2-8t \end{array}\right)$$

Wir unterscheiden nach den Diagonalelementen des Endtableaus die Fälle:

Fall 1: $-4t^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow 16 = 4t^2 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow$ $t = \pm 2$: Die Unterfälle sind:

α) t=-2: Einsetzen in das Endtableau ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & -16 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und damit eine mehrdeutige Lösbarkeit.

β) t=2: Einsetzen in das Endtableau ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{array}\right)$$

und damit eine leere Lösungsmenge.

Fall 2: $-t + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $t = 1$: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III+6II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir haben somit eine mehrdeutige Lösung für t = 1.

Fall 3: $t \neq \pm 2, t \neq 1$: Hier hat das lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung.

X.2 Lösungen: a) Das Anfangstableau des linearen Gleichungssystems ist mit den Umformungen des Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 8 & a \\ 10 & 5 & 2b \end{array}\right) 2II+5I \quad \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 8 & a \\ 0 & 50 & 5a+4b \end{array}\right) 2II+5I$$

Das lineare Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar. Lösungen sind:

$$x_2 = \frac{5a+4b}{50} = 0{,}1a + 0{,}08b$$

$$-4x_1 + 0{,}8a + 0{,}64b = a \Leftrightarrow x_1 = \frac{0{,}2a - 0{,}64b}{-4} = -0{,}05a + 0{,}16b$$

Die Lösungsmenge ist also für alle reellen a und b: $L_{a\in R, b\in R} = \left\{ \begin{pmatrix} -0{,}05a + 0{,}16b \\ 0{,}1a + 0{,}08b \end{pmatrix} \right\}$

---

b) Das Anfangstableau des linearen Gleichungssystems mit Parameter k ist mit den Umformungen des Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 7 & -1 & k & 0{,}5 \\ 5 & 2k & -4 & 0{,}5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2II-7I \\ 2III-5I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 19 & 2k-35 & 1 \\ 0 & 4k+15 & -33 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 19III-(4k+15)II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 19 & 2k-35 & 1 \\ 0 & 0 & -8k^2+110k-102 & -4k+4 \end{array}\right)$$

Das einzige Diagonalelement, das von k abhängig ist, ist das der letzten Zeile des Endtableaus. Also:

Fall 1: $-8k^2+110k-102=0 \Leftrightarrow k^2-13{,}75k+12{,}75=0 \Leftrightarrow k=6{,}875\pm\sqrt{6{,}875^2-12{,}75} \Leftrightarrow$ $k=6{,}875\pm5{,}875 \Leftrightarrow$ k = 1, k = 12,75: Es ergeben sich die Unterfälle:

α) k=1: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 19 & -33 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die mehrdeutige Lösungsmenge hierzu folgt aus: $x_3 = s$, $x_2 = \frac{1}{19}+\frac{33}{19}s$, $x_1 = \frac{3}{38}+\frac{2}{19}s$ als:

$$L_{k=1} = \left\{ \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s}{19}\begin{pmatrix} 2 \\ 33 \\ 19 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$$ mit reellem Parameter s.

β) k=12,75: Hier lautet das Endtableau:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 19 & -9{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -47 \end{array}\right),$$

woraus der Widerspruch $0 = -47$ folgt und damit die leere Lösungsmenge: $L_{k=12,75} = \{\,\}$.

Fall 2: <u>k ≠ 1, k ≠ 12,75</u>: Hier ergibt sich als eindeutige Lösung:

$$x_3 = \frac{-4k+4}{-8k^2+110k-102} = \frac{-4(k-1)}{-8(k-1)(k-12{,}75)} = \frac{1}{2(k-12{,}75)} = \frac{1}{2k-25{,}5}$$

$$x_2 = \frac{1}{19} - \frac{2k-35}{19(2k-25{,}5)}$$

$$x_1 = \frac{3}{38} - \frac{3k-5}{19(2k-25{,}5)}$$

und daher als Lösungsmenge: $L_{k\neq 1, k\neq 12{,}75} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{38} - \frac{3k-5}{19(2k-25{,}5)} \\ \frac{1}{19} - \frac{2k-35}{19(2k-25{,}5)} \\ \frac{1}{2k-25{,}5} \end{pmatrix} \right\}$

---

c) Das <u>Anfangs-</u> bzw. <u>Endtableau</u> des <u>linearen Gleichungssystems</u> mit Parameter t liegt in Dreiecksgestalt vor, so dass wir keine Gauß-Umformungen durchzuführen brauchen. Wir betrachten zunächst die von t abhängigen Diagonalelemente:

<u>Fall 1</u>: $t + 5 = 0 \Leftrightarrow$ <u>$t = -5$</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -10 & 4 & 5 \\ 0 & 25 & -5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die mehrdeutige Lösung ergibt sich mit dem reellen Parameter r aus: $x_3 = r$, $x_2 = 1 + 0{,}2r$, $x_1 = -3 + 0{,}4r$, so dass die Lösungsmenge $L_{t=-5} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| r \in R \right\}$ ist.

<u>Fall 2</u>: $t^2 = 0 \Leftrightarrow$ <u>$t = 0$</u>: Der Fall gilt für die Diagonalelemente t^2 und t des Endtableaus. Wir haben dann:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -25 \end{array}\right) 4III - 5I \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) 4III - 5I$$

Für die mehrdeutige Lösung brauchen wir wegen den zwei Nullzeilen im Tableau zwei reelle Parameter r und s (man spricht auch von zwei <u>Freiheitsgraden</u> der Lösungsmenge), also: $x_3 = -5$, $x_2 = r$, $x_1 = s$. Lösungsmenge ist damit. $L_{t=0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| r, s \in R \right\}$.

<u>Fall 3</u>: <u>t≠-5, t≠0</u>: Die eindeutige Lösung dieses Falls ist:

$$x_3 = \frac{t^2-25}{t+5} = t-5\,,\ x_2 = \frac{-5t-t(t-5)}{t^2} = \frac{-t^2}{t^2} = -1,\ x_1 = \frac{(t^2-20)-4(t-5)+2t}{t} = \frac{t^2-2t}{t} = t-2$$

Die Lösungsmenge ist: $L_{t\neq -5, t\neq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} t-2 \\ 1 \\ t-5 \end{pmatrix} \right\}$.

---

d) Eine etwas andere Vorgehensweise bietet die folgende Lösung: Lineares Gleichungssystem mit Parameter $t \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} tx_1 + 2x_2 \quad &= 3t \\ -tx_2 + x_3 &= 0 \\ 8x_1 + 2tx_2 - x_3 &= t^2+8 \end{aligned}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus ergeben sich das Anfangstableau und die Umformungen:

x_1	x_2	x_3	rechte Seite	
t	2	0	3t	
0	-t	1	0	
8	2t	-1	t^2+8	$8\cdot(1) - t\cdot(3)$
t	2	0	3t	
0	-t	1	0	
0	$16-2t^2$	t	$16t-t^3$	$(16-2t^2)\cdot(2) + t\cdot(3)$
t	2	0	3t	
0	-t	1	0	
0	0	$16-t^2$	$t^2(16-t^2)$	Endtableau

Die Diagonalelemente des Endtableaus sind auf Nullen zu untersuchen (Division durch 0 vermeiden): Wir beginnen mit dem Diagonalelement oben rechts und haben den

Fall 1: t=0: Das Endtableau wird durch Einsetzen von t=0 zu:

x_1	x_2	x_3		
0	2	0	0	
0	0	1	0	
0	0	16	0	$16\cdot(2) - (3)$
0	2	2	0	
0	0	1	0	
0	0	0	0	mehrdeutige Lösung

Es gilt dann mit Parameter r: $x_1=r$; $x_3=0$; $2x_2=0 \Leftrightarrow x_2=0$. Als Lösung ergibt sich für t=0: $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbf{R}$. Das mittlere Diagonalelement im Endtableau ist ebenfalls 0, wenn t=0 ist, führt also auf denselben Fall. Für das 3. Diagonalelement ergibt sich der

Fall 2: $16-t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 16 \Leftrightarrow$ $t = \pm 4$, und damit gelten die Unterfälle:

α) t=-4: Einsetzen von t=-4 ins Endtableau führt zu:

-4	2	0	-12	
0	4	1	0	
0	0	0	0	mehrdeutige Lösung

Mit Parameter r folgt: $x_3=r$; $4x_2+r = 0 \Leftrightarrow 4x_2 = -r \Leftrightarrow x_2 = -\frac{r}{4}$; $-4x_1-\frac{r}{2} = -12 \Leftrightarrow x_1 = 3-\frac{r}{8}$. Lösung ist hier: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3-\frac{r}{8} \\ -\frac{r}{4} \\ r \end{pmatrix}$, $r \in \mathbf{R}$.

β) t=4: Es ergibt sich analog aus dem Endtableau:

4	2	0	12	
0	-4	1	0	
0	0	0	0	mehrdeutige Lösung

Mit Parameter r folgt: x_3=r; $-4x_2$+r = 0 ⇔ $4x_2$ = r ⇔ $x_2 = \frac{r}{4}$; $4x_1+\frac{r}{2} = 12$ ⇔ $x_1 = 3-\frac{r}{8}$. Lösung ist hier: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3-\frac{r}{8} \\ \frac{r}{4} \\ r \end{pmatrix}$, r∈**R**.

Wir betrachten noch die restlichen t, wo alle Diagonalelemente ungleich 0 sind, also den <u>Fall 3</u>: <u>t≠0, t≠-4, t≠4</u>: Wir verwenden das Endtableau:

t	2	0	3t	
0	-t	1	0	
0	0	$16-t^2$	$t^2(16-t^2)$	eindeutige Lösung

Es gilt: $(16-t^2)x_3 = t^2(16-t^2) \Leftrightarrow x_3 = t^2 - tx_2 + t^2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = t$; $tx_1 + 2t = 3t \Leftrightarrow tx_1 = t \Leftrightarrow x_1 = 1$.

Lösung ist hier: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Wir fassen noch die Lösungen und Lösungsmengen zusammen:

Fall:	Lösung:
t≠0, t≠-4, t≠4	$L_{t\neq 0, t\neq \pm 4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \right\}$
t=-4	$L_{t=-4} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \middle\vert r \in R \right\}$
t=0	$L_{t=0} = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle\vert r \in R \right\}$
t=4	$L_{t=4} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \middle\vert r \in R \right\}$

---

e) Dreiecksgestalt und <u>Endtableau</u> des <u>linearen Gleichungssystems</u> mit Parameter t sind:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t^2-9 & 2t & 0 & t^2+4t-9 \\ 0 & t^2+4t & t+2 & 2t^2+9t+3 \\ 0 & 0 & t^2+3t+2 & t^2+4t+3 \end{array}\right)$$

Wir untersuchen alle von t abhängigen Diagonalelemente.

<u>Fall 1</u>: $t^2+3t+2=0 \Leftrightarrow t=-1{,}5\pm\sqrt{2{,}25-2}=-1{,}5\pm\sqrt{0{,}25}=-1{,}5\pm0{,}5 \Leftrightarrow$ <u>t = -2, t = -1</u>: Es ergeben sich die Unterfälle:

α) <u>t=-2</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & 0 & -13 \\ 0 & -4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Aus der 3. Zeile der obigen Matrix folgt der Widerspruch *0 = -1*, die Lösungsmenge ist daher leer: $L_{t=-2}=\{\,\}$.

β) <u>t=-1</u>: Wir erhalten nach Einsetzen von t = -1 in das Endtableau:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und damit die mehrdeutige Lösung mit Parameter s: $x_3 = s$, $x_2=\frac{-4-s}{-3}=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}s$, $x_1=\frac{-36+8+2s}{-8\cdot3}=\frac{-28+2s}{-8\cdot3}=\frac{-14+s}{-4\cdot3}=\frac{-14+s}{-12}=\frac{7}{6}-\frac{1}{12s}$ und weiter die Lösungsmenge:

$$L_{t=-1}=\left\{\begin{pmatrix} 7/6 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -1/12 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s\in R\right\}.$$

<u>Fall 2</u>: $t^2+4t=0 \Leftrightarrow t(+4)=0 \Leftrightarrow$ *t = 0, t+4 = 0* $\Leftrightarrow$ <u>t = 0, t = -4</u>: Wir unterscheiden die Unterfälle:

α) <u>t=-4</u>: Mit dem Tableau

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -8 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) III+3II \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -8 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

erhalten wir die mehrdeutige Lösung: $x_3 = 0$, $x_2 = s$, $x_1=\frac{-9+8s}{7}=-\frac{9}{7}+\frac{8}{7}s$ und damit die Lösungsmenge: $L_{t=-4}=\left\{\begin{pmatrix} -9/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 8/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s\in R\right\}$ wieder mit reellem Parameter s.

<u>Fall 3</u>: $t^2-9=0 \Leftrightarrow t^2=9 \Leftrightarrow$ <u>t = ±3</u>: Die Unterfälle sind:

α) <u>t=-3</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & 0 & -12 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) 2II-I \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) III+II \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

so dass gilt: $x_3 = 0$, $x_2 = 2$, $x_1 = s$ mit Parameter s. Die mehrdeutige Lösungsmenge lautet:

$$L_{t=-4} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}.$$

β) <u>t=3</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & 21 & 5 & 48 \\ 0 & 0 & 20 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 2II-7I \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 10 & 96 \\ 0 & 0 & 20 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ III-2II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 10 & 96 \\ 0 & 0 & 0 & -168 \end{array}\right)$$

und führt damit wegen des Widerspruchs 0 = -168 auf die leere Lösungsmenge: $L_{t=3}$ = { }.

Wir betrachten nun die t, für die alle Diagonalelemente des Endtableaus ungleich 0 sind.

<u>Fall 4</u>: <u>t ≠ -4, t ≠ ±3, t ≠ -2, t ≠ -1, t ≠ 0</u>: Die für jedes t eindeutige Lösung bestimmt sich als:

$$x_3 = \frac{t^2+4t+3}{t^2+3t+2} = \frac{(t+1)(t+3)}{(t+1)(t+2)} = \frac{t+3}{t+2}$$

$$(t^2+4t)x_2 + (t+2)\frac{t+3}{t+2} = 2t^2+9t+3 \Leftrightarrow (t^2+4t)x_2 + t + 3 = 2t^2+9t+3 \Leftrightarrow (t^2+4t)x_2 = 2t^2+8t$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{2t^2+8t}{t^2+4t} = \frac{2(t^2+4t)}{t^2+4t} = 2$$

$$(t^2-9)x_1 + 4t = t^2+4t-9 \Leftrightarrow (t^2-9)x_1 = t^2-9 \Leftrightarrow x_1 = \frac{t^2-9}{t^2-9} = 1$$

Lösungsmenge ist: $L_{t\neq-4,t\neq\pm3,t\neq-2,t\neq-1,t\neq0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t+3/_{t+2} \end{pmatrix} \right\}$

---

f) Wir haben für das lineare Gleichungssystem das <u>Anfangstableau</u>:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & r-2 & 0 & r^2-4 \\ 0 & 0 & r^2-3r+2 & 4r^2-12r+8 \end{array}\right),$$

das wegen der Dreiecksgestalt zugleich <u>Endtableau</u> ist. Die vom Parameter r abhängigen Diagonalemente führen auf:

<u>Fall 1</u>: $r^2-3r+2=0 \Leftrightarrow r = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25-2} = 1{,}5 \pm 0{,}5 \Leftrightarrow$ <u>r = 1, r = 2</u>: Unterfälle sind:

α) <u>r=1</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

mit den mehrdeutigen Lösungen: *x_3 = s, x_2 = 3, x_1 = -2 – s* bei reellem Parameter s und der Lösungsmenge: $L_{r=1} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}.$

β) r=2: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

so dass mit den zwei reellen Parametern (zwei Freiheitsgrade) s_1 und s_2 gilt: $x_3 = s_1$, $x_2 = s_2$, $x_1 = 1 - s_1 - s_2$. Lösungsmenge ist hier: $L_{r=2} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s_1, s_2 \in R \right\}$.

Das Diagonalelement r – 2 ist schon wegen r = 2 im Fall 1β) enthalten. Somit bleibt noch übrig:

Fall 2: $r \neq 1$, $r \neq 2$: Die eindeutige Lösung bestimmt laut Endtableau als:

$x_3 = \frac{4r^2 - 12r + 8}{r^2 - 3r + 2} = \frac{4(r^2 - 3r + 2)}{r^2 - 3r + 2} = 4$, $x_2 = \frac{r^2 - 4}{r - 2} = \frac{(r-2)(r+2)}{r-2} = r + 2$, $x_1 = -5 - r$.

Die Lösungsmenge ist: $L_{r \neq 1, r \neq 2} = \left\{ \begin{pmatrix} -5 - r \\ r + 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

---

g) Wir formen für das lineare (homogene) Gleichungssystem mit Parameter t das Anfangs- in das Endtableau um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & t & 0 \\ 1 & t+1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2II - I \\ 2III - I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2t+1 & 0 \\ 0 & 2t & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2III - tII \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2t+1 & 0 \\ 0 & 0 & -2t^2 - t + 10 & 0 \end{array}\right)$$

Nur das Diagonalelement der 3. Zeile des Endtableaus ist von t abhängig, also:

Fall 1: $-2t^2 - t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2) \cdot 10}}{2 \cdot (-2)} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{-4} = \frac{1 \pm 9}{-4} \Leftrightarrow$ t = -2,5, t = 2:

α) t=-2,5: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die mehrdeutige Lösungsmenge ist bei freiem reellen Parameter s wegen: $x_3 = s$, $x_2 = s$,

$x_1 = -0{,}5s$: $L_{t=-2,5} = \left\{ s\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$.

β) <u>t=2</u>: Mit dem Endtableau:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

haben wir: $x_3 = s$, $x_2 = -1{,}25s$, $x_1 = 1{,}75s$ als Lösungen und: $L_{t=2} = \left\{ s\begin{pmatrix} 1{,}75 \\ -1{,}25 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$ als Lösungsmenge.

Fall 2: <u>t ≠ -2,5, t ≠ 2</u>: Wir erhalten, da alle Diagonalelemente im Endtableau ungleich 0 sind, folgerichtig die eindeutig bestimmte, triviale Lösung des homogenen Gleichungssystems: $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$. Lösungsmenge ist mithin: $L_{t\neq-2,5,t\neq2} = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

---

h) Wir formen das lineare Gleichungssystem mit Parameter t nach dem Gauß-Algorithmus um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2t & 6t-4 \\ 1 & 1 & 2t-2 & 6t-2 \\ t & t^3 & 16 & -12t \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - I \\ III - tI \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2t & 6t-4 \\ 0 & -t+1 & -2 & 2 \\ 0 & t^3-t^2 & -2t^2+16 & -6t^2-8t \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + t^2 I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2t & 6t-4 \\ 0 & -t+1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4t^2+16 & -4t^2-8t \end{array}\right)$$

Die Sonderfälle für die Diagonalelemente sind:

Fall 1: $-4t^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow 16 = 4t^2 \Leftrightarrow 4 = t^2 \Leftrightarrow$ <u>$t = \pm 2$</u>:

α) <u>t=-2</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & -16 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die mehrdeutige Lösung ist mit reellem Parameter s: $x_3 = s$, $x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}s$, $x_1 = \frac{52}{3} + \frac{16}{3}s$,

die Lösungsmenge lautet: $L_{t=-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 52/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 16/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$.

β) t=2: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{array}\right)$$

Wegen der 3. Gleichung *0 = -32* ist die Lösungsmenge: $L_{t=2}$ = { }; es liegt hier also Unlösbarkeit des Gleichungssystems vor.

Fall 2: *-t + 1 = 0* ⇔ t = 1: Aus dem Endtableau entsteht durch Einsetzen von t = -1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{array}\right) III + 6II \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die mehrdeutigen Lösungen sind: $x_3 = -1$, $x_2 = s$, $x_1 = 4 - s$, die Lösungsmenge lautet daher: $L_{t=1} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$.

Die Diagonalelemente seinen nun alle ungleich 0, also:

Fall 3: t ≠ ±2, t ≠ 1: Division durch die Diagonalelemente führt auf:

$$x_3 = \frac{-4t^2 - 8t}{-4t^2 + 16} = \frac{-4t(t+2)}{-4(t+2)(t-2)} = \frac{1}{t-2}$$

$$x_2 = \frac{2 + \frac{2}{t-2}}{-t+1} = \frac{2(t-2)+2}{(-t+1)(t-2)} = \frac{2t-2}{(-t+1)(t-2)} = \frac{2(t-1)}{-(t-1)(t-2)} = \frac{-2}{t-2}$$

$$x_1 = 6t - 4 - \frac{2t}{t-2} + \frac{2t}{t-2} = 6t - 4,$$

so dass sich die Lösungsmenge $L_{t\neq\pm2, t\neq1} = \left\{ \begin{pmatrix} 6t-4 \\ -2/(t-2) \\ 1/(t-2) \end{pmatrix} \right\}$ ergibt.

---

i) Wir formen das lineare Gleichungssystem gemäß dem Gauß-Algorithmus wie folgt um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -t \\ 0 & 1-t & 2-t & 2t-t^2 \\ 0 & 1 & 2-t & t \end{array}\right)(1-t)III - II$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -t \\ 0 & 1-t & 2-t & 2t-t^2 \\ 0 & 0 & -t^2+2t & -t \end{array}\right)$$

Da bei der Gauß-Umformung die 3. Gleichung mit (1-t) multipliziert wurde, ist zunächst der folgende Fall zu untersuchen:

Fall 1: *1 – t = 0* ⇔ t = 1: Einsetzen von t = 1 in das Anfangstableau führt auf:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) II \leftrightarrow III \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) II \leftrightarrow III$$

Das lineare Gleichungssystem ist hier eindeutig lösbar mit: $x_3 = 1$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ und der Lösungsmenge: $L_{t=1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Nun schauen wir uns noch das von t abhängige 3. Diagonalelement an:

<u>Fall 2</u>: $-t^2 + 2t = 0$ ⇔ $-t(t+2) = 0$ ⇔ $-t = 0$, $t+2 = 0$ ⇔ <u>t = 0, t = -2</u>:

α) <u>t=-2</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

so dass wegen des Widerspruchs $0 = 2$ die Lösungsmenge $L_{t=-2} = \{\ \}$ heißt.

β) <u>t=0</u>: Aus dem durch Einsetzen von t = 0 veränderten Endtableau:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ergibt sich die mehrdeutige Lösung: $x_3 = s$, $x_2 = -2s$, $x_1 = -s$ mit Parameter s und damit die Lösungsmenge: $L_{t=0} = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$ als Lösung eines homogenen Gleichungssystems.

<u>Fall 3</u>: <u>t ≠ -2, t ≠ 0, t ≠ 1</u>: Die eindeutige Lösung bestimmt sich als:

$$x_3 = \frac{-t}{-t^2 + 2t} = \frac{-1}{-t+2} = \frac{1}{t-2},\ x_2 = t - \frac{2-t}{t-2} = t - (-1) = t+1,\ x_1 = -t + \frac{1}{t-2} + t + 1 = 1 + \frac{1}{t-2}$$

Die Lösungsmenge ist also: $L_{t\neq-2,t\neq0,t\neq1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{t-2} \\ t+1 \\ \frac{1}{t-2} \end{pmatrix} \right\}$.

---

j) Wir formen das lineare Gleichungssystem mit Parameter r gemäß dem Gauß-Algorithmus in Dreiecksgestalt um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2r & 5r & -6 & 4r-2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ r & 2r-1 & r+1 & 2r+1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2rII - I \\ 2III - I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2r & 5r & -6 & 4r-2 \\ 0 & -r & 6 & 2 \\ 0 & -r-2 & 2r+8 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ rIII - (r+2)I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2r & 5r & -6 & 4r-2 \\ 0 & -r & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2r^2 + 2r - 12 & 2r-4 \end{array}\right)$$

Bei der Durchführung des Gauß-Algorithmus wurden die 2. und 3. Gleichung mit r multipliziert. Daher betrachten wir den

<u>Fall 1</u>: <u>r = 0</u>: Einsetzen in das Anfangstableau ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) I \leftrightarrow II \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) II \leftrightarrow III \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{array}\right)$$

Als eindeutige Lösung haben wir: $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_1 = \frac{10}{3}$, so dass für die Lösungsmenge $L_{r=0} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$ gilt.

<u>Fall 2</u>: $2r^2 + 2r - 12 = 0 \Leftrightarrow r^2 + r - 6 = 0 \Leftrightarrow r = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6} = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = -0{,}5 \pm 2{,}5$ $\Leftrightarrow$ <u>r = -3, r = 2</u>:

α) <u>r=-3</u>: Einsetzen in das Endtableau ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -15 & -6 & -14 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

und damit als Lösungsmenge: $L_{r=-3} = \{ \}$.

β) <u>r=2</u>: Das Endtableau wird zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & -6 & 6 \\ 0 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die mehrdeutige Lösung lautet mit reellem Parameter s: $x_3 = s$, $x_2 = -1 + 3s$, $x_1 = 4 - 6s$.

Die Lösungsmenge heißt: $L_{r=2} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$.

Das Diagonalelement -r wurde schon in Fall 1 behandelt. Es bleibt
<u>Fall 3</u>: <u>r ≠ -3, r ≠ 0, r ≠ 2</u>: Aus dem Endtableau folgt:

$$x_3 = \frac{2r-4}{2r^2+2r-12} = \frac{2(r-2)}{2(r-2)(r+3)} = \frac{1}{r+3}$$

$$x_2 = \frac{2 - \frac{6}{r+3}}{-r} = \frac{2(r+3)-6}{-r(r+3)} = \frac{2r+6-6}{-r(r+3)} = \frac{2r}{-r(r+3)} = -\frac{2}{r+3}$$

$$x_1 = \frac{4r - 2 + \frac{6}{r+3} + 5r\frac{2}{r+3}}{2r} = \frac{4r-2+\frac{10r+6}{r+3}}{2r} = \frac{(4r-2)(r+3)+10r+6}{2r(r+3)} = \frac{4r^2+20r}{2r} = 2r+10$$

Lösungsmenge ist somit: $L_{r\neq -2, r\neq 0, r\neq 2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2r+10 \\ -2/_{r+3} \\ 1/_{r+3} \end{pmatrix} \right\}$.

Essen 2009

Literatur

dtv-Atlas Schulmathematik, v. FRITZ REINHARDT (= dtv 3099), München [3]2003

dtv-Atlas zur Mathematik. Tafeln und Texte, v. FRITZ REINHARDT u. HEINRICH SOEDER, Bd.1: Grundlagen. Algebra und Geometrie (= dtv 3007), München 1974, Bd.2: Analysis und angewandte Mathematik (= dtv 3008), München 1977

FISCHER, GERD, Lineare Algebra (= vieweg studium 17), Reinbek 1975

GAL, TOMAS (Hg.), Mathematik zum Studieneinstieg. Grundwissen der Analysis für Wirtschaftswissenschaftler, Naturwissenschaftler und Informatiker, Berlin-Heidelberg-New York 1988

GAL, TOMAS, KRUSE, HERMANN-JOSEF u.a., Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (= Heidelberger Lehrtexte Wirtschaftswissenschaften), Bd.I: Lineare Algebra, Berlin-Heidelberg-New York 1983

KLINGENBERG, WILHELM, KLEIN, PETER, Lineare Algebra und analytische Geometrie, 2 Bde. (= BI 748f), Mannheim-Wien-Zürich 1971-1972

KOWALSKY, HANS-JOACHIM, Lineare Algebra (= De Gruyter Lehrbuch), Berlin-N.Y. [7]1975

NICKEL, HEINZ, KETTWIG, GÜNTER, BEINHOFF, HORST, PAULI, WOLFGANG, KREUL, HANS, LEUPOLD, WILHELM, Algebra und Geometrie für Ingenieure, Thun [15]1988

PAPULA, LOTHAR, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium, Bd.1-2, Wiesbaden [11]2007

Stark Abitur 2005. Prüfungsaufgaben mit Lösungen. Mathematik Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg, bearb. v. JÜRGEN REISTER u. BERNHARD SCHMITT, Freising 2004

Stark Abitur 2007. Prüfungsaufgaben mit Lösungen. Mathematik Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg 2005-2006, bearb. v. JÜRGEN REISTER u. BERNHARD SCHMITT, Freising [3]2006

Stark Abitur 2009. Prüfungsaufgaben mit Lösungen. Mathematik Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg 2005-2008, bearb. v. JÜRGEN REISTER u. BERNHARD SCHMITT, Freising [5]2008